









SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTFÜNFTER BAND.

WIEN, 1896.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

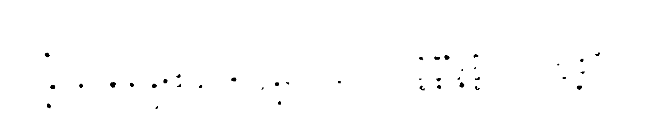
DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

CV. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1896. — HEFT I BIS X.

(MIT 34 TAFELN UND 96 TEXTFIGUREN.)



WIEN, 1896.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. I. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



I. SITZUNG VOM 9. JÄNNER 1896.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender schaffender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Die geographische Gesellschaft in Lissabon ladet zur Theilnahme an der am 8. Juli 1897 stattfindenden Feier der vor vier Jahrhunderten unternommenen Expedition des Vasco de Gama ein.

Der Secretär macht Mittheilung von dem vom k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium, Marine-Section, zur Einsicht zugeschickten Missionsberichte S. M. Schiffes »Pola« für den Monat November 1895.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht eine von Herrn Erich Tschermak im botanischen Institute der Universität Halle a. S. ausgeführte Arbeit: »Über die Bahnen von Farbstoff- und Salzlösungen in dicotylen Kraut- und Holzgewächsen«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. Edm. v. Mojsisovics überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: »Über den chronologischen Umfang des Dachsteinkalkes«.

Das w. M. Herr Prof. A. Schrauf überreicht eine im mineralogischen Museum der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Philipp Heberdey, unter dem Titel: »Krystallmessungen« (II).

k. technischen
Bericht über
teriums für
Reise an
Marmara-

n überreicht eine
fund von Centro-
zellen«.



II. SITZUNG VOM 16. JÄNNER 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 104, Abth. III, Heft VI—VII (Juni bis Juli 1895).

Der Secretär legt vor das von dem k. u. k. gemeinsamen Finanzministerium zugeschickte Exemplar des von der bosnisch-hercegovinischen Landesregierung herausgegebenen Werkes: »Ergebnisse der metereologischen Beobachtungen der Landesstationen in Bosnien-Hercegovina im Jahre 1894.«

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet zwei im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeiten von Dr. Berthold Jeiteles:

1. »Über die Destillation von *o*-Kresol mit Bleioxyd.«
2. »Notiz über das Verhalten von phenylsalicylsaurem Calcium bei der trockenen Destillation.«

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ludwig Boltzmann überreicht eine Abhandlung des Assistenten am k. k. physikalischen Institute in Wien Herrn Dr. Gustav Jäger: »Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmoleküle«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Regierungsrath Prof. G. von Niessel in Brünn, welche die Bahnbestimmung von vier grossen, am 16. und 25. Jänner 1895 erschienenen Meteoren enthält.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine Arbeit von Dr. Paul Cohn: »Über *o*-Benzoylphenol«.

III. SITZUNG VOM 23. JÄNNER 1896.

Die kaiserl. Russische Geographische Gesellschaft in St. Petersburg zeigt die Feier ihres 50jährigen Bestandes am 2. Februar (21. Januar) 1896 an.

Das w. M. Herr Prof. Dr. Leopold Pfaundler in Graz übersendet eine Mittheilung: »Beitrag zur Kenntniss und Anwendung der Röntgen'schen Strahlen«, mit einer photographischen Abbildung.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn St. Meyer: »Über den Sitz der Potentialdifferenzen in Tropfelektroden und im Capillarelektrometer«.

Das c. M. Herr Prof. F. Becke in Prag übersendet folgende vorläufige Mittheilung über Beziehungen zwischen Dynamometamorphose und Molecularvolumen.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben legt vor: »Über die durch Einwirkung von alkoholischem Kali auf Aldehyde entstehenden zweiwerthigen Alkoholate«.

Ferner legt Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben folgende zwei aus dem II. chemischen Laboratorium der Wiener Universität hervorgegangene Arbeiten vor:

I. »Einwirkung von alkoholischem Kali auf ein Gemenge von Formaldehyd und Isobutyraldehyd«, von Alexander Just.

II. »Über das aus dem Isobutyraldehyd entstehende Glycol und dessen Derivate«, von Adolf Franke.

Das w. M. Herr Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Herrn Dr. Gustav Jäger, Assistenten am k. k. physikalischen Institute der Universität Wien, betitelt: »Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens«.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak legt im Namen der Commission für die petrographische Erforschung der Centralkette der Ostalpen den Bericht des c. M. Herrn Prof. F. Becke in Prag über den Fortgang der Arbeiten im Jahre 1895 vor.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Notiz von Prof. Dr. E. Freiherr v. Härdtl in Innsbruck: »Über die Säcularacceleration des Mondes«.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung von Prof. J. Pernter in Innsbruck, betitelt: »Die allgemeine Luftdruckvertheilung und die Gradienten bei Föhn«.

Notiz betreffend die Säcularacceleration des Mondes

von

Dr. E. Freiherrn v. Haerdtl,

a. ö. Professor an der k. k. Universität in Innsbruck.

Durch die schönen Untersuchungen Adam's und Delauney's erscheint es ausser Zweifel gestellt, dass der Coëfficient jenes Theiles der Säcularacceleration des Mondes, welcher aus der Berücksichtigung der Variabilität der Erdbahnexcentricität resultirt, zu 6"18 angenommen werden muss. Newcomb und Tisserand haben weiter gezeigt, dass man auch mit diesem aus der Theorie gewonnenen Werthe zu einer befriedigenden Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen des Mondes und der Theorie gelangt, so lange man erstlich sich darauf beschränkt, nur die neueren und genaueren Mondbeobachtungen darzustellen, ferner ein periodisches Correctionsglied, dessen Periode mit rund 300 Jahren angenommen werden müsste, zu Hilfe nimmt. Wie ferner aus den letztgenannten Untersuchungen resultirt, lassen sich auch die Finsternisse des Ptolemäus und der Araber mit dem aus der Theorie resultirenden Werthe der Säcularacceleration befriedigend darstellen, doch bedarf es noch einer eingehenderen Untersuchung, um die von Hansen gemachte Bemerkung, dass die chronologischen Finsternisse nur mit einem viel grösseren Werthe des Coëfficienten der Säcularacceleration dargestellt werden könnten, als widerlegt betrachten zu können.

Ich habe mich vielfach, doch vergeblich bemüht, die Quelle jenes langperiodischen Störungsgliedes aufzufinden, das der Vergleich der Mondbeobachtungen des letzten Jahrhunderts

mit der Theorie in so auffälliger Weise hervortreten lässt, dass ein Zweifel an der wirklichen Existenz eines solchen Gliedes kaum möglich erscheint. Anlässlich dieser Untersuchungen bin ich aber zu einer Quelle gelangt, aus welcher ein weiterer Beitrag zum Coëfficienten der Säcularacceleration des Mondes fliesst, der diesen Coëfficienten um ungefähr $^1/_{30}$ vergrössert.

Jener Theil der Störungsfunction, den man heranzuziehen hat, sofern man den Einfluss der Erdabplattung auf die Mondbewegung in Rechnung ziehen will, lässt sich bekanntlich so schreiben:

$$R = \frac{fM}{r}\left(\frac{a_1}{r}\right)^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\chi\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2 D\right),$$

wo M die Erdmasse, a_1 den Äquatorialradius des Erdkörpers, α dessen Abplattung, χ das Verhältniss der Centrifugalkraft am Äquator zur zugehörigen Schwere, D die Declination des Mondes, endlich r dessen Distanz vom Erdcentrum bedeuten. Mit Rücksicht auf die bekannten Relationen:

$$\sin D = \sin \varepsilon[\cos(\nu - \Theta)\sin\Theta + \sin(\nu - \Theta)\cos\Theta\cos\varphi] + \\ + \cos\varepsilon\sin(\nu - \Theta)\sin\varphi$$

$$r = a[1 - e\cos(l - \bar{\omega})]$$

$$\nu = l + 2e\sin(l - \bar{\omega}),$$

wo ε für die Schiefe der Ekliptik, φ für die Neigung der Mondbahn, Θ für die Länge des Mondknotens geschrieben erscheint, liefert aber die Entwicklung von R sofort für den nichtperiodischen Theil:

$$R = \left(\alpha - \frac{1}{2}\chi\right) fM\left(\frac{a_1^2}{a^3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sin^2\varepsilon\right).$$

Da uns hier nur jenes Glied in R interessirt, das die Schiefe der Ekliptik enthält, können wir das erste Glied in der Klammer sofort weglassen. Schreiben wir weiter der Kürze halber: $\left(\alpha - \frac{1}{2}\chi\right) = \varkappa$, ersetzen ferner fM durch $n^2 a^3$, so liefert die bekannte Relation:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{2}{4a}\frac{\partial R}{\partial a}$$

sofort

$$\frac{dL}{dt} = -3\varkappa\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 n \sin^2\varepsilon. \tag{I}$$

Die jährliche säculare Variation der Schiefe der Ekliptik lässt sich in der Form schreiben:

$$\delta\varepsilon = \omega t = -0\text{"}47594\, t.$$

Lässt man nun in dem früheren Ausdruck (I) die Schiefe der Ekliptik um $\delta\varepsilon$ variiren, so liefert die durchgeführte Integration sogleich:

$$\delta L = -\frac{3}{2}\varkappa\left(\frac{a_1}{a}\right)^2 \sin 2\varepsilon . \omega . n . t^2.$$

Substituirt man für die hier auftretenden Constanten die entsprechenden Werthe ($\log \varkappa = 7.2100$, $\log\left(\frac{a_1}{a}\right) = 8.2199$) und führt als Zeiteinheit gleich das Jahrhundert ein, so resultirt schliesslich:

$$\delta L = +0\text{"}196\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Wie schon erwähnt, ergibt die Theorie für denjenigen Theil der Säcularacceleration des Mondes, der aus der Berücksichtigung der Variation der Erdbahnexcentricität resultirt, den Betrag: +6"18. Addirt man zu diesem Werth das oben erhaltene Increment, so ergibt sich der theoretische Werth der Säcularacceleration demnach zu:

$$\delta L = (+6\text{"}18 + 0\text{"}20)\left(\frac{t}{100}\right)^2 = +6\text{"}38\left(\frac{t}{100}\right)^2.$$

Im Anschluss an die eben gemachte Bemerkung sei hier noch erwähnt, dass es eine weitere Quelle gibt, aus der sehr bemerkbare Incremente zum Coëfficienten der Säcularacceleration des Mondes resultiren. Diese einzelnen Incremente, welche Beträge von mehreren Secunden erreichen, heben sich aber zusammengefasst vollkommen auf. Sofern ich mich nicht täusche, ist dieser Quelle noch keine Erwähnung geschehen, und so scheint es vielleicht nicht überflüssig, trotz des nega-

tiven Charakters des Resultates doch einigen Bemerkungen zu diesem Gegenstande hier Raum zu geben.

Bezeichnet man mit $e\,e'e''$ die Excentricitäten beziehungsweise des Mondes, der Erde und eines beliebigen Planeten, mit $L\,L'L''$ die entsprechenden mittleren Längen, mit $\varpi\,\varpi'\varpi''$ die Perihellängen, mit M beziehungsweise den Quotienten $\left(\frac{m''}{m'}\right)$ oder $\left(\frac{m''}{m'}\right)\alpha^3$, je nachdem der störende Planet ein innerer oder äusserer sei, so liefert uns die Entwicklung der Störungsfunction, welche uns die directe Einwirkung des Planeten auf den Mond darstellt, bei Beschränkung auf die Glieder niedrigster Ordnung folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
R = Ma^2n'^2\{&C_1 e'e'' \cos(2L-2L'-\varpi'+\varpi'') \\
&+C_2 e'e'' \cos(2L-2L'+\varpi'-\varpi'') \\
&-3C_1 ee'e'' \cos(L+\varpi-2L'-\varpi'+\varpi'') \\
&-3C_2 ee'e'' \cos(L+\varpi-2L'+\varpi'-\varpi'') \\
&+C_1 ee'e'' \cos(3L-\varpi-2L'-\varpi'+\varpi'') \\
&+C_2 ee'e'' \cos(3L-\varpi-2L'+\varpi'-\varpi'') \\
&+C_3 e'' \cos(2L-L'-\varpi'') \\
&+C_4 e'' \cos(2L-3L'+\varpi'') \\
&-3C_3 ee'' \cos(L+\varpi-L'-\varpi'') \\
&-3C_4 ee'' \cos(L+\varpi-3L'+\varpi'') \\
&+C_3 ee'' \cos(3L-\varpi-L'-\varpi'') \\
&+C_4 ee'' \cos(3L-\varpi-3L'+\varpi'') \\
&+C_5 ee'e'' \cos(L-\varpi-\varpi'+\varpi'') \\
&+C_5 ee'e'' \cos(L-\varpi+\varpi'-\varpi'') \\
&+C_6 ee'' \cos(L-\varpi-L'+\varpi'') \\
&+C_6 ee'' \cos(L-\varpi+L'-\varpi'')\}
\end{aligned}
$$

in welchem Ausdruck die C_i leicht zu ermittelnde Constante vorstellen, welche aber selbstverständlich für jeden Planeten einen anderen numerischen Werth haben. Mit Hilfe dieses Ausdruckes ist es nun ein Leichtes, jene Differentialgleichung aufzustellen, deren Integration uns die Störungen erster Ordnung der Mondelemente durch den störenden Planeten liefern wird.

Wir wollen diese Operationen hier nicht durchführen, sondern nur in allgemeiner Weise annehmen, dass dieselben ergeben hätten:

$$\frac{\delta a}{a} = A \cos D \quad e\delta\varpi = P \sin D \quad \delta e = E \cos D \quad \delta l = L \sin D,$$

wo für D der Reihe nach obige Argumente zu substituiren wären.

Gehen wir aber jetzt auf jene Störungsfunction R_0 über, welche uns den störenden Einfluss der Sonne auf den Mond darstellt:

$$\begin{aligned} R_0 = a^2 n'^2 \Big\{ & + \frac{3}{4} \cos(2L-2L') \\ & - \frac{3}{8} e' \cos(2L-L'-\varpi') \\ & + \frac{21}{8} e' \cos(2L-3L'+\varpi') \\ & - \frac{9}{4} e \cos(L+\varpi-2L') \\ & + \frac{3}{4} e \cos(3L-\varpi-2L') \\ & + \frac{9}{8} ee' \cos(L+\varpi-L'-\varpi') \\ & - \frac{63}{8} ee' \cos(L+\varpi-3L'+\varpi') \\ & - \frac{3}{8} ee' \cos(3L-\varpi-L'-\varpi') \\ & + \frac{21}{8} ee' \cos(3L-\varpi-3L'+\varpi') \\ & - \frac{1}{2} e \cos(L-\varpi) \\ & - \frac{3}{4} ee' \cos(L-\varpi-L'+\varpi') \Big\} \end{aligned}$$

und bilden hier in bekannter Weise wieder jene Differentialgleichung, welche integrirt uns die Störungen der grossen Axe und der Excentricität liefern. Das Argument eines beliebigen

Gliedes dieser Function wollen wir mit B bezeichnen. Lässt man nun in den so erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{da}{dt} = \psi_1 \sin D \qquad \frac{de}{dt} = \psi_2 \sin D$$

die Mondelemente um die oben erhaltenen Incremente: $\frac{\delta a}{a}$, $e\delta\varpi$, δe, δl variiren, so lässt sich jedes der obigen D-Argumente mit einem B-Argument so combiniren, dass die Combination $B \pm D$ keine Länge mehr enthält, sondern nur die Differenz $\varpi' - \varpi''$. Die nun durchzuführende Integration liefert demnach in $\frac{\delta_2 a}{a}$ und $\delta_2 e$ säculare Glieder von der Form

$$M.C.e'e''\left(\frac{n'}{n}\right)^4 \sin(\varpi' - \varpi'')nt, \tag{II}$$

welcher Umstand demnach in der Länge das Auftreten eines Gliedes mit t^2 zur Folge hat.

Wie schon bemerkt, erreichen die so leicht zu ermittelnden Incremente zum Coëfficienten der Säcularacceleration Beträge, die mehrere Secunden erreichen. Aus der Action der Venus würde z. B. resultiren: $\delta L = +3''8\left(\frac{t}{100}\right)^2$.

Alle auf diese Weise erhaltenen Incremente werden aber genau compensirt durch jene Reihe weiterer Incremente, die man auf folgende Weise erhält.

Von der Störungsfunction der Sonne auf den Mond R_0 ausgehend, denken wir uns erstlich die nöthigen Störungen der Mondelemente ermittelt. Man erhielte so:

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right) = (A)\cos B \quad (e\delta\varpi) = (P)\sin B \quad (\delta e) = (E)\cos B$$
$$(\delta l) = (L)\sin B \tag{II}$$

Legen wir nun weiter die Störungsfunction zu Grunde, welche der Action eines Planeten auf den Mond (R) entspricht, bilden mit Hilfe derselben wieder:

$$\frac{da}{dt} = \chi_1 \sin D \qquad \frac{de}{dt} = \chi_2 \sin D,$$

lassen ferner in diesen Gleichungen die Mondelemente um die obigen Grössen (II) variiren, so führt uns die Integration wieder auf säculare Glieder in der grossen Axe und der Excentricität, welche im Allgemeinen wieder die Form haben:

$$M.C.e'e''\left(\frac{n'}{n}\right)^4 nt \sin(\bar{\omega}'-\bar{\omega}''). \qquad \text{III)}$$

Die so erhaltenen Incremente sind nun, wie man sich leicht durch analytische Entwicklung überzeugt, genau gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt wie die unter II) angeführten Incremente. Alle Incremente unter II) und III) zusammengefasst compensiren sich demnach vollständig.

Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens

von

Dr. **Gustav Jäger.**

Unter dem Druck eines Gases versteht man nach der kinetischen Theorie jene Bewegungsgrösse, welche die Molekeln in Folge der Zusammenstösse mit der Wand in der Zeiteinheit an die Flächeneinheit abgeben. Sind in der Volumeinheit eines Gases n Molekeln von der Masse m mit einer Geschwindigkeitscomponente ξ senkrecht gegen die Wand, so treffen $n\xi$ solche Molekeln in der Zeiteinheit die Flächeneinheit der Wand und geben an dieselbe die Bewegungsgrösse $2nm\xi^2$ ab, welche, über alle Molekeln summirt, den Gasdruck repräsentirt. Dieser Druck ist im Gesammtraum des Gases vorhanden. Wir können ihn also auch auf eine beliebige Ebene beziehen, die wir uns durch das Gas gelegt denken, und können ihn jetzt als die Gesammtbewegungsgrösse definiren, welche senkrecht zur Ebene durch die Flächeneinheit derselben sowohl nach der einen als nach der anderen Richtung von den Molekeln getragen wird. Für ein ruhendes Gas — und nur diesen Fall wollen wir in Betracht ziehen — geht natürlich gleich viel Bewegungsgrösse sowohl in der einen als in der entgegengesetzten Richtung durch die Ebene. Schreiben wir den Molekeln Kugelgestalt von nicht zu vernachlässigender Ausdehnung zu, so hat dies zur Folge, dass mehr Bewegungsgrösse in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der Ebene getragen wird; denn denken wir uns z. B. den Fall, mehrere vollkommen elastische Kugeln — als solche wollen wir uns die Molekeln vorstellen — seien in einer geraden Linie aufgestellt, und nun treffe die erste mit

der Geschwindigkeit c auf die zweite, so wird die erste zur Ruhe kommen, die zweite aber sofort die Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung der ersten annehmen; diese stösst dann auf die dritte, wobei sich derselbe Vorgang abspielt u.s.w. Der Effect ist nun derselbe, als hätte sich die erste Kugel allein bewegt, jedoch bei jedem Zusammenstoss sofort eine Wegstrecke gleich dem Durchmesser σ einer Kugel übersprungen. Das heisst, es wird in diesem Fall eine gewisse Strecke rascher durchlaufen, als es ohne Zusammenstösse geschähe. Dasselbe erfolgt, wenn zwei Kugeln central gegen einander fliegen. Sie trennen sich mit vertauschten Geschwindigkeiten in entgegengesetzter Richtung. Es ist das gerade so, als wären die Kugeln durch einander hindurch geflogen, nur hat dabei wieder jede die Strecke σ übersprungen.

In einem ruhenden Gas sind nun die Bewegungsrichtungen der Molekeln über den Raum gleichmässig vertheilt, und es wird diese Vertheilung durch die Zusammenstösse der Molekeln nicht gestört. Die Componenten der Gesammtbewegungsgrösse der Molekeln nach einer bestimmten Richtung, wobei nur die positiven Werthe gezählt werden sollen, ist daher von der Richtung selbst vollständig unabhängig, und es hätte, wenn wir auf die Ausdehnung der Molekeln keine Rücksicht nähmen, die Componente der normal durch die Flächeneinheit der Ebene in der Zeiteinheit getragene Bewegungsgrösse den Werth

$$\Sigma n m \xi^2.$$

Dieser Werth wird vergrössert, wenn wir den Einfluss der Zusammenstösse der Molekeln in Betracht ziehen, und wir wollen diesen Einfluss mit dem Namen: Förderung der Bewegungsgrösse bezeichnen.

Stossen zwei Molekeln mit der relativen Geschwindigkeit r gegen einander und bildet r mit der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Molekeln, welche wir die Centrilinie nennen wollen, den (spitzen) Winkel χ, so erfährt dadurch die Bewegungsgrösse $mr \cos \chi$ eine Förderung $\sigma m r \cos \chi$, wenn wir unter σ die Entfernung der Mittelpunkte der Molekeln beim Stoss, also den Durchmesser einer Molekel verstehen. Bildet dabei die Centrilinie mit der normalen zu unserer Ebene, für

welche wir den Druck berechnen wollen, den Winkel α, so erfährt die Bewegungsgrösse senkrecht zur Ebene die Förderung

$$\sigma m r \cos\chi \cos^2\alpha,$$

da wir dann anstatt σ den Werth $\sigma\cos\alpha$, sowie $mr\cos\chi\cos\alpha$ für $mr\cos\chi$ zu setzen haben. Und zwar entfällt dabei ein Theil dieser Förderung auf die eine Richtung, der andere auf die entgegengesetzte. Wir brauchen aber diese beiden Theile nicht zu trennen, da ja nach dem Obigen der Druck durch die Summe der von beiden Seiten durch die Ebene getragenen Bewegungsgrössen bestimmt wird.

Wollen wir nun die Förderung der Bewegungsgrösse wissen, welche die in der Volumeinheit enthaltenen Molekeln in der Zeiteinheit erfahren, so brauchen wir bloss obigen Beitrag eines Stosses über die Zahl der Zusammenstösse per Zeit- und Volumeinheit zu summiren, was uns dann jenen Betrag liefert, um welchen der Druck zu erhöhen ist, wenn wir auf die Ausdehnung der Molekeln Rücksicht nehmen.

Ist die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit, welche eine Geschwindigkeit zwischen c und $c+dc$ besitzen $f(c)dc$, $f(c')dc'$ die Zahl jener, denen eine Geschwindigkeit zwischen c' und $c'+dc'$ zukommt, und schliessen die Bewegungsrichtungen beider den Winkel φ ein, so ist die Zahl der Zusammenstösse, welche die eine Art der Molekeln mit den anderen in der Secunde macht,

$$\frac{\pi\sigma^2}{2} f(c)\,dc\, f(c')\,dc'\, r \sin\varphi\, d\varphi.$$

Gewisse Zusammenstösse werden unter der Bedingung erfolgen, dass die relative Geschwindigkeit mit der Centrilinie zweier Molekeln beim Stoss den Winkel χ einschliesst. Die Zahl derselben erhalten wir, wenn wir den letzten Ausdruck mit $2\sin\chi\cos\chi d\chi$ multipliciren. Wollen wir dann von dieser neuen Zahl noch die Zahl jener kennen lernen, für welche die Centrilinie mit der Normalen zu unserer Ebene den (spitzen) Winkel α einschliesst, so haben wir noch mit $\sin\alpha d\alpha$ zu multipliciren. Diese letzte Zahl ist also

$$\pi\sigma^2 f(c)\,dc\, f(c')\,dc'\, r \sin\varphi\, d\varphi \sin\chi\cos\chi\, d\chi \sin\alpha\, d\alpha.$$

Bei jedem solchen Stoss erfährt die Bewegungsgrösse eine Förderung

$$\sigma m r \cos\chi \cos^2\alpha.$$

Daher ist die Förderung für alle Stösse gleich

$$\pi\sigma^3 f(c)\,dc\,f(c')\,dc'\,m r^2 \sin\varphi\,d\varphi \sin\chi \cos^2\chi\,d\chi \sin\alpha \cos^2\alpha\,d\alpha.$$

Dabei ist zu beachten, dass

$$r^2 = c^2 + c'^2 - 2cc' \cos\varphi$$

ist. Wollen wir nun die Gesammtförderung kennen lernen, so haben wir diesen Ausdruck nach α und χ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, nach φ zwischen 0 und π und nach c und c' zwischen 0 und ∞ zu integriren. Integriren wir erst über die verschiedenen Winkel, so erhalten wir

$$\frac{2}{9}\pi m \sigma^3 (c^2 + c'^2) f(c) f(c')\,dc\,dc'.$$

Integriren wir nun diesen Ausdruck nach c und c' zwischen den Grenzen 0 und ∞, so rechnen wir jeden Zusammenstoss zweimal. Wir haben also, um den richtigen Werth der Förderung der Bewegungsgrösse zu erhalten, dann noch durch 2 zu dividiren. Dies ergibt

$$\frac{\pi m \sigma^3}{9} \int_0^\infty \int_0^\infty (c^2 + c'^2) f(c) f(c')\,dc\,dc' = \frac{2\pi m N^2 \sigma^3 \overline{c^2}}{9},$$

indem nämlich

$$\int_0^\infty f(c)\,dc = \int_0^\infty f(c')\,dc' = N$$

und

$$\int_0^\infty c^2 f(c)\,dc = \int_0^\infty c'^2 f(c')\,dc' = N\overline{c^2}$$

ist, wenn wir unter N die Gesammtzahl der Molekeln in der Volumeinheit und unter $\overline{c^2}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat derselben verstehen.

Haben wir n Molekeln im Volumen v, so

$$N = \frac{n}{v},$$

obige Grösse wird also

$$\frac{2\pi m n^2 \sigma^3 \overline{c^2}}{9 v^2}.$$

Um diese Grösse haben wir den Druck

$$\frac{N m \overline{c^2}}{3} = \frac{n m \overline{c^2}}{3v}$$

zu vermehren und erhalten dadurch den wahren Werth des Druckes

$$p = \frac{n m \overline{c^2}}{3v}\left(1 + \frac{2\pi n \sigma^3}{3v}\right) = \frac{n m \overline{c^2}}{3v}\left(1 + \frac{4b}{v}\right),$$

wenn wir unter

$$4b = \frac{2}{3} n \pi \sigma^3$$

das vierfache Volumen verstehen, welches die Molekeln wirklich mit Materie ausfüllen.

Auch diese Druckformel ist nur angenähert richtig, da wir bei der Berechnung der Zahl der Zusammenstösse den Einfluss des Molecularvolumens vernachlässigt haben. Es gilt daher diese Formel nur dann, wenn b gegen v klein ist. Dann können wir sie aber auch so schreiben

$$pv = \left(1 - \frac{4b}{v}\right) \frac{n m \overline{c^2}}{3},$$

oder

$$p(v - 4b) = RT,$$

wenn wir bekannterweise

$$\frac{n m \overline{c^2}}{3} = RT$$

setzen. Wir erhalten demnach in exacter Weise jene Correction, welche zuerst von van der Waals[1] aufgestellt, von Lorentz[2] mit Zuhilfenahme des Virials strenge bewiesen wurde.

In einer früheren Abhandlung habe ich nun gezeigt, dass bei Berücksichtigung des Molecularvolumens man die Zahl der Zusammenstösse erhält, wenn man die gewöhnliche Formel dafür noch mit

$$1+\frac{5}{2}\frac{b}{v}$$

multiplicirt. Doch ist auch diese Formel nur giltig, so lange $\frac{b}{v}$ eine kleine Zahl ist. Mit Benützung dieses Resultates ergibt sich für das Correctionsglied der Druckformel der Werth

$$\frac{2\pi m n^2 \sigma^3 \bar{c}^2}{9 v^2}\left(1+\frac{5}{2}\frac{b}{v}\right),$$

und somit

$$pv = RT\left(1+\frac{4b}{v}+\frac{10b^2}{v^2}\right).$$

Diese Formel, welche meines Wissens neu ist, liefert uns eine noch weiter gehende Annäherung an die Wirklichkeit als die von van der Waals.

Überlegen wir, dass

$$\frac{1}{\left(1-\frac{b}{v}\right)^2} = 1+\frac{4b}{v}+\frac{10b^2}{v^2}+\frac{20b^3}{v^3}+\ldots$$

ist, so ergibt sich ohneweiters, dass wir unserer Gleichung auch die Form

$$pv\left(1-\frac{b}{v}\right)^4 = RT$$

---

[1] Over de continuiteit van den gas- en vloeistoftoestand. Leyden 1873. (Deutsch von F. Roth: Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1881.)

[2] Wied. Ann., XII, 127 (1881).

geben können, insofern nur b gegen v so klein ist, dass wir die Glieder der unendlichen Reihe, von $\frac{20 b^3}{v^3}$ angefangen, vernachlässigen können.

Da sich leicht nachweisen lässt, dass die wirkliche Formel für die Stosszahl die Form

$$Z\left(1 + a_1 \frac{b}{v} + a_2 \frac{b^2}{v^2} + a_3 \frac{b^3}{v^3} + \ldots\right)$$

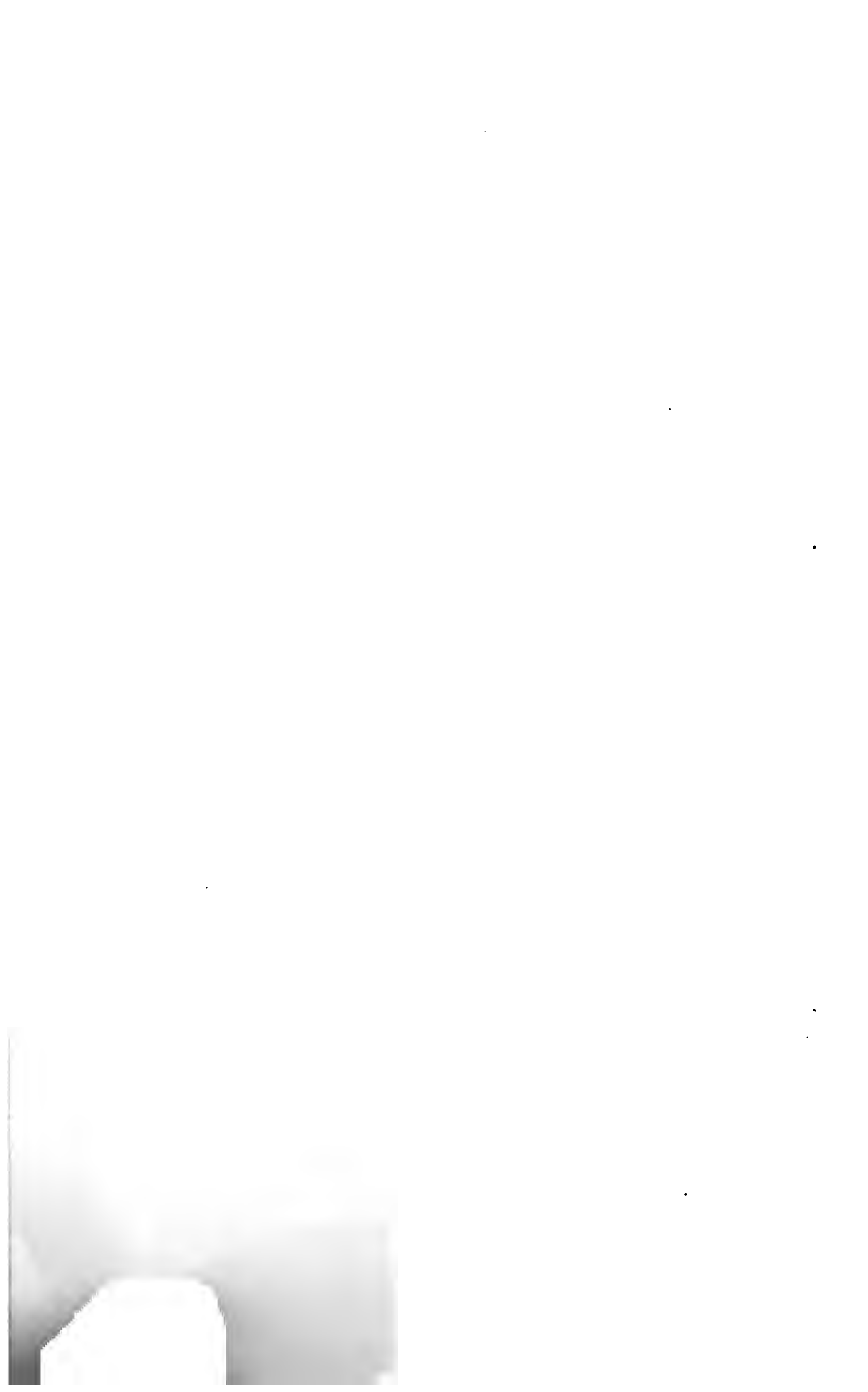
hat, wenn wir unter Z die Stosszahl ohne Berücksichtigung des Molecularvolumens verstehen, so ist damit auch gezeigt, dass sich die wahre Formel für den Druck in der Gestalt

$$pv = RT\left(1 + \alpha_1 \frac{b}{v} + \alpha_2 \frac{b^2}{v^2} + \alpha_3 \frac{b^3}{v^3} + \ldots\right)$$

darstellen lassen muss. Es hat dies ebenfalls schon Lorentz[1] bewiesen.

Um nach unserem Vorgang einen Beweis zu geben, müssen wir auf die bereits erwähnte Abhandlung »Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die Weglänge der Gasmolekeln« verweisen. Es ergibt sich daraus leicht, dass wir für die Stosszahl, wenn wir auch jene Fälle berücksichtigen, dass sich gleichzeitig 3, 4 u. s. w. Wirkungssphären durchschneiden, Correctionsglieder von der Grössenordnung $\frac{b^2}{v^2}, \frac{b^3}{v^3} \ldots$ erhalten, wie wir es oben verlangt haben.

[1] Wied. Ann., XII, 660 (1881).



Bahnbestimmung der grossen Meteore am 16. und 25. Jänner 1895

von

Prof. **G. v. Niessl** in Brünn.

Am 16. Jänner 1895, kurz vor Mitternacht, sind innerhalb einiger Minuten drei grosse Feuerkugeln beobachtet worden, deren Bahnen von verschiedenen Seiten nach Böhmen hin gerichtet waren und von welchen zwei, theils wegen der blendenden Lichtfülle, welche sie weithin verbreiteten, theils durch die Detonationen, welche sie hervorriefen, Aufsehen erregten.

Schon am frühen Morgen des 17. Jänner erhielt ich aus Brünn Mittheilungen über die Beobachtung eines offenbar sehr bedeutenden Meteors. Die vorgerückte Nachtstunde und der wenig günstige Zustand des grossentheils bewölkten Himmels liessen indessen kaum die Zuversicht aufkommen, dass es gelingen werde, eine zur Bahnbestimmung ausreichende Anzahl guter Wahrnehmungen aus verschiedenen Gegenden kennen zu lernen. Gleichwohl versuchte ich auch diesmal, wie in ähnlichen Fällen, durch die Tagespresse in Brünn und Prag bereitwilligst unterstützt, Nachrichten einzuziehen und es entschloss sich auf meine Bitte auch der Director der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, Herr Prof. Dr. Edmund Weiss, dessen ausgiebiger, erfolgreichen Unterstützung sich schon so viele meiner Arbeiten zu erfreuen hatten, eine Aufforderung zur Einsendung von Beobachtungen zu veröffentlichen. Diese Versuche hatten einen über jede Erwartung hinausgehenden Erfolg.

Die ersten eingelangten Berichte waren derart, dass sie auf ein Meteor bezogen werden konnten, welches von der Südostseite über Mähren nach Böhmen, vielleicht auch noch weiter sich bewegt haben mochte. Aus diesem Grunde durfte ich nicht unterlassen, von unseren Beobachtungen dem Director der k. Universitäts-Sternwarte in Breslau, Herrn Geh. Regierungsrath Prof. Dr. J. G. Galle Mittheilung zu machen. Dieser hatte indessen bereits selbst auf gleiche Weise eine Anzahl Berichte gesammelt und mich dann über deren Inhalt durch ein freundliches Schreiben vorläufig informirt.

Überraschend und räthselhaft war es mir nun, dass aus diesen letzteren Nachrichten, bei voller Übereinstimmung der Beobachtungszeit, Schlüsse gezogen werden mussten, welche meinen Vermuthungen ganz entgegengesetzt waren. Diese Berichte bezogen sich nämlich offenbar auf ein Meteor, das von der Nordseite her über Preussisch-Schlesien gegen Böhmen gezogen sein musste, worauf auch die weithin nach Norden vernommenenen Detonationen schliessen liessen.

In der That konnten einige der aus unseren Gegenden mir zugekommenen Nachrichten wirklich auch in diesem Sinne gedeutet werden, und nachdem durch die schlesischen Beobachtungen die Bewegungsrichtung der Feuerkugel, wenn auch nur ganz beiläufig, nachgewiesen war, mussten die damit nicht übereinstimmenden als ungenaue Wahrnehmungen gelten.

Allein dabei blieb es doch nicht. Denn, je mehr Nachrichten einliefen, insbesondere auch die vielen durch die k. k. Wiener Sternwarte gesammelten und je eifriger die Nachforschungen fortgesetzt wurden, desto festeren Boden gewann meine erste Annahme über die Bewegungsrichtung des Meteors, bis endlich, nachdem auch Herr Director Dr. Galle die Güte hatte, mir das von ihm gesammelte reichhaltige Material zur Bearbeitung zu überlassen, aus mehreren ganz sicheren und übereinstimmenden Beobachtungen die Realität zweier Erscheinungen unwiderleglich festgestellt war.

Einen ähnlichen Fall habe ich vor vielen Jahren bereits mitgetheilt,[1] allein der hier besprochene ist doch noch merk-

---

[1] Bahnbestimmung zweier am 12. Jänner 1879 in Böhmen und den angrenzenden Ländern beobachteten Feuerkugeln. Diese Sitzungsber., 79, Bd. II,

würdiger, denn abgesehen von dem kleineren Intervall, stellte es sich überdies heraus, dass eine Gruppe von Beobachtungen sich auf ein drittes Meteor bezog.

Das Zusammentreffen der drei Erscheinungen war ein derartiges, dass die Zwischenzeiten kaum viel grösser gewesen sein mochten, als die Unsicherheit, mit welcher aus den Angaben auf die Fallepochen geschlossen werden konnte. Sehr wahrscheinlich waren sie alle innerhalb dreier Minuten beobachtet worden, vielleicht folgten sie einander noch schneller.

Leider ist diesmal keine Nachricht eingelangt, welche vollständige und brauchbare Wahrnehmungen je zweier dieser Meteore durch denselben Beobachter gebracht hätte, vermuthlich, weil überall ein Theil des Himmels bewölkt war. Nicht selten waren dagegen die Meldungen, dass es »wiederholt geblitzt habe«. Etwas bestimmter drückte sich ein Beobachter aus, indem er mittheilte, »dass sich der Himmel, ehe man bis 40 zählen konnte, zweimal feurig geöffnet habe«. In einer anderen, auf das erste Meteor bezüglichen, ganz brauchbaren Beobachtung wird ferner ausdrücklich angeführt, dass »nach einer Minute ein schwächeres Aufleuchten sichtbar wurde«. Eine Nachricht aus Böhmen lautet dahin, dass es bestimmt dreimal aufgeblitzt habe. Endlich kam es auch vor, dass ein Beobachter die Detonationen des einen Meteors, welches er, wie in diesem Falle anzunehmen ist, der Bewölkung wegen nicht sehen konnte, auf das von ihm wahrgenommene andere bezogen hat.

Dass unter diesen Umständen, da durch die Zeitangaben nichts zu bestimmen war, die Sichtung des aus mehr als 70 Nachrichten bestehenden Materiales nicht leicht war, und dass, je nach der Lage der Beobachtungsorte und der Form der betreffenden Mittheilungen, in einzelnen Fällen manche Zweifel über die Zugehörigkeit nicht völlig zu beseitigen waren, wird man begreiflich finden, doch betreffen diese nirgends entscheidende Umstände, und ich bin überzeugt, dass, nach Durchsicht der in den folgenden Abschnitten angeführten

---

Mai-Heft. Die beiden Radianten waren sehr weit von einander entfernt und auch ganz andere als im vorliegenden Falle.

Beobachtungen, kein Fachmann an der Realität der drei Erscheinungen wird zweifeln können.

Um die Beurtheilung von vorneherein zu erleichtern, scheint es mir nützlich, schon hier die Bahnlagen der drei Meteore im Beobachtungsgebiete, sowie die nachgewiesenen scheinbaren Radianten in Kürze anzuführen.

Das erste, aber nicht das Bedeutendste derselben, auf welches sich zumeist die minder zahlreichen Beobachtungen aus dem südlicheren Theile des Gebietes beziehen, kam, bei einer Bahnneigung von 42° aus 228°5 Azimut, d. i. beiläufig aus NE, von Wildenschwert in Böhmen, nahe an Iglau vorbei in die Gegend zwischen Neuhaus und Wittingau in Böhmen (Radiant: $\alpha = 196°3$, $\delta = +56°0$).

Das zweite zog, vielleicht nicht ganz eine Minute später, ungefähr horizontal in 307° Azimut, also nahezu von SE, aus Ungarn her über Mähren und den nordöstlichen Theil Böhmens, dann über die Grenze bis in die Gegend von Zittau in Sachsen (Radiant: $\alpha = 172°5$, $\delta = -23°0$). Es kam nur aus 34° scheinbarer Elongation vom Apex der Erdbewegung her und hatte desshalb auch eine grosse, von vielen Beobachtern als »blitzartig« bezeichnete Geschwindigkeit. Auf dieses beziehen sich die meisten Nachrichten aus Böhmen und Mähren, aber auch einige aus Preussisch-Schlesien. Detonationen sind nachgewiesen worden.

Das dritte Meteor ist ungefähr 2 Minuten später in einer nur 23°8 gegen den Horizont des Endpunktes geneigten Bahn aus 154° Azimut, daher ungefähr aus NNW, von der Ostsee über die Mark und Preussisch-Schlesien in die Gegend des Kesselberges, am böhmischen Abhange des Riesengebirges, gezogen (Radiant: $\alpha = 341°1$, $\delta = +56°4$). Es kam hinter der Erde her, hatte desshalb eine viel geringere relative Geschwindigkeit als die beiden anderen, stieg auch bedeutend tiefer herab und verbreitete weithin vernehmbare Detonationen. An dem wirklichen Niederfalle von Massen ist kaum zu zweifeln. Dieses Meteor betreffen die meisten schlesischen, aber auch gut brauchbare Beobachtungen aus Böhmen und Mähren.

Im Verlaufe der langwierigen Erkundigungen über diese Erscheinungen liefen neuerdings Berichte über einen schönen

Meteorfall am 25. Jänner 1895 ein, welcher auch südlich über Wien hinaus, sowie abermals in Preussisch-Schlesien beobachtet worden war. Allzusehr noch mit jenen Arbeiten beschäftigt, welche gerade damals in das wichtigste Stadium getreten waren, wollte ich diesen nicht Abbruch thun. Ausser der Festlegung zweier Brünner Beobachtungen, fällt mir daher an der Herschaffung des Beobachtungsmaterials vom 25. Jänner kein Verdienst zu. Ich verdanke dasselbe der Güte der beiden Herren Sternwarte-Directoren Prof. Dr. Weiss in Wien und Prof. Dr. Galle in Breslau.

Es hat nicht viel gefehlt — nämlich nur die Zeit zu weiteren Nachfragen — so wäre auch in diesem Falle das Resultat ein ähnliches geworden, wie für den 16. Jänner, nämlich die thatsächliche Bestimmung mehrerer Bahnen. Ich habe mich aber leider damit begnügen müssen, eine Anzahl nicht zugehöriger Beobachtungen anhangsweise beizufügen. Sicher sind in jener Nacht ebenfalls, wenn auch in grösseren Zwischenräumen, mehrere bedeutende Feuerkugeln in unseren Gegenden beobachtet worden, welche ebensowenig wie die am 16. Jänner demselben Radianten zugezählt werden können.

Ich habe schon einmal eindringlich davor gewarnt, bloss aus statistisch, nach den Epochen zusammengefassten Fällen, weittragende Schlüsse auf das Vorhandensein periodischer Ströme etc. zu ziehen. Die hier behandelten Fälle sind in dieser Hinsicht wieder recht lehrreich. Ohne die sichersten Nachweise des Gegentheiles, welche hier erbracht wurden, hätte die einfache Registrirung der Thatsache, dass am 16. Jänner innerhalb weniger Minuten drei grosse Meteore in einem relativ kleinen Gebiete beobachtet wurden, oder die ähnliche vom 25. Jänner, vermuthlich die Annahme unterstützt, dass die Erde zu dieser Zeit sich in einem an grossen Meteoren besonders reichen Strome befunden habe, und doch war das Zusammentreffen nur ein zufälliges, wenigstens in diesem Sinne.

Ich kann schliesslich nicht unterlassen, hervorzuheben, wie erfreulich es im Allgemeinen ist, dass trotz der ungünstigen Verhältnisse, insbesondere am 16. Jänner, ein so reichliches Beobachtungsmaterial zu erlangen war. Es stellt sich immer deutlicher heraus, dass selbst ohne irgend eine Organisation

zweckentsprechende Anregungen in Verbindung mit eifrigen Nachforschungen nicht leicht erfolglos bleiben. Die Aufforderungen der Sternwarten in Wien und Breslau, in Verbindung mit dem bereitwilligen Entgegenkommen der Redactionen zahlreicher Journale, genügten, um den angedeuteten Erfolg herbeizuführen. Dem Ausdrucke des lebhaftesten Dankes für diese werthvollen Unterstützungen habe ich noch beizufügen, dass ich für die thätigste Vermittlung bei Aufklärung und Sicherstellung vieler Beobachtungen aus dem nördlichen Böhmen, auch Herrn Gymnasialprofessor A. Paudler in Leipa besonders verpflichtet bin.

Meteor am 16. Jänner 1895.

$10^h 49^m$ mittl. Greenwicher Zeit.

1. Eidlitz bei Komotau (31° 8′; 50° 26′).[1] Der Nachtwächter hat (als er angeblich schon 12 Uhr geblasen), durch die plötzliche Helle aufmerksam gemacht, bei bewölktem Himmel in der Richtung zwischen Zuscha und Bielenz einen Blitz von bläulicher Farbe beobachtet, welcher, in schiefer Linie von links nach rechts abfallend, hinter dem Pritschapler Kirchberg (der in 330—340° Azimut die Aussicht hindert) verschwand. Es schien ein Lichtkörper zu sein, welcher einen Feuerstreifen nach sich zog.

Herr E. Gregor, Beamter der Zuckerfabrik, dem ich diese Mittheilung verdanke, hat nach den Angaben des Beobachters eine Skizze angefertigt, welcher zu entnehmen ist, dass die scheinbare Neigung der Bahn gegen den Horizont 38° betrug und die Erscheinung zuerst in etwa 275° Azimut erblickt wurde. Es geht hieraus mit Bestimmtheit hervor, dass die ganze Erscheinung im SE-Quadranten sichtbar war, weshalb sie mit einem der beiden später zu erörternden Fälle unmöglich identisch sein kann. Herr Gregor fügte übrigens bei, dass

---

[1] Hier und im Folgenden ist in der Klammer zuerst die geogr. Länge östlich von Ferro, dann die nördliche Breite angesetzt. Für das Aufsuchen der Orte in unseren besten Karten wäre die Angabe der Längen vom Greenwicher Meridian noch immer unbequem.

auch seine Gemahlin durch die Fenster der Wohnung in Pritschapel, welche gerade gegen Bielenz (ESE) gerichtet sind, eine Feuerkugel, schief über Bielenz abfallend, gesehen habe. Das Zimmer war einen Moment so hell, als ob es in Flammen stünde. Auch ein Fabriksarbeiter bemerkte, wie sich über den ganzen Hof Tageshelle verbreiterte, konnte jedoch das Meteor der vorstehenden Gebäude wegen nicht sehen.

2. Iglau (33°15′; 49°23·5′). Herrn F. Melzer schien es, als ob das Meteor 3 Minuten vor Mitternacht gerade über sein ziemlich freistehendes Haus gezogen wäre und zwar, nach der Eintragung in die Specialkarte von Az. 238·5° zu Az. 58·5°. Das Zimmer, in dem er sich befand, hat Fenster gegen E, N und W, so dass ein grosser Theil des Himmels, welcher sich eben ausgeheitert hatte, übersehen werden konnte. Das Meteor hatte halbe Vollmondgrösse und flog sehr schnell. »Eine Minute nachher folgte noch ein schwächeres Aufleuchten, ein Widerschein«.

3. Nieder-Schleinz bei Limberg-Maissau in Niederösterreich (33°33′; 48°36′). An die k. k. Wiener Sternwarte berichtete der Beobachter, Herr Wirthschaftsbesitzer J. Macht: »Meiner Ansicht nach ist diese Feuerkugel etwa 2 Minuten vor 12ʰ von NE nach W oder mehr südwestlich geflogen. Sie erhellte mit röthlichem Lichte die Nacht, dass man in einem Buche hätte lesen können und flog ungemein schnell«. Ich erhielt später auf Befragen noch einige nähere Aufklärungen. Da nämlich das später folgende Meteor ebenfalls in NE gesehen worden sein konnte, aber einige Grade westlich von Nord erloschen sein musste, handelte es sich darum, festzustellen, wie weit das beobachtete auf der Westseite ungefähr gekommen war. Es erschien nach Einzeichnung in eine Skizze der Umgebung, zuerst in der Richtung zwischen Wartberg und Braunsberg, etwa zwischen 200° und 210° Azimut und konnte, wie der Beobachter behauptet, von ihm ganz bestimmt über NW hinaus verfolgt werden, bis ihn die Häuser hinderten. Er meinte, es müsse gegen den Bahnhof (westlich) gefallen sein. Die scheinbare Neigung der Bahn wurde zu 38° skizzirt. Ein Landmann sah es auf der Reichsstrasse gegen Maissau hin plötzlich am Himmel erlöschen (NW).

Diese Wahrnehmungen stehen also offenbar im Zusammenhange mit jenen aus Iglau und Eidlitz.

4. Wien (34°0′; 48°13·5′). Nach den Angaben des Beobachters, Herrn H. Miller, welcher sich zur Zeit im Freien befand, wurden von dem Herrn Adjuncten der k. k. Universitäts-Sternwarte, Dr. J. Palisa, folgende Daten durch Messung bestimmt: Anfang $A = 137°7$, $h = 25°5$, Ende $A = 132°2$, $h = 20°5$. Das Meteor erschien $1^1/_2$ mal so hell als Venus, verschiedene Farben zeigend, doch überwiegend weiss. Die Beobachtung könnte sich nur auf das hier besprochene Meteor beziehen, stimmt auch hinsichtlich der Position des Endpunktes und der Bahnlage gut mit den drei ersteren überein, nur muss man dann annehmen, dass der grössere Theil der Bahn durch Gebäude oder Wolken verdeckt war.

Einige Bedenken erregt auch die bei der Einmessung angegebene Beobachtungszeit $11^1/_2 - 11^3/_4{}^h$. Da Herr Miller jedoch in seiner Mittheilung an die Sternwarte sich ausdrücklich auf die in dem Aufrufe bezeichnete Zeit (kurz vor Mitternacht) beruft, so dürfte wohl die nachträgliche Angabe minder sicher sein.

5. Sct. Peter in der Au (Niederösterreich. 32° 17·5′; 48° 2′). Herr L. Grestenberger, Gendarmerie-Postenführer, berichtet: »Als ich beiläufig um $11^3/_4{}^h$ in der Richtung W—E ging, tauchte plötzlich ein derartiges Licht auf, als würde rings um mich ein helles Feuer brennen«. Als Ursache erkannte der Beobachter ein blitzartig von rechts nach links abfallendes Meteor, welches etwa aus der Umgebung von Krems einige Meilen weit in der Richtung gegen Budweis gezogen sein dürfte. Die Neigung der Bahn gegen den Horizont skizzirte er zu 45°. *D*:[1] 1—2ˢ.

6. Aus Ellischau in Böhmen (31°13′; 49°20′) gibt Herr Gendarmerie-Postenführer F. Král an, dass er kurz vor Mitternacht vom 16. auf 17. Jänner am südöstlichen Himmel in der Richtung über Iglau ein scheinbar gelbliches Licht in Form und Grösse des Mondes gesehen habe, welches nach kaum 3ˢ wieder an derselben Stelle verschwand. Der Himmel war umwölkt.

---

[1] *D* bezeichnet im Folgenden die beobachtete Dauer.

Iglau liegt aus Ellischau ein wenig nördlich von Ost. Wenn der Beobachter das Meteor erst im letzten Theile seiner Bahn bemerkt hatte, was die Mittheilung vermuthen lässt, so musste es wohl auf der Südostseite erscheinen. Nach der aus Iglau angegebenen Bewegungsrichtung dürfte die Bahn in Ellischau stark verkürzt erschienen sein. Es würde sich also diese Wahrnehmung den übrigen Beobachtungen wohl entsprechend anschliessen, ohne aber brauchbare Bestimmungsstücke zu liefern.

Aus Brünn berichtete mir Herr R. Wenzlowsky, Wachmann im Centralfriedhofe, Folgendes: Es war 2, höchstens 4 Minuten vor Mitternacht, als zweimal hintereinander Lichterscheinungen an dem mehrfach bewölkten Himmel sich zeigten (»Der Himmel öffnete sich zweimal«) und zwar in solcher Stärke, dass ihm »Die Augen übergiengen«. Das Intervall zwischen diesen beiden Erscheinungen schätzte er nachträglich derart ab, dass er etwa 20 Schritte während der Zeit machte, oder ungefähr bis 40 hätte rasch zählen können.

Beide Erscheinungen zeigten sich etwas rechts seitwärts der Iglauerstrasse, welche ein wenig nördlich von W zieht.

Nicht unwichtig sind diese Angaben, weil sie beitragen die Zeitfolge sicherzustellen. Sie können sich nämlich nur auf die beiden ersten Meteore beziehen, weil das dritte in Brünn keine auffallende Lichtstärke verbreitete und hier in seinem ganzen Verlaufe nur in der Gegend von NNW gesehen werden konnte, wo es in der That auch von Anderen beobachtet wurde.

Die directen Zeitangaben für das vorliegende Meteor sind sehr unsicher. Bestimmter lässt sich die Epoche für das folgende zu $11^h\,56\cdot5^m$ ableiten. Da nun nach dieser Mittheilung, in Übereinstimmung mit der Meldung aus Iglau (2), welche das Intervall bis zum zweiten Aufblitzen mit 1 Minute bezeichnet, die beiden Erscheinungen einander sehr bald folgten, habe ich im Sinne der letzteren Angabe für die Fallzeit dieses Meteors $11^h\,55\cdot5^m$ mittl. Brünner Zeit oder $10^h\,49^m$ mittl. Greenwicher Zeit genommen.

Eine genaue Bestimmung der Bewegungsverhältnisse dieses Meteors ist aus den angeführten Beobachtungen nicht zu erlangen. Immerhin kann sie noch sicherer ausfallen, als in manchen anderen Fällen, über welche in der einschlägigen Literatur berichtet wird. Auch drängt die merkwürdige Complication dreier Erscheinungen nothwendig dazu, jede derselben sorgfältig zu untersuchen.

Der Hemmungspunkt lässt sich eben noch durch Verbindung der Beobachtungen aus Iglau und Wien in 32° 31′ östl. Länge und 49° 5′ nördl. Breite, zwischen Neuhaus und Wittingau in Böhmen, bestimmen. Damit würden auch die beiläufigen Angaben aus Eidlitz und Sct. Peter im Einklange stehen. Nur der Bericht aus Nieder-Schleinz könnte auf eine mehr südliche Lage schliessen lassen, doch fehlt irgend eine nähere Bestimmung.

Zur Ermittlung der Höhe liegt allein die Messung aus Wien vor, welche auf diesen Punkt bezogen, 54·8 *km* gibt. Da weder in Richtung noch Höhe überschüssige Beobachtungen vorliegen, kann von einer Schätzung der Sicherheit nicht die Rede sein Weil jedoch über Detonationen nichts berichtet wird, darf man vielleicht annehmen, dass diese grosse Hemmungshöhe sich doch nicht allzuweit von der Wahrheit entfernt.

Radiationspunkt. Mit Benützung dieses Endpunktes können die Beobachtungen aus Eidlitz, Nieder-Schleinz und Sct. Peter, welche nur scheinbare Neigungen liefern, herangezogen werden. Man erhält dann folgende scheinbare Bahnen:

	I		II	
	α	δ	α	δ
Wien	5°5	+50°0	5°9	+42°9
Iglau *	242·7	0·0	72·0	+13·6
Eidlitz	245·8	61·4	146·0	—17·3
Sct. Peter	241·1	68·8	277·1	+64·4
Nieder-Schleinz *	205·0	0·0	20·9	+44·9

(Die mit * Bezeichneten geben unter I nur die Feststellung der Richtung durch den Knoten am Äquator).

Die Beobachtung aus Wien, welche allein durch Messung sichergestellt ist, erhielt das Gewicht 4, während die übrigen mit der Gewichtseinheit in Rechnung kamen.

Hieraus ergab sich für den scheinbaren Radianten der Ort:

Rectasc.... 196°3 ±8°7 m. F. Declin.... +56°0 ±4°6 m. F.

Der mittlere Fehler im Grosskreis ist daher ±6°7. Vermuthlich ist die Bestimmung noch etwas besser, als diese Fehlerschätzung annehmen lässt, doch konnte ein genaueres Resultat auch kaum erwartet werden. Die nöthigen Verbesserungen der Beobachtungen sind folgende: In Wien ist die Höhe am 1. Punkt nur um 0°5 zu vermindern. Die scheinbaren Neigungen sind in Eidlitz um 4°5 und in Nieder-Schleinz um 8°4 zu vermehren, in Sct. Peter um 6°6 und Iglau um 5°3 zu vermindern. Die Neigungen wurden durchschnittlich auf etwa 6° genau abgeschätzt.

Es ergibt sich nunmehr nachstehende Bahnlage gegen die Erde:

Azimut.... 228°5, Neigung.... 42°.

Der Punkt des ersten Aufleuchtens, welches an den meisten Beobachtungsorten ziemlich gleichzeitig bemerkt worden zu sein scheint, würde sich, mit Benützung der früheren Ausgleichung, 190 *km* oder etwa 25·5 g. M. über der Gegend von Wildenschwert in Böhmen ergeben, bei einer nachgewiesenen Bahnlänge von rund 200 *km*.

Will man nebst der Dauerschätzung aus Sct. Peter (2ˢ) auch noch jene aus Ellischau (3ˢ) gelten lassen, so würde man eine geocentrische Geschwindigkeit von 80 *km* erhalten, doch verdient dieses Resultat gar kein erhebliches Gewicht und soll hier nicht weiter benützt werden.

Da der scheinbare Radiant in 161°0 Länge und 55°5 nördl. Breite bei einer Sonnenlänge von 296°6 gelegen war, so betrug die scheinbare Elongation vom Apex der Erdbewegung 66°7, woraus eine grössere relative Geschwindigkeit wohl erklärlich wäre.

Es ist vorhin erwähnt worden, dass die Unsicherheit dieser Radianten-Bestimmung vielleicht geringer sei, als es nach dem

mittleren Fehler den Anschein habe. Diese Vermuthung dürfte ihre Begründung durch den Vergleich der oben ermittelten Position ($\alpha = 196{^\circ}3$, $\delta = +56{^\circ}0$) mit ähnlichen Resultaten für einige andere grosse Meteore finden. Insbesondere kämen in Betracht die

Feuerkugeln[1]

	Radiant	
	α	δ
am 27. Jänner 1858	201°	+53°
am 23. Februar 1862	227	+48
am 24. Februar 1871	210	+55

Die anscheinend schon zu entfernt liegende Position am 23. Februar würde der nothwendigen Verschiebung des Radianten mit der Knotenlänge für eine plausible Geschwindigkeit ganz wohl entsprechen, und zwar noch besser als jene vom 24. Februar.

Der Radiationspunkt ist ungefähr in dieser Epoche auch für Sternschnuppen nachgewiesen. Folgende Beispiele mögen dies belegen.

	Sternschnuppen-Radianten		
	α	δ	
Jänner 1.	199°	+58°	(Schiaparelli, nach Zezioli's Beobachtungen)
» 12.	201	+57	
» 19.	200	+59	
» 24.	195	+56	
» 29.	198	+54	
» 2.—13. . . .	198	+55	(Heis)
Februar 14.	205	+51	(Schiaparelli)
» 15.	214	+53	(Schiaparelli)
März 14.	244	+50	(Denning, 1877)
April 19.	255	+50	(Denning, 1877).

---

[1] 1858, Jänner 27. 3ʰ 40ᵐ. In der Schweiz. Heis: Wochenschrift, I., S. 64 und 72. Detonirend.

1862, Februar 23. 9ʰ 25ᵐ. In England. Nach den Angaben im »Report of the brit. assoc. 1862«, p. 52, berechnet.

1871, Februar 24. 10ʰ 14ᵐ. In Österreich. Aus zwei vollständigen Beobachtungen in den Ann. der k. k. Wiener Sternwarte, 3. Folge, 23. Bd., berechnet.

Die erkennbare Verschiebung — wenn man eine solche Beziehung annehmen will — würde mit der Rechnung unter Voraussetzung einer über 60 *km* hinausgehenden heliocentrischen Geschwindigkeit ganz wohl übereinstimmen. Zusammenfassende Betrachtungen über Intensität und Farbe des Lichtes, sowie andere derartige Wahrnehmungen, dürften in diesem Falle wohl überflüssig sein, weil bei der geringen Zahl der Beobachtungen die betreffenden Angaben leicht zu überblicken sind.

Die Grösse der Feuerkugel würde aus dem Vergleiche in Iglau bei einer der Sachlage gemäss anzunehmenden Entfernung von etwa 80 *km* mit beiläufig 370 *m* Durchmesser bestimmt sein. Von den drei Erscheinungen aus der Nacht vom 16. zum 17. Jänner, welche hier besprochen werden, ist sie daher wahrscheinlich die unbedeutendste gewesen, doch kann die Lichtstärke nicht gering angenommen werden, wenn die aus Eidlitz (190 *km* Entfernung) mitgetheilten Eindrücke berücksichtigt werden.

Meteor am 16. Jänner 1895.

$10^h\ 50^m$ mittl. Greenwicher Zeit.

Preussisch-Schlesien.

1. Oelse-Ullersdorf (33° 59′, 50° 55′). Die folgenden, von dem Beobachter Herrn Pastor E. Gebhardt an den Herrn Sternwarte-Director Dr. Galle in Breslau gerichteten Mittheilungen gehören zu den wichtigsten unter allen, welche die vorliegende Erscheinung betreffen. Sie sind auch durch einige ganz sachgemässe Skizzen erläutert und verdienen daher in jeder Hinsicht die sorgfältigste Beachtung.

Der Beobachter wurde zuerst durch einen grellen Lichtschein aufmerksam, welcher von Süden (etwa über Freiberg) her, oder etwas östlicher, einfiel und, wie durch elektrisches Licht, fast Tageshelle verbreitete. Beim Umwenden konnte er noch während etwa 1^s ungefähr gegen SW hin eine röthliche Kugel bemerken, welche sich in aufsteigender Bahn, von Osten aufgehend, bewegte und genau in der Mitte zwischen dem

Gürtel des Orion und den Sternen im Stierkopf (nach der Einzeichnung in $\alpha = 73°$, $\delta = +7°$) unsichtbar wurde, gleichsam als ob sie im Äther verschwände.

Das gesehene, nach der Skizze beiläufig 17° lange Stück der aufsteigenden Bahn schloss mit dem Horizonte anscheinend einen Winkel von 26° ein. Über das Aussehen des Meteors wird Folgendes berichtet: Es war rund oder auch an einer Seite etwas abgeplattet und scheinbar etwa von halber Mondgrösse. Die Bahn bestand aus Funken, welche so dicht aussprühten, wie aus glühendem Eisen unter dem Schmiedehammer.

Nach ungefähr 3 Minuten war schwacher, langhallender Donner von Westen her zu hören, so, wie von der Siegeshöhe bei Hohenfriedberg. Eingezeichnet ist diese Schallrichtung aus WSW. Der Donner kam aber viel tiefer her als der Verschwindungspunkt gelegen war.

Auf der Westseite befanden sich unter den Plejaden Wolken.

Die Zeit wird zu 12^h oder wenige Minuten darnach angegeben. Da in Schlesien zumeist und beinahe gleichzeitig das im folgenden Abschnitte erörterte Meteor beobachtet wurde, über welches die Zeitungen berichteten, dass es von rechts nach links abzufallen schien, bemerkte der Herr Beobachter, er finde diese Angaben befremdlich, »da wir (auch sein Schwiegervater machte von einem unweit gelegenen Standpunkte dieselbe Beobachtung) durchaus nichts von einer fallenden, sondern nur eine aufsteigende Bahn gesehen haben, und zwar von links nach rechts, worüber absolut keine Täuschung entstehen konnte«.

Es ist anzunehmen, dass in Oelse das dritte, so vielfach beobachtete Meteor desshalb nicht gesehen wurde, weil dies die im Westen liegenden Wolken verhinderten. Dagegen stammte der Schall, den die Beobachter vernahmen, sicher von jenem und nicht von dem, welches sie gesehen hatten, wovon später noch die Rede sein wird.

2. Thanndorf bei Mittelwalde (34° 25′, 50° 9′), $11^h 50^m$. Taghelle momentane Erleuchtung erregte die Aufmerksamkeit und es zeigte sich ein in der Mitte des Himmels, mehr nach

der südlichen Seite entstehender Feuerstrahl, welcher in WNW, bei abgeschätzter Höhe von etwa 30°, verschwand. Der Körper war länglich, von der scheinbaren Grösse des Mondes und verbreitete blaues Licht.

Der Neigungswinkel der Bahn gegen die Verticale am Endpunkt ist zu 13° skizzirt (die Herren Pater Römer und Bartsch).

Auf das vorstehende Meteor dürfte sich wohl auch eine Notiz der »Deutschen Reichenberger Zeitung« aus Hirschberg beziehen, in welcher berichtet wird, dass dort kurz vor 12^h eine plötzliche Erleuchtung der Gegend, hauptsächlich nach SE zu, bemerkt wurde. Die Lichterscheinung, welche kaum 3^s dauerte, schien in der südöstlichen Hälfte des Himmels ihren Ursprung zu haben. Zweifelhaft ist dagegen, ob die folgende Nachricht des »Niederschlesischen Courier« aus Bunzlau hieher oder zum nächsten Meteor gehört. Es wurde kurz vor 12^h am südöstlichem Himmel ein etwa 4^s andauerndes blitzartiges Aufleuchten wahrgenommen. Das spätere Meteor konnte östlich von Süd oder gegen SSE hin, das hier besprochene aber allerdings gegen SE zu gesehen worden sein. Allein solche beiläufige Nachrichten sind in dieser Hinsicht selten ganz verlässlich. Übrigens kommt in den Berichten aus mehreren Orten vor, dass es wiederholt »geblitzt« habe.

Böhmen.

3. Schluckenau (32° 7′, 51° 1′). Herr Lehrer J. Preidel schrieb mir, dass er eine von N nach S laufende Gasse entlang ging, als er genau um $11^h 45^m$ plötzlich einen momentanen, aber blendenden Lichtschein beobachtete, der sehr rasch an Stärke wuchs, aber ebenso schnell auch verschwand. Die Häuser an der Westseite der Gasse waren hell beleuchtet, während jene an der Ostseite, wo sich der Beobachter befand — wesshalb er die Lichtquelle nicht sehen konnte — tiefe Schatten warfen.

4. Rumburg (32° 13′5, 50° 57′). Im Zimmer wurde gegen Mitternacht ein von E nach W sich hinziehender grünlichgelber Feuerschein bei geschlossenen Vorhängen bemerkt (Herr Advocat Dr. A. Kittel).

5. Zwickau (32° 17′, 50° 47′). Wenige Minuten vor Mitternacht wurde am nördlichen Horizonte ein greller Lichtschein wahrgenommen. Der Beobachter, Herr Gerichtsadjunkt O. Buresch, befand sich in einer engen Gasse und konnte die Richtung nicht näher bezeichnen.

6. Leipa (32° 12′, 50° 41′5). Herr Prof. H. Tschuschner ging in einer von S nach N führenden, von ein- und zweistöckigen Häusern gebildeten Gasse, als er gegen $11^h 45^m$ nach NNW hin einen hellen Lichtschein bemerkte, der über die ganze nördliche Seite ausgebreitet war und eine Querrichtung hatte.

7. Niemes (32° 23′5, 50° 39′5). Von hier wurde in der »Leipaer Zeitung« über ein Gewitter mit Blitz und Donner berichtet. Der ungenannte Correspondent theilte mir dann durch freundliche Vermittlung der Redaction Folgendes mit: Als der Nachtwächter über die sogenannte Färberbrücke ging, wurde er um $11^h 45^m$ von einem hellen, am Himmel sich langhinziehenden Lichtstreifen so geblendet, dass er sich an das Brückengeländer anhielt. Erst nach einigen Minuten vernahm er Donner, wie er ihn so stark noch bei keinem Gewitter gehört hatte. Der grünlichblaue Blitz bewegte sich vom Rollberg (59° östlich von N) gegen das Schloss zu (also in westlicher Richtung). Auch der andere Nachtwächter und eine dritte Person machten dieselben Wahrnehmungen.

Herr Webereibesitzer J. Tille war so freundlich, diese Mittheilung noch zu ergänzen. Hienach hatte sich das Meteor ziemlich genau E—W bewegt und die gesehene Bahn war etwa 50—60° lang.

8. Leitmeritz (31° 48′, 50° 32′5). Herr J. Krumbholz sah kurz vor Mitternacht den ziemlich bedeckten Himmel durch 2—3^s stark erhellt. Er hatte das Gesicht gegen W gewendet und konnte das Meteor nicht sehen. Fräulein P. Wintersteiner beobachtete, dass einige Minuten vor Mitternacht ein intensiver, einige Secunden andauernder Blitz alle Gegenstände im Zimmer grell beleuchtete.

9. Komotau (31° 5′, 50° 27′5). Herr Funke hat hier im Stadtpark dreimaliges, bald hintereinanderfolgendes Aufblitzen bemerkt.

10. Seifen bei Platten (30° 25′, 50° 23′). Plötzliche Erhellung in grünlicher Färbung durch höchstens 2—3^s (Herr Oberlehrer K. Linhart).

11. Joachimsthal (30° 35′, 50° 22′5) $11^h 45^m$. Grünlichgelber, 2^s anhaltender, greller Lichtschein (Herr F. Gerlach, Gendarmerie-Postenführer).

12. Neustadt a. d. Mettau (33° 49′3, 50° 20′5). Für die Sicherstellung dieser werthvollen Beobachtung, welche in völligem Einklange mit jener aus Oelse steht, bin ich insbesondere dem Herrn k. k. Bezirkshauptmanne Neuhold, welcher mit liebenswürdiger Bereitwilligkeit meine Nachfragen unterstützte, sowie auch Herrn Bürgerschullehrer Skvara, der so freundlich war, die nöthigen Feststellungen vorzunehmen, zu grossem Danke verpflichtet.

Der Fabriks-Nachtwächter J. Bender richtete an die k. k. Sternwarte in Wien ein Schreiben, welches durch die in demselben angezogenen Vergleiche meine vollste Aufmerksamkeit erregte. Er berichtet: »Während meines Nachtganges, etwa 5 Minuten nach $^3/_4 12^h$, stand ich plötzlich in übermässigem rothen Lichte, so dass ich auf der Erde Nadeln hätte finden können und da sehe ich am Himmel von Osten eine glühende Kugel, grösser als der Vollmond, ganz lautlos kommen, welche sich gerade so bewegt hat, wie die Sonne während des längsten Tages«.[1]

Wie Herr Skvara mittheilte, befand sich der Beobachter in dem hier von N nach S ziehenden, von ziemlich steilen

[1] Als ich diese Mittheilung erhielt, war ich durch ein freundliches Schreiben des Herrn Prof. Dr. Galle schon im Allgemeinen über die schlesischen Beobachtungen des nächsten Meteors, welches von der Nordseite her aus der Mark über Schlesien nach Böhmen gezogen war, unterrichtet. Die Nachricht aus Oelse (1) kannte ich aber noch nicht. Demnach war der Bericht aus Neustadt mit jenen Beobachtungen ganz unvereinbar, weil dort das Meteor unmöglich auf der Südseite in Bewegung von E—W gesehen worden sein konnte. Es lag noch die Möglichkeit vor, dass der Vergleich mit dem Laufe der Sonne nur im Allgemeinen gemeint und die Beobachtung doch gegen Nord hin gemacht wurde. Hierüber musste völlige Sicherheit gewonnen werden. Als nun der Beobachter seine Angaben in allen Stücken aufrecht erhalten, die Einmessung sie auch bestätigt und ergänzt hatte, gab es keinen Zweifel mehr darüber, dass es sich hier um eine andere Erscheinung handelte. Damit klärten sich aber auch die Widersprüche in anderen Beobachtungen auf.

Abhängen begrenzten Mettau-Thale. Das Meteor zog auf der Südseite sehr hoch quer über das Thal. Es wurde zuerst über dem linksseitigen Thalrande 25° südlich von E, 24° hoch erblickt (gemessen) und verschwand nach einigen Secunden hinter dem Dache des nebenstehenden Gebäudes 25° nördlich von W, 25° hoch. Dass es so hoch gestiegen sei, als die Sonne am längsten Tage, wurde vom Beobachter gleichfalls aufrecht erhalten.

13. Nimburg (32° 42'5, 50° 12'). Die Feuerkugel ist ungefähr um $11^h 45^m$ in der beiläufigen Richtung SSE—NNW gesehen worden. D: 3—5ˢ. (Herr F. Zimmermann, Bahnbeamter.)

14. Kriegern (31° 5', 50° 10'4). Der Beobachter, Herr Finanzwach-Oberaufseher B. Mosch, befand sich im Hofraume der Zuckerfabrik, als zwischen $^3/_4 12^h$ und 12^h sich plötzlich fast Tageshelle verbreitete. Er lenkte seinen Blick aufwärts und sah eine feurige Kugel, grösser als die Sonne zwischen zwei Wolkenstreifen »stehen«. Es schien ihm nämlich, als ob die Wolken sich von links nach rechts bewegten und die Kugel auf ihrem Platze blieb, eine nicht unerklärliche Täuschung. Das Meteor hatte daher, wie vom Beobachter in einer zweiten Mittheilung festgestellt wurde, die Bewegung von rechts nach links. Sodann kamen von dieser kugelartigen Erscheinung lange, breite Streifen in derselben Richtung, aber steil abfallend zur Erde, ungefähr 10—15° gegen die Senkrechte geneigt. Hierauf verschwand die Kugel. Nach Einzeichnung in die Karte und zweimaliger Messung mit dem Gradbogen ergab sich für diese Stelle $A = 239°$, $h = 25°$ (Mittel aus 24° und 26°). »Während der ganzen Dauer hätte man bis 10 zählen können. Die Streifen waren 3ˢ lang sichtbar«.

15. Prag (32° 6'; 50° 5'). Herr Lieutenant J. Reimer sah kurz vor Mitternacht von der Franz Josefsbrücke den Himmel über dem Belvedere plötzlich hell beleuchtet, wie bei starkem Blitze (von N gegen W).

16. Bei Chroustowitz (33°40', 49° 57') auf der Strasse. Herr L. Mändl fuhr im Schlitten gegen S, als er nach $^3/_4 12^h$, durch ein grelles Licht aufgeschreckt, einen intensiv leuchtenden Feuerkörper mit blitzartiger Geschwindigkeit vom südöst-

lichen zum nordwestlichen Himmel über seinen Scheitel hinziehen sah. Die Kugel, welche einen hellrothen Streifen nach sich zog, erlosch schon in grosser Höhe, die durch eine Skizze zu etwa 45° ausgedrückt wurde, 42°5 westlich von Nord. Die Dauer der »ganzen Erscheinung« schätzte der Beobachter auf 10—15ˢ.

17. Landskron (34° 17′, 49° 54′). Die beiden Feuerwächter der Tabakfabrik sahen um 12^h einen grell leuchtenden strahlenwerfenden Stern in nordwestlicher Richtung lothrecht zur Erde herabfallen. Die Fallrichtung würde auf der Karte über den an der Michelsdorfer Strasse liegenden Teich führen und den Ort Dittersbach berühren ($A = 125°5$. Mittheilung der k. k. Tabakfabriks-Direction).

In der »Bohemia« wird aus Landskron berichtet, dass die Dauer 3ˢ betragen hatte und man will auch schwaches Donnergeräusch gehört haben.

18. Staab (30° 50′, 49° 38′5). Ungefähr um 12^h ging das Dunkel der Nacht plötzlich in blendende Tageshelle über. Aus einer silberweiss umrandeten Wolke trat ein Feuerballen hervor, der hellgrünes Licht verbreitete. Das Meteor, welches sich in nordöstlicher Richtung bewegte, verschwand nach mehreren Secunden in einer zweiten Wolke. (»Bohemia« Nr. 29.) Weitere Erkundigungen blieben erfolglos.

Mähren.

19. Rippau (34° 31′, 49° 48′6). Ein Landmann sah den Aufgang des Meteors, nach Eintragung in die Karte und Messung des Herrn Schulleiters J. Moravek, in etwa 325° Azimut und 36° hoch. Den Niedergang konnte er, wegen des Hauses, vor dem er sich befand, nicht verfolgen, der Nachtwächter meinte jedoch, die Feuerkugel sei über das Dorf geflogen.

20. Müglitz Bahnhof (34° 36′6; 49° 46′7). Bei sehr finsterer Nacht und umwölktem Himmel, so dass kein Stern sichtbar war, erschien um $11^h 50^m$ der Bahnhof plötzlich wie elektrisch beleuchtet. Eine weissstrahlende Kugel senkte sich in $A = 142°$ (nach der Karte) fast lothrecht herab und erlosch in $h = 15°$ (gemessen). Nach der Aussage dreier anderen

Beobachter ging die Bewegung etwas schief, von links nach rechts herab und es wurde die Neigung gegen die Verticale zu 15° gezeichnet. *D*: 4—5ˢ (Herr Stationsvorstand A. Swoboda).

21. Müglitz, auf der Strasse nach Mürau (34° 35ʹ8, 49° 46ʹ5). Nordwestlich erglänzte plötzlich am Himmel ein mächtiges, das Auge blendendes Lichtphänomen, ähnlich dem Lichte eines brennenden Magnesium-Drahtes, aber in grosser Ausdehnung und Stärke, auch war es im ersten Momente derart ausgedehnt, dass man keine bestimmte Grundform unterscheiden konnte. Es zog sich hernach in einen 2 *m* langen und 10 *cm* breiten Stab mit rothglühenden Enden zusammen, welcher sich lothrecht der Erde näherte, aber noch in beträchtlicher Höhe erlosch ($A = 114°$. Herr Oberlehrer St. Chytil).

22. Hinterwasser bei Brüsau (34° 11ʹ3, 49° 38′). Herr Mühlenbesitzer Joh. Fritz sah das Meteor, einige Minuten vor Mitternacht, im Norden »fast senkrecht« aber doch von rechts nach links gegen NW zu fallen.

Die eingezeichneten Richtungen und Höhen sind: $A = 172°$, $h = 32°$ für den Anfang, $A = 144°$, $h = 11°$ für das Ende. Die Feuerkugel hatte einen langen feurigen Schweif. *D*: 3—4ˢ.

23. Chudschitz (34° 6ʹ8, 49° 17ʹ5). Kurz vor Mitternacht war die Gegend von einem hellen Meteor erleuchtet, das in der Richtung von Blansko (ungefähr NE) über Černahora und Kunstadt (N) gezogen ist. Nach der Meinung des Beobachters war die Richtung des Zuges von Wischau (E) nordwestlich nach Böhmen (Herr Lehrer J. Matoušek).

24. Ober-Gerspitz bei Brünn (34° 16ʹ5, 49° 10ʹ4). Beiläufig $11^h 45^m$ (m. e. Z.?) fiel das Meteor von N gegen W, grelles grünliches Licht verbreitend, so dass die Umgebung ganz hell war. Der Endpunkt befand sich in 148° Azimut. Die Neigung der Bahn gegen den Horizont betrug nach einer Skizze 52·5° (Herr R. Jelinek, Bahnbeamter).

Unweit dieses Ortes befindet sich der Brünner Centralfriedhof, wo ein anderer Beobachter (Wachmann Wenzlowsky) das im Berichte über das vorhergegangene Meteor erwähnte zweimalige Aufleuchten gegen WNW oder NW bemerkte.

Kurze Mittheilungen über grelle Lichterscheinungen liegen überdies aus Trautenau und Kolin in Böhmen, sowie aus Mähr.-Schönberg vor. Sie lauten aber in jeder Hinsicht so unbestimmt, dass sich kaum vermuthen lässt, auf welches Meteor sie sich beziehen.

Als Fallzeit habe ich aus dem Mittel der bestimmter lautenden Angaben $11^h 56 \cdot 5^m$ mittl. Br. Z. oder $10^h 50^m$ mittl. Greenw. Z. genommen.

Hemmungspunkt. Bei der Bestimmung des Endpunktes der Bahn kann die sonst sehr wichtige Beobachtung aus Oelse (1) nicht berücksichtigt werden, weil es gewiss ist, dass der in 52° Azimut angegebene Ort, wo die Feuerkugel im Äther zu verschwinden schien, noch bei weitem nicht der Endpunkt war. Da sich im Westen des Beobachtungsortes Wolkenmassen befanden, dürfte durch diese oder auch schon früher durch leichtere Wolkenschleier das Meteor den Blicken entzogen worden sein. Sowohl die bestimmter lautenden Angaben aus den übrigen entfernt liegenden Orten, als auch die beiläufigen aus Nordböhmen stellen sicher, dass das Meteor bis in die Gegend zwischen Schluckenau, Rumburg und Niemes vorgedrungen sein muss. Abgesehen von den aus letzterem Orte (7) gemeldeten Detonationen ist es auch durch übereinstimmende Nachrichten beglaubigt, dass die Feuerkugel dort von NE über den Rollsberg her noch weiter westlich gezogen ist. In dieser Gegend der Bahn hätte sie aus Oelse schon fast genau westlich gesehen werden müssen, womit das Azimut von 52° für den Verschwindungspunkt im Widerspruche ist. Anderseits erscheint die betreffende Mittheilung durchaus so exact, dass an einen derart erheblichen Irrthum nicht zu denken ist. Die Aufklärung gibt aber, wie schon erwähnt, der Zustand des Himmels, wesshalb diese Beobachtung erst nach Bestimmung des Auflösungspunktes sicher verwendbar sein wird.

Auf den Endpunkt bezügliche Azimute lieferten: Kriegern (14), Chroustowitz (16), Landskron (17), Müglitz (20, 21), Hinterwasser (22), Ober-Gerspitz (24) und Thanndorf (2), letzteres jedoch nur in der beiläufigen Form WNW. Einbezogen kann

auch noch werden das Azimut aus Neustadt (12). Obwohl das Meteor in $A = 115°$ dort eigentlich hinter einem Dache verschwand, so lassen die Höhen aus den anderen Beobachtungsorten erkennen, dass es nicht mehr viel weiter gezogen sein kann, und da der Fall überdies ein sehr steiler war, ist die obige Annahme zulässig.

Die beiden Richtungen aus Müglitz habe ich vorläufig nicht benützt, weil sie um den ansehnlichen Betrag von 28° auseinandergehen und kein Grund vorliegt, die eine der andern vorzuziehen.

Aus den vorhin erwähnten Wahrnehmungen in Nordböhmen, insbesondere aus den Berichten der Beobachter in Niemes (7), Leipa (6), Zwickau (5) und Schluckenau (3) lässt sich mit einiger Wahrscheinlichkeit schliessen, dass der Hemmungspunkt nördlicher als die ersten drei Orte und östlicher als Schluckenau gelegen war. Diese Angaben eignen sich daher zur nachträglichen Vergleichung, insoferne das direct abgeleitete Resultat nicht als sehr zuverlässig gelten könnte, wenn es dem Complex dieser Wahrnehmungen erheblich widersprechen würde.

Die Ermittlung nach der Methode der kleinsten Quadrate gibt für den

Endpunkt..... 32° 24′ ö. L. v. F. und 50° 51′ n. Br.

nahe über dem auf der österreichischen Specialkarte mit der Cote 532 bezeichneten Pferdeberg nächst Oybin in Sachsen, zwischen Zwickau und Zittau, 2 *km* von der böhmischen Grenze entfernt.

Dieser Punkt liegt nördlich von Niemes, nordöstlich von Leipa und Zwickau, südöstlich von Schluckenau. Die Bestimmung lässt daher keinen wesentlichen Widerspruch gegen die betreffenden Angaben erkennen. Dass das Meteor noch viel weiter westlich gezogen sein möchte, wird unter Anderem durch die Angabe aus Schluckenau, dass die Ostseite der Gasse im tiefen Schatten blieb, unwahrscheinlich.

Inwieferne die benützten, sowie auch die ausgeschiedenen Beobachtungen dargestellt wurden, zeigt folgende Übersicht.

	Azimut berechnet	Azimut beobachtet	ΔA
Kriegern	230°9	239°0	— 8°1
Chroustowitz	137·6	137·5	+ 0·1
Landskron	128·5	125·0	+ 3·5
Hinterwasser	137·5	144·0	— 6·5
Ober-Gerspitz	145·0	148·0	— 3·0
Neustadt	119·5	115·0	+ 4·5
unbenützt blieben:			
Thanndorf	119°4	112°5	+ 6°9
Müglitz (20)	128·0	142·0	—14·0
Müglitz (21)	128·2	114·0	+14·2

Das Mittel der beiden aus Müglitz angegebenen Azimute würde also sehr genau dem berechneten Werthe entsprechen.

Der mittlere Fehler der benützten Richtungen ist ±6°1, also ziemlich gross.

Für die Bestimmung der Höhe liegen nur drei auf Messung beruhende Angaben vor, nämlich jene aus Kriegern, Hinterwasser und Müglitz (20). Die Abschätzungen aus Thanndorf und Chroustowitz erscheinen zu unsicher.

Die einzelnen Resultate sind:

	Scheinbare Höhe (h)	Entfernung des Endpunktes (D)	Höhe des Endpunktes
Kriegern	25°	119·3 *km*	56·7 *km*
Hinterwasser	11	186·1	38·9
Müglitz	15	196·9	55·8

Es entspricht den Umständen, das einfache Mittel zu nehmen, welches dann für die

Höhe des Hemmungspunktes.... 50·5 *km* ± 5·8 *km*

liefert.

Diese Höhe von fast 7 g. M. ist zwar wesentlich grösser als die gewöhnlich bei grossen Meteoren vorkommende, allein mit Rücksicht auf die noch zu erörternden übrigen Verhältnisse ist sie nicht auffallend.

Die Correctionen der scheinbaren Höhen sind für Kriegern —2°5, für Hinterwasser +2°4 und in Müglitz —1°0. Die berechnete Höhe für Neustadt a. d. Mettau wäre 22°9, somit nicht im Widerspruche mit der Beobachtung.

Nach dem bisher in der Regel eingehaltenen Vorgange ist nunmehr aus den geographischen Coordinaten und der Höhe des Endpunktes, dessen scheinbare Lage am Himmel für die verschiedenen Beobachtungsorte berechnet und als Endpunkt II) der betreffenden scheinbaren Bahn betrachtet worden. Dadurch erhielten auch die Beobachtungen in Rippau und Oelse die nöthige Ergänzung. Für den letzteren Ort konnte nämlich der genau eingezeichnete, vermeintliche Verschwindungspunkt als erster Bahnpunkt einbezogen werden.

Für Landskron (senkrechter Fall), Thanndorf und Ober-Gerspitz sind die angegebenen scheinbaren Neigungen, und für Müglitz ist das Mittel aus (20) und (21), also 7°5 Neigung gegen die Verticale benützt worden.

Hinsichtlich Neustadt ist die Angabe von 25° S von E nach 25° N von W nicht ganz im Einklange mit der Bezeichnung der Maximalhöhe gleich jener der Sonne am längsten Tag (63°2), weil die erstere Bahn durch das Zenith gehen müsste. Ich habe eine Bahn gewählt, welche der Mittellage aus beiden Angaben entspricht.

Die benützten Bahnen sind in folgender Übersicht zusammengestellt, welche für die Neigungsbeobachtungen unter I (mit * bezeichnet) den Knoten am Äquator enthält.

	I		II	
	α	δ	α	δ
Oelse	73°	+8°	40°8	+18°3
Neustadt	157·2	0 *	17·4	+36·1
Thanndorf	158·0	0 *	13·2	+31·4
Landskron	158·9	0 *	4·6	+36·6
Rippau	143·1	+1·2	3·7	+35·0
Müglitz	153·1	0 *	4·0	+34·8
Ober-Gerspitz	180·7	0 *	344·7	+42·4

Die Beobachtung von Oelse erhielt das Gewicht 4, weil sie, und zwar die einzige, auf Sterne gut bezogen ist; alle übrigen

kamen mit Gewicht 1 in Rechnung. Ohne die Bahnen aus Oelse und Ober-Gerspitz bei Brünn wäre die Aufgabe nicht gut lösbar gewesen, weil die anderen viel zu gleichartig sind. Sie betreffen Beobachtungsorte aus der Gegend, über welche das Meteor gezogen ist. So fallen also jene aus Neustadt und Thanndorf fast ganz zusammen und beiläufig auch jene von Landskron und Müglitz. Da ferner Rippau sehr nahe an Müglitz liegt, so entspringt der Unterschied hier auch nur grösstentheils aus den Beobachtungsfehlern.

Die Lage des scheinbaren Radiationspunktes folgt hieraus:

Rectasc.... 172°5 ±2°8. Declin.... —23°0 ±3°3

im südlichsten Theile des »Becher«.

Der mittlere Fehler einer Beobachtung (I) der Gewichtseinheit ist ±8°8.

Die Verbesserungen der Anfangspositionen sind für Oelse —0°3, für Rippau +9°7. Die Neigungsverbesserungen (+ entsprechend der Vergrösserung der scheinbaren Neigung gegen den Horizont) betragen für

Neustadt.............	— 9°9
Thanndorf...........	—15·0
Landskron...........	— 1·8
Müglitz..............	+ 3·4
Ober-Gerspitz.........	+ 2·0;

die verbesserte Bahn in Neustadt nähert sich auf 2—3° dem angegebenen Vergleiche mit der Sonnenhöhe.

Aus der oben ermittelten Position des scheinbaren Radianten ergibt sich nun folgende Bahnlage gegen die Erde am Endpunkte:

Azimut...... 307°, Höhe....... 0°;

die Bahn war also, innerhalb der Fehlergrenzen, am Endpunkte horizontal.

Soweit unsere Beobachtungsorte in Betracht kommen, wurde in dieser Bahn das Meteor zuerst in Rippau (36° hoch) und Neustadt (25° hoch) ungefähr gegen SE hin gesehen

Beide Wahrnehmungen geben ziemlich übereinstimmend den Punkt 56 *km* hoch über der Gegend bei Hlinsko in Mähren, 270 *km* vom Endpunkte entfernt. Von hier ging die Projection der Bahn ein wenig nordöstlich an Prerau vorbei, über Olmütz (Neugasse), Chudwein bei Littau, Mürau, fast genau über Landskron, Kosteletz am Adler, südwestlich nahe an Smiřic, Lomnitz und Liebenau zum Endpunkte.

Dass die erste Wahrnehmung hier nicht zugleich das Aufleuchten bezeichnet, ist kaum zu bezweifeln. Die Beobachtung des Meteors weiter nach Osten hin und in noch grösserer Höhe ist sehr wahrscheinlich durch die ungünstigen atmosphärischen Verhältnisse verhindert worden.

Geschwindigkeit. Angaben über die Dauer liegen mehrere vor, welche sich zumeist aber nicht auf ein bestimmtes Bahnstück, sondern auf die Lichterscheinung beziehen. Da der Schilderung aus Neustadt zu entnehmen ist, dass die Lichtstärke bereits auffallend gross war, ehe der Beobachter das Meteor am ersten Bahnpunkt sah, was ja auch durch andere Berichte bestätigt wird, so wird man immerhin die Durchschnittsschätzung der Dauer auf die angeführte Bahnlänge von 270 *km* beziehen dürfen. Die Dauerangabe von 10—15^s in Chroustowitz widerspricht der vorhergegangenen Bemerkung, dass sich die Feuerkugel mit blitzartiger Geschwindigkeit von der Ostseite zur Westseite bewegt habe. Vermuthlich ist also ein Nachleuchten des Schweifes inbegriffen.

Folgende Schätzungen wurden mitgetheilt:

Seifen	2—3^s,	Landskron	3^s
Joachimsthal	2—3	Müglitz (20)	4—5
Leitmeritz	2—3	Müglitz (21)	4
Nimburg	3—5	Hinterwasser	3—4.

Im Durchschnitte 3·3^s. Die Angaben aus Hirschberg 3^s und Bunzlau 4^s können nicht mit Sicherheit auf dieses Meteor bezogen werden. Ihre Einbeziehung würde übrigens auch kein anderes Resultat geben. Aus diesen Dauerschätzungen würde man für die geocentrische Geschwindigkeit rund 82 *km* erhalten. In Oelse ist ein kurzes Bahnstück während 1^s beobachtet worden. Vorausgesetzt, dass dessen Länge genau angegeben

ist, würde aus diesem nur 30 *km* für die Geschwindigkeit hervorgehen. Wird dieses Resultat mit dem vorigen verbunden, so ergibt sich schliesslich 76 *km*. Sehr verlässlich ist dieses Ergebniss an sich nicht, doch wird es im Allgemeinen durch die übrigen Umstände bestätigt.

Grösse, Lichtentwicklung, Farbe, Detonationen.

In Oelse erschien das Meteor ungefähr von halber Mondgrösse, was, bezogen auf den in der Skizze bezeichneten Punkt (90 *km* Entfernung), einem wirklichen Durchmesser des leuchtenden Dampfballen von 420 *m* entspricht.

Thanndorf (60 *km* kürzeste Distanz) gibt Mondgrösse an, woraus 560 *m* folgen würde.

In Neustadt a. d. Mettau (55 *km*) schien die Feuerkugel grösser als der Mond. Darnach wäre der wirkliche Durchmesser grösser als 510 *m* gewesen.

Diese Resultate stimmen ganz befriedigend überein; dagegen würde die Schätzung aus Kriegern für die kleinste Entfernung (128 *km*) mehr als 1200 *m* geben. Wenn man auch hievon absieht, wird man doch wohl annehmen dürfen, dass die hell leuchtenden Partien einen Raum von etwa 500 *m* Durchmesser oder selbst noch etwas mehr eingenommen haben.

Abgesehen von Thanndorf und Oelse, wo das Meteor einerseits als länglich, anderseits als abgeplattet bezeichnet wurde, wird keine bemerkenswerthe Abweichung von der Kugelform angezeigt. Theilungen in mehrere getrennte Stücke während des eigentlichen Laufes, welche sonst nicht selten beobachtet werden, scheinen in diesem Falle nirgends bemerkt worden zu sein, nicht einmal bei der Hemmung. Es wird in den Beobachtungen vom »Verschwinden«, nicht aber, wie gewöhnlich, vom »Zerplatzen« gesprochen. Nur die in Kriegern angegebenen, zur Erde gehenden Streifen könnten auf den Fall mehrerer Partikel schliessen lassen.

Die Lichtentwicklung war sicher eine sehr bedeutende. Der sorgfältige Beobachter in Oelse fand, als das Licht von Süden her kam, da also das Meteor weit über 100 *km* entfernt war, dass es fast Tageshelle verbreitete. Dasselbe wird aber auch aus dem noch weiter entfernten Kriegern gemeldet, selbst

noch aus Staab (18), wo die Entfernung mindestens 180 *km* betrug.

Hinsichtlich der Färbung des Lichtes ist zu bemerken, dass drei Angaben dieselbe als »weiss wie Bogenlicht«, dagegen vier als grünlich oder grünlichgelb bezeichnen, während einem Beobachter die blaue Farbe vorzuherrschen schien. Jener in Neustadt spricht dagegen von rothem Lichte (auch in Oelse wird es als röthlich bezeichnet), wobei möglicherweise die Wirkung des intensiv leuchtenden Schweifes, welcher zumeist als feuerroth charakterisirt wurde, zur Geltung kam. Wenn in der Mittheilung aus Oelse die Verhältnisse des kometenähnlichen Bildes annähernd richtig gegeben sind, so müsste man auf eine Schweiflänge von mehr als 20 *km* schliessen. Die Beschreibung aus Müglitz (21) schildert recht gut den überwältigenden Eindruck, welchen die ungeheure, in ihrer relativen Nähe (50—55 *km*) formlos und erst in grösserer Entfernung streifenartig erscheinende Lichtwolke hervorrief.

Detonationen wurden in Niemes von beiden Nachtwächtern vernommen. Der Endpunkt der Bahn lag nicht weit entfernt, aber doch über 50 *km* hoch. Gleichwohl erscheinen diese Angaben nicht unglaubwürdig, da auch ausdrücklich erwähnt wird, dass der Donner erst lange nachher folgte. Freilich muss anderseits festgestellt werden, dass aus den umliegenden Gebieten sonst keine derartigen Meldungen eingelangt sind. Ob die Zeitungsnachricht aus Landskron, welches mehr als 170 *km* vom Endpunkt entfernt liegt, auf wirklichen Wahrnehmungen beruht, mag dahingestellt bleiben. Die Fabriksnachtwächter wussten davon nichts zu berichten. Allerdings ist die Feuerkugel über Landskron nicht viel höher als am Endpunkte hingezogen, dies trifft aber auch noch für mehrere andere Beobachtungsorte zu, aus welchen keine ähnlichen Nachrichten vorliegen.

Anders als diese Angaben sind jene aus Oelse aufzufassen. Unter dem Eindrucke des in jeder Hinsicht so genauen Berichtes kann man sie nicht anzweifeln. Die Entfernung der Bahn dieses Meteors war jedoch in allen Theilen so gross, dass nur ganz aussergewöhnliche Schallimpulse die Wahrnehmungen in Oelse erklären könnten. In diesem Falle hätten aber die Nachrichten

aus Nordböhmen doch ganz anders lauten müssen. Es ist dagegen sehr wahrscheinlich, dass die Beobachter, welche dieses Meteor gesehen haben, die Detonationen hörten, welche durch das dritte, im nächsten Abschnitte besprochene Meteor verursacht wurden, dessen optische Wahrnehmung durch die Bewölkung auf der Westseite offenbar verhindert wurde. Da dessen Hemmungspunkt, wie wir später sehen werden, nur 33 *km* über dem Kesselberge des Riesengebirges, also nur etwa 65 *km* von Oelse entfernt gelegen war und auch die angegebene Richtung und scheinbare Höhe, aus welcher der Schall gekommen war, dahin weist, so spricht Vieles für diese Annahme. Das angeführte Intervall von 3 Minuten würde zu einer Entfernung von 60 *km* stimmen. Dabei müsste jedoch angenommen werden, dass beide Meteore gleichzeitig erschienen sind. Das auf Grund verschiedener Zeitangaben festgestellte Intervall von 2 Minuten zwischen beiden Meteorerscheinungen müsste also noch weiter vermindert, oder jenes zwischen Licht und Schall in Oelse vermehrt werden. Eines wie das andere erscheint mir zulässig. So seltsam es also scheinen mag, dass ein Beobachter ein Meteor sieht, dagegen die Detonationen eines anderen bald darauf vernimmt, so dürfte sich die Sache in diesem Falle doch so verhalten haben.

Kosmische Verhältnisse. Der scheinbare Radiationspunkt dieser imposanten Feuerkugel war nur 34° vom Apex der Erdbewegung entfernt, woraus sich die grosse geocentrische Geschwindigkeit derselben erklärt. Die heliocentrische Geschwindigkeit ergibt sich hiernach zu 54 *km* oder 1·84 in der üblichen Einheit. Mit dieser Geschwindigkeit würde man für den kosmischen Ausgangspunkt die Position 175°5 Länge und 38°5 südl. Breite erhalten.

Der hier nachgewiesene Radiationspunkt war mir bisher unbekannt. Er liegt eben für Beobachter in grösseren nördlichen Breiten sehr ungünstig, da er einen kleinen Tagbogen beschreibt und im Jänner erst um Mitternacht aufgeht. Überdies kommen nach vielfachen Erfahrungen aus so geringer Elongation vom Apex (wegen der grossen Geschwindigkeit) selten tiefer gehende Meteore. Die Nachweisung von Sternschnuppen-Radianten ist

aber in grosser Zenithdistanz sehr schwierig und meist nur bei reichen Strömen ausnahmsweise möglich.

Aus der südlichen Erdhälfte besitzen wir bisher nur wenige Radiationsbestimmungen, welche zumeist aus den Beobachtungen von Neumayer in Australien abgeleitet wurden. Unter diesen befindet sich für die Epoche März 1. bis April 30. (Report of the brit. assoc. 1875, p. 157; wohl eine Zusammenziehung) ein Radiant in $\alpha = 197°$, $\delta = -32°$ als »sicher beobachtet« angeführt.

Meteore, welche aus dem früher angeführten kosmischen Ausgangspunkte in 175°5 Länge und —38°5 Breite, unter Voraussetzung der ermittelten Geschwindigkeit, innerhalb jener Epoche in die irdische Atmosphäre gelangen, würden ebenfalls aus dieser Gegend des Himmels zu kommen scheinen. So liefert beispielsweise die Rechnung für den 20. März ($\odot = 0$) den scheinbaren Radianten in $\alpha = 196°5$, $\delta = -37°$. Die Verschiebung des scheinbaren Radianten aus der Position $\alpha = 172°5$, $\delta = -23°0$ für den 16. Jänner in die oben berechnete gilt auch noch für kleine Änderungen in der Hypothese für die Geschwindigkeit.

Gerade der Umstand, dass die bekannten südlichen Radianten nicht zahlreich sind, dürfte dieser Übereinstimmung ein höheres Interesse verleihen.

Meteor am 16. Jänner 1895.

$10^h 52^m$ mittl. Greenwicher Zeit.

Brandenburg und Preussisch-Schlesien.

1. Altenflies (33° 7'5, 52° 20') unweit Landsberg a. d. Warthe (Brandenburg). Gegen 12^h wurde von mehreren Personen am westlichen Himmel das Aufleuchten eines Blitzstrahles wahrgenommen, worauf schwacher Donner folgte (Zeitungsnachricht).

2. Glogau (33° 45'7, 51° 39'8). $11^h 51^m$. Der stark bedeckte Himmel theilte sich plötzlich in südwestlicher Richtung. In der Öffnung erschien ein sehr stark leuchtender Lichtstrahl.

Die Erscheinung war ungefähr von Sonnengrösse und verbreitete während 5—6^s blendende Helligkeit (Niederschles. Anzeiger).

3. Sprottau (33° 12', 51° 34'). Einige Minuten nach 12^h überraschte eine Lichterscheinung wie elektrische Beleuchtung. Beim Aufblicken sahen wir direct über uns einen mit grosser Schnelligkeit im Bogen sich fortbewegenden Lichtball. Nachdem er etwa ein Viertel des von der Scheitelhöhe bis zum Horizonte gedachten Bogens erreicht hatte, zertheilte er sich ohne hörbares Geräusch in eine Menge leuchtender Kugeln. Richtung: NNE—SSW. *D*: Wenige Secunden. Der Himmel war etwas bewölkt (Beobachtung der Lehrerin Frl. Kleemann, mitgetheilt durch Herrn Lindner).

4. Ober-Dammer (33° 58'6, 51° 25'5). Etwa um 11^h 50^m wurde am Südwesthimmel ein grosses Meteor beobachtet, welches in der Richtung auf Liegnitz gefallen sein soll und die ganze Gegend wie mit elektrischem Lichte taghell beleuchtete. Die Beobachter sahen es in Stücke platzen und hörten 4 Minuten später (nach der Uhr gemessen) einen kurzen, rollenden Donner, als wenn in Glogau eine der grossen Festungskanonen, deren Donner man hier hören kann, abgeschossen würde (Beobachtung der Herren Schmidt und Neumann, mitgetheilt vom Herrn Lehrer Pfeiffer).

5. Steinau (34° 5'5, 51° 25'2). Das Meteor wurde von dem Nachtwächter Ziefer im letzten Bahntheile beobachtet. Er sah es über dem First eines gegenüberliegenden Hauses in Stücke zerspringen und erlöschen. Herr Lehrer M. Pfeiffer ermittelte nach dessen Angaben mit dem Compass, dass der Endpunkt genau in SW (astronomisch, mit Berücksichtigung der magnetischen Declination) und 25—27° hoch (gemessen) gelegen war. Controlirt wurde diese Bestimmung durch die Angabe des Herrn Pfeiffer, dass am 27. Jänner, 11^h 15^m Abends ein Punkt nahe ψ-Eridani ($\alpha = 72°$, $\delta = -10°$) an dieser Stelle war. Hieraus würde für den Endpunkt $A = 47°$, $h = 20°$ folgen. Der Beobachter fand die Feuerkugel von der Grösse des Vollmondes und gibt an, dass er nach $1^1/_2$ Minuten Donner, von der Art eines in grösserer Entfernung abgegebenen Kanonenschusses gehört hatte. Soviel er noch sehen konnte, sei »das

Meteor senkrecht gefallen und diese Linie nach rückwärts verlängert, trifft den Polarstern«, worin, mit Rücksicht auf das bezeichnete Azimut, ein Widerspruch liegt. Übrigens ist diese letztere Angabe von geringem Belang, da, wie schon erwähnt, nur ein sehr kurzes Bahnstück gesehen wurde.

6. Lüben (33° 51′, 51° 24′). Gegen 12^h begann es wiederholt so grell zu blitzen, dass der ganze Himmel für Momente in schönster Helle erglänzte. Der Donner machte sich ebenfalls stark bemerkbar (Lübener Stadtblatt und Anzeiger).

7. Mondschütz (34° 15'6, 51° 17'1). Der Nachtwächter gibt an, dass er, durch die plötzliche Helle aufmerksam gemacht, in der Richtung gegen Leubus eine Menge Sterne herabfallen gesehen und bald darauf den Donner vernommen habe (Herr k. Kammerherr v. Köckritz). Das Azimut nach Städtel Leubus beträgt 75° und nach Dorf Leubus 64°.

8. Löwenberg (33° 8′, 51° 7′). Die »Löwenberger Zeitung« schreibt, dass sich zwischen 11^h und 12^h Nachts lauwarmer Südwind erhob, der von einem kurzen Gewitter bei deutlich vernehmbarem Donner und hell aufleuchtenden Blitzen begleitet war. Von anderer Seite (so heisst es in dieser Notiz) wird gemeldet, dass zur selben Zeit in südlicher Richtung ein Meteor niedergegangen sei. Aus Crummöls wird gemeldet, dass gegen 12^h der ganze Himmel in intensivem Lichte so stark erstrahlte, dass man die Augen schliessen musste.

9. Liegnitz (33° 45'3, 50° 57'5). Man will hier mehrere Blitze gesehen haben, denen laut hörbarer Donner gefolgt sein soll (Niederschles. Anzeiger).

10. Hirschberg (33° 24'1, 50° 54'3). Nach einer ausführlichen Mittheilung des Herrn Prof. Reimann an den Herrn Director Dr. Galle wurde hier das Meteor um 11^h 53^m M. e. Z. von dem Secundaner Thomas beobachtet. Dieser befand sich auf der Schützenstrasse, als plötzlich alles von bläulich-weissem, dem elektrischen ähnlichen Lichte hell wie am Tage erleuchtet wurde. Beim Aufblicken sah er die Kugel hoch am Himmel, konnte aber nur mehr ein sehr kurzes Bahnstück beobachten. Ein Zerspringen hat er nicht bemerkt, obwohl er, wie ausdrücklich versichert wird, den wirklichen Endpunkt der Bahn gesehen hat, welcher hoch über den niedrigen Häusern der

Umgebung gelegen war. Auch Donner hat er nicht gehört, da er auf denselben nicht geachtet hat und nach der Erscheinung in sein nahe gelegenes Haus gegangen ist.

Der Beobachter konnte die Lage des Endpunktes nach der Umgebung, sowie auch die Richtung der Bewegung, welche von rechts nach links abfallend erfolgte, soweit sicherstellen, dass er im Stande war, unter Anleitung des Herrn Prof. Reimann mit einem Meteoroskop die nöthigen Messungen vorzunehmen. Diese fanden allerdings erst nach einer Woche statt und ergaben für den ersten Punkt der Wahrnehmung $A = 43°$, $h = 58°$, für das Ende (Erlöschen) $A = 39°$, $h = 56°$. D: 4ˢ. Wie Herr Prof. Reimann erwähnte, war das Licht so intensiv, dass es selbst in einem erleuchteten Ballsaale wie ein greller Blitz bemerkt wurde.

11. Hermsdorf (33° 18'7, 50° 50'8). Herr Ziegeleibesitzer Kirstein wurde auf der Strasse von einem mächtigen elektrischen Leuchten gefesselt, welches etwa 3ˢ anhielt und welchem nach 2—3 Minuten von Süden her, als von den »Schneegruben« kommend, ferner Donner folgte (Mittheilung des Herrn Prof. E. Reimann). Die Agnetendorfer Schneegruben im Riesengebirge liegen aus Hermsdorf ungefähr 30° westlich von Süd.

12. Erdmannsdorf (33° 26'7, 50° 50'5), $11^h 52^m$. Mehrere Personen, welche im Schlitten auf der Rückfahrt von Krummhübel nach Hirschberg begriffen waren, sahen sich plötzlich von einem wunderbaren Glanze umgeben, der nach 2ˢ wieder erloschen war. Die Ursache blieb unerklärlich (Hirschberger Tageblatt). Die Erscheinung lag offenbar hinter dem Rücken der Beobachter.

13. Schmiedeberg (33° 30', 50° 48'). »Um $11^h 52^m$ wurde von mehreren meiner Freunde ein Blitzstrahl colossaler Lichtstärke bemerkt, doch ohne nachfolgendem Donner« (Herr C. Kiersch).

14. Landeshut (33° 42', 50° 47'). Um $11^h 52^m$ wurde hier ein ausserordentlich grosses Meteor beobachtet, welches den Marktplatz taghell grell weiss erleuchtete und nach etwa 2ˢ unter (?) sehr starker Detonation zersprang. Es bewegte sich vom »Grossen Bären« abwärts zum östlichen Horizonte (Mit-

theilung des Herrn C. Kiersch). Ohne Zweifel ist jedoch die ganze Bahn auf der Westseite des Beobachtungsortes gelegen gewesen. Vermuthlich wurde Cassiopeia mit dem Grossen Bären verwechselt.

15. Michelsdorf (33° 35′, 50° 43′). $11^h 30^m$ Abends tauchte plötzlich taghelles Licht auf. Das Meteor hatte die Grösse der Mondscheibe, und man sah dann viele verschiedenfarbige kleine Feuerkugeln herabfallen (Liebauer Wochenblatt).

Das Meteor wurde ferner in bläulichweissem Lichte auch zu Weissholz (bei Glogau) und Quolsdorf (Kreis Bolkenhain) gesehen. Nach Nr. 45 der »Breslauer Zeitung« sollen in der Haynauer und Grünberger Gegend Detonationen gehört worden sein, so dass man an ein Wintergewitter dachte. In Breslau hat Herr Dr. Hesemann nur eine sehr grelle Erleuchtung des »ganz bedeckten Himmels« gesehen, da er nach N gewendet war. Detonationen wurden dort nicht vernommen.

Böhmen und Mähren.

16. Karolinenthal bei Hainspach (31° 57′5, 51° 0′). Herr Gendarmerie-Postenführer F. Jordan theilte mir mit, dass es ihm schien als wenn am Himmel ein Gegenstand explodirt wäre, wobei ein grell nach allen Richtungen weithin strahlendes Licht entstand, das zuletzt nachliess und sich nach unten senkte. Dies geschah gerade in der Richtung über dem Monde, wo eben auch die Bewölkung durchbrochen war. In einer Skizze ist dieser Punkt ungefähr $^1/_2$° südlich vom Mondcentrum und nicht sehr hoch über demselben gezeichnet. Die ganze Dauer betrug einige Secunden. Da der Beobachter aber zuerst gegen W sah, konnte er über die Bahn des Meteors keine Auskunft ertheilen.

Da der Endpunkt des zweiten Meteors nicht sehr weit von Hainspach und ungefähr auch nach der Richtung gegen den Mond zu gelegen war, könnte möglicherweise auch jenes gemeint sein. Allein der Explosionspunkt desselben hätte dann in sehr grosser Höhe erscheinen müssen. Dagegen lag der Endpunkt des hier besprochenen Meteors weiter entfernt und überdies in Wirklichkeit viel tiefer, daher in geringerer schein-

baren Höhe, womit die Angabe des Beobachters besser übereinstimmt, da der Mond eben erst aufgegangen war.

17. Maffersdorf (32°45', 50°44'5). Gegen 12^h wurde von einigen Personen plötzlich ein aussergewöhnliches Licht, das mit blauweissem grossen Glanze, Firmament und Erde beleuchtete, bemerkt. Auch glaubten sie einen grossen Körper mit bedeutender Geschwindigkeit gegen E hin verschwindend zu erblicken. *D*: 2ˢ. (Deutsche Reichenberger Zeitung.)

Meine Bemühungen, nähere Aufschlüsse zu erlangen blieben lange vergeblich. Erst nach mehreren Wochen war Herr Lehrer F. Honzejk so freundlich, mir noch einige Daten zu liefern. Hiernach wurde die Feuerkugel zuerst auf der Nordostseite gesehen, wo sie in absteigender Bahn unter etwa 20° Neigung gegen die Horizontale zog. Der Beobachter glaubte ein sausendes Geräusch, sowie eine drehende Bewegung des leuchtenden Körpers, von dem sich förmliche Strahlenbündel zu lösen schienen, wahrgenommen zu haben. Die mit dem Gradbogen gemessene Höhe des Verschwindungspunktes im Osten: 8°, könnte sich nur auf das Erlöschen einzelner solcher Theile bezogen haben.

18. Ober-Adersbach (33°45'5, 50°37'3). Die Herren Russ und Mahler, Organe der k. k. Finanzwache berichteten an die Wiener-Sternwarte, dass sie etwa um 11^h55^m plötzlich einen grellen Lichtschein gleich dem Effecte elektrischer Bogenlampen während 5ˢ in der Nähe des »Kleinen Bären« bemerkten. Es war ein leuchtender Halbkreis mit röthlich auslaufenden Enden, der sich einmal beiläufig um seine Axe drehte, etwas senkte und plötzlich verschwand. Um nähere Mittheilungen angegangen, lieferten mir die Beobachter noch folgende Angaben: Der Endpunkt lag, nach Einzeichnung in die Specialkarte, in 100° Azimut und (nach Messung mit dem Gradbogen) 54° hoch. Die beigefügte Bemerkung: »Die Erscheinung wurde in westlicher Richtung wahrgenommen und zwar unterhalb des »Kleinen Bären« stimmt im ersten Theile mit diesen Messungsergebnissen wohl überein, allein das genannte Sternbild stand auf der Ostseite. Wahrscheinlich hat auch hier eine Verwechslung mit der Cassiopeia stattgefunden. Es wird ferner versichert, dass während oder nach der Erscheinung nicht das

geringste Geräusch, weder donnerartiges Getöse, noch Zischen oder Knistern zu vernehmen war.

Die erwähnte räthselhafte Drehung der Lichterscheinung liess mir es zuerst als möglich erscheinen, dass der Fall in so grosser Nähe war, um etwaige Drehbewegungen eines einzelnen sich senkenden Stückes wahrzunehmen. Allein die nähere Erwägung aller Umstände in Verbindung mit der beigefügten Skizze gestattet kaum eine andere Deutung, als dass die Beobachter das Bogenstück einer auf- und wieder absteigenden Bahn und möglicherweise die im Anfange etwas erheblicher gekrümmte Falllinie nach der Hemmung gesehen haben.

19. Ober-Wekelsdorf (33°50′, 50°36′). Einer Mittheilung des Nachtwächters J. Dinter an die Wiener Sternwarte und einigen mir gelieferten Ergänzungen ist Folgendes zu entnehmen: Nachdem der Beobachter die Ursache der plötzlichen »schreckenerregenden« grellen Beleuchtung vergeblich um sich auf der Erde gesucht hatte, blickte er gegen den Himmel auf und »da stand ein hellleuchtender, grosser Stern, gerade ober mir. Als er verschwand, fiel ein kurzer Strahl gegen Nieder-Adersbach« (Azimut 108°). Woher der Stern gekommen, hatte er nicht gesehen. »Nach der Erscheinung war ein heftiger Donner in der Richtung gegen Nieder-Adersbach zu hören«.

Da Ober-Wekelsdorf nicht weit von Ober-Adersbach liegt, von wo durch zwei Zeugen (Nr. 18) die Detonationen auf das Bestimmteste in Abrede gestellt wurden, hat man hier wieder ein lehrreiches Beispiel widersprechender Angaben.

20. Arnau (33°23'5, 50°32'5). Etwa $11^h 55^m$ wurde hier ein etwa 4^s dauernder blassgrüner Lichteffect bemerkt, der von einem Meteor herrühren mochte, da sich derselbe über den ganzen Ringplatz ergoss. (Trautenauer Wochenblatt). Von Detonationen ist nicht die Rede.

21. Neustadtl nächst Neuschloss bei Arnau (33°24'2, 50° 31'2). Von hier lieferte Herr Stud. phil. Herm. Pesta einen sehr ausführlichen Bericht an den Herrn Sternwarte-Director Prof. Dr. J. G. Galle in Breslau.

Er befand sich mit anderen Personen im Freien, als vor 12^h »begleitet von Zischen und Rasseln ein überwältigendes Licht unsere Köpfe aufwärts drehte«. Das Geräusch war dem

beim Einschalten einer Bogenlampe ähnlich, die Stärke des Lichtes war schwer zu beschreiben. »Den feurigen Ball glaubte man einige Meter über uns greifen zu können. Alles das mag wohl nicht mehr als 2ˢ gedauert haben, worauf der Körper in kleine Stücke mit unvergleichlich schwächerem gelben Lichte zerstob, im Gegensatze zum ursprünglichen, welches genau die Färbung einer elektrischen Bogenlampe hatte. In diesem Contraste erschienen diese Kugeln fast roth«.

Nach $2^1/_2$ Minuten begann ein etwa 30ˢ dauernder, rollender Donner, dass die Leute aus den Häusern kamen, obgleich es Mitternacht war. »Die Richtung des Meteors zu bestimmen, fällt schwer. Von NW nach SE dürfte am nächsten kommen. Gleichzeitig war aber ein Neigungswinkel der Bahn zum Horizonte von etwa 20—30°«.

Später folgten noch nachträgliche Aufklärungen mit einer beiläufigen Skizze. In dieser ist der Endpunkt ziemlich genau nördlich vom Standpunkte des Beobachters bezeichnet. Die Zenithdistanz desselben wurde vom Beobachter auf kaum 8—10° geschätzt. Die Zahl der einzelnen Stücke, in welche sich der Körper anscheinend auflöste, dürfte ungefähr 6—7 betragen haben.

Es sind auch noch Wahrnehmungen Anderer mitgetheilt. Der Nachtwächter des Schlosses behauptet, einen furchtbaren Windstoss verspürt zu haben. Ein Kutscher meinte, er hätte das Meteor in die Bäume des Waldes fallen, und diese davon erschüttert, gesehen.[1]

Wichtig ist aber noch folgende Angabe des Herrn Pesta: Ein Diener stand mit dem Gesichte gegen Arnau gewendet, in jenem Theile der Dorfstrasse, welche »direct von Süd nach

[1] Es herrschte um diese Zeit auch anderwärts ziemlich heftiger Wind. Übrigens hat Herr Director Dr. Galle sofort zu näheren Nachforschungen aufgefordert, und dieses ist auch meinerseits geschehen. Auch der Director am k. u. k. naturhistorischen Hofmuseum, Herr Dr. A. Brezina, hat in dieser Gegend Erkundigungen eingezogen. Ich habe über die Resultate derselben nichts mehr gehört und sie auch deshalb nicht weiter verfolgt, weil ich durch die Analyse des gesammten Beobachtungsmateriales zu dem Schlusse gelangt bin, dass der Hemmungspunkt denn doch nicht so nahe an Arnau gelegen sein konnte, als es nach diesen Mittheilungen den Anschein hatte.

Nord« geht. Er sah das Meteor nicht, wohl aber den Schatten der Häuser, der ungefähr in der halben Breite der Strasse begann und in rascher Bewegung sich gegen die linke (westliche) Häuserreihe bis zu etwa 2—3 *m* verschmälerte, worauf wieder Finsterniss eintrat.

Wenn diese letztere Beobachtung genau ist, so erweist sie, dass das Meteor auf der Westseite erloschen ist, und dass auch auf dieser Seite die leuchtende Bahn lag, welche, wegen der abnehmenden Schattenbreite, hier eine scheinbar aufsteigende gewesen sein musste.

22. Zdarek bei Hronov (33° 54'5, 50° 28'3). Um $11^1/_2{}^h$ sahen die Beobachter eine grosse Kugel, welche sich in 20° Höhe (gemessen) von NW gegen SE bewegte. Jene standen in einem engen Thale, so dass die Aussicht beschränkt war. Aus der Einzeichnung in die Karte kann man jedoch für den Endpunkt ungefähr $A = 122°$ annehmen. D: 5—6^s. Über die Lichtstärke berichten die Beobachter: In Roth-Kosteletz war die ganze Stadt so grell beleuchtet, dass man selbst den kleinsten Gegenstand hätte finden können, und in Zdarek wurden durch das Licht Schlafende geweckt und Wachende erschraken, dass sie kein Wort sprechen konnten. Donner ist nicht vernommen worden. (Die Herren J. Brandl und J. Zalabák, Oberaufseher der k. k. Finanzwache.)

23. Josefsthal-Cosmanos (32° 30'5, 50° 27'5). Herr A. Ebert sah nur das Erlöschen des Meteors in Nordost. Voraus ging ein greller Lichteffect von 4—5^s Dauer.

24. Chlumetz a. d. Cidlina (33° 8', 50° 9'). An die Wiener Sternwarte berichtete Frau Olga Böhringer, dass sie kurz vor Mitternacht das Meteor in wagrechter Bahn nach N sich bewegen gesehen hatte. Um die scheinbare Höhe dieser Bahn festzustellen, ersuchte ich die Beobachterin, dieselbe in einer bestimmten Abendstunde zwischen die zu dieser Zeit in der betreffenden Gegend des Himmels erscheinenden Sterne einzutragen. Dies geschah ungefähr um 6 Uhr in Bezug auf den »Grossen Bären«. Hieraus ergab sich eine Höhe von 27°. Hinzugefügt wurde, dass der Feuerball von gelblicher Farbe war und die Umgebung aufs grellste beleuchtete. Doch war der Himmel »ziemlich bewölkt«, so dass nur ein kurzes Bahn-

stück verfolgt werden konnte, welches auch in der Skizze wagrecht, von links nach rechts, eingetragen ist.

25. Mähr.-Schönberg (34° 38′, 49° 58′). Herr C. Ruprecht sah das Meteor in Form eines von rechts nach links abfallenden, langen, glühenden, rasch vergänglichen Streifen, dessen unteres Ende viel dicker war, als das obere. An dem ersteren löste sich die Feuerkugel in kleinere Theile auf. Die scheinbare Neigung gegen den Horizont wäre nach einer allerdings nur sehr flüchtigen Skizze zu 44° anzunehmen. Die Höhen für das obere und untere Ende wurden mit dem Gradbogen zu 20° und 13° gemessen. Über die Azimute konnte der Beobachter keine bestimmte Angabe machen. Die Mittheilung, dass das Meteor in der Richtung gegen Altstadt hin (fast Nord) sichtbar war, kann nur auf einem sehr erheblichen Orientirungsfehler beruhen. Diese Richtung wurde übrigens nicht von dem Standpunkte der Beobachtung abgeschätzt.

26. Brünn (34° 16′, 49° 12′). *a)* Herr Rectorats-Secretär, kais. Rath H. Plch hat um 11^h59^m mittl. Br. Z. die Feuerkugel aus dem Hoffenster seiner Amtswohnung im Gebäude der k. k. technischen Hochschule hinter dem Dache des Mitteltractes eben verschwinden sehen. Nach seinen mit grosser Sicherheit gemachten Angaben habe ich für diesen Punkt $A = 159°$, $h = 16°$ gemessen. Die Grösse schien etwa mit der Hälfte des Mondes vergleichbar. *b)* Herr C. Kutschera, welcher sich auf dem Getreidemarkte befand, gibt die Zeit $11^h 58^m$ an. Das Meteor, welches zuletzt fast von Mondgrösse war, schien ganz senkrecht herab zu fallen und zwar nach den Messungen, welche ich selbst mit ihm vorgenommen habe, in $A = 154°$ aus 21° Höhe. Es verschwand zuletzt hinter den entfernten Dächern, welche die Aussicht in ungefähr 9° Höhe beschränken. *D*: 2ˢ.

Eine auffallende Erhellung der Umgebung will Herr Kutschera nicht bemerkt haben. Der Himmel war theilweise bewölkt.

Ausser diesen Beobachtungen liegen aus Böhmen und Mähren noch einige ganz unbestimmte Wahrnehmungen vor, von welchen sich kaum sicherstellen lässt, auf welches Meteor sie sich beziehen, weshalb sie als belanglos wegbleiben können.

Erwähnenswerth wären etwa anhangsweise noch die beiden folgenden Mittheilungen.

In Gablonz in Böhmen (32°49'5, 50°43'5) hat Herr Mischek etwa um $11^h 55^m$ ein helles Meteor gesehen, über welches er wegen der starken Bewölkung nichts Näheres angeben konnte, doch habe er, wie er mittheilt, nach ungefähr $1^1/_2$ Minuten fernes, dumpfes Donnerrollen, wie bei einem Gewitter, vernommen. In Deschney, östlich von Neustadt a. d. Mettau, wurde von dem Herrn Dechant W. Erychleb in der betreffenden Nacht »Wetterleuchten und entfernter Donner kurz vor Mitternacht« wahrgenommen und als Gewitter in das Beobachtungsregister eingetragen. (Mittheilung der k. k. Centralanstalt für Meteorologie etc. in Wien.)

Für die Zeit des Falles nehme ich das Mittel aus den beiden gewiss recht sicheren Brünner-Angaben, nämlich 1895, Jänner 16., $11^h 58 \cdot 5^m$ mittl. Brünner Zeit oder $10^h 52^m$ mittl. Greenw. Zeit. Dieses stimmt auch mit den offenbar in mitteleuropäischer Zeit ausgedrückten Angaben aus Glogau, Hirschberg, Erdmannsdorf und Schmiedeberg recht gut überein.

Hemmungspunkt. Hirschberg und Neustadtl bei Arnau liegen sehr nahe im selben Meridian. Wenn in Neustadtl der Endpunkt mehr oder weniger genau nördlich zu liegen schien, so konnte er aus Hirschberg nicht ungefähr in Südwest erscheinen ($A = 39°$). Diese letztere Angabe findet Bestätigung durch das Azimut aus Steinau (45°—47°). Ich denke, dass dieser Widerspruch zu gross ist, um durch eine Ausgleichung beseitigt zu werden. Man wird sich demnach für die eine oder andere Beobachtung entscheiden müssen.

Hinsichtlich der Art der Feststellung muss die Angabe aus Hirschberg ungleich sicherer erscheinen, als jene aus Neustadtl. Nach der ausdrücklichen Bemerkung des Herrn Prof. Reimann, hat sich dort der Beobachter sogleich nach Sternen und Gebäuden orientirt, und die Position ist eingemessen worden. Dagegen erklärte der Beobachter aus Neustadtl selbst, dass es ihm schwer falle, bestimmte Angaben zu liefern. Überdies ergibt auch die Mittheilung des Dieners (siehe den Schluss unter Nr. 21) über die Lage des Schattens beim

Erlöschen, in Übereinstimmung mit der Hirschberger Beobachtung eine mehr westliche Lage des Endpunktes.

Auf schlesischer Seite würde allein die Wahrnehmung aus Ober-Dammer (4) einen weiter südlich von Hirschberg gelegenen Punkt andeuten, wenn man die Richtung über Liegnitz in diesem Sinne gelten lassen wollte. Es kann aber damit, wie dies gewöhnlich der Fall ist, ebensogut auch die Bewegungsrichtung gemeint gewesen sein und dann steht auch diese Beobachtung mit jener aus Hirschberg im Einklange. Die Angabe aus Mondschütz (7) würde diesen Punkt sogar noch viel weiter nach Westen verlegen.

Würde man sich aber, mit Rücksicht auf alle diese Umstände, zu Gunsten der Hirschberger Beobachtung entscheiden, so wäre die Annahme, dass der Endpunkt in der Nähe von Arnau sich befunden hatte, nicht aufrecht zu erhalten. Es entsteht also noch die Frage, wie sich die übrigen Wahrnehmungen zu dieser Annahme in Beziehung bringen lassen.

Man glaubte in Neustadtl nicht allein Detonationen, sondern auch ein eigenthümliches »Zischen und Rasseln« vernommen zu haben. Auch wurde die Zenithdistanz beim Erlöschen auf nur 8° bis 10° geschätzt. Ausdrücklich wird jedoch bemerkt, dass jenes Geräusch zugleich mit dem grellen Lichte aufgetreten sei, während die einzelnen Theile die Leuchtkraft sehr schnell verloren hatten. In der That sind die eigentlichen Detonationen auch erst $2^1/_2$ Minuten nach dem Erlöschen gehört worden und es wäre nicht recht erklärlich, warum es sich mit anderen Schallwahrnehmungen nicht ebenso verhalten haben sollte. Endlich ist nicht zu übersehen, dass auch von anderen Orten, z. B. aus Maffersdorf (17) Ähnliches gemeldet wird. Angaben über derartige Geräusche, welche noch vor oder zugleich mit der Hemmung und dem Erlöschen vernommen worden sein sollen, haben bei mir stets die allergrössten Zweifel erweckt, obwohl sie fast keiner grösseren Beobachtungssammlung fehlen.

In der Regel ist die unbewusste Täuschung so zu sagen handgreiflich, wie z. B., wenn ein Beobachter in der Nähe von Wien ein Meteor, welches über Bosnien, Dalmatien und Süditalien hingezogen ist, »zischen und sausen« hört u. s. w.

Die in der Mittheilung aus Neuschloss angeführten Schallwahrnehmungen nöthigen daher n i c h t zur Annahme, dass der Fall in unmittelbarer Nähe stattgefunden hat. Was aber die sehr grosse scheinbare Höhe betrifft, so ist es bekannt, dass in dieser Hinsicht bedeutende Überschätzungen zur Regel gehören. Höhen von 60° werden zumeist schon für das Zenit genommen. Die schon mehrmals erwähnte Angabe des Dieners über die Schattenlänge von 2—3 *m* beim Erlöschen, bestätigt ebenfalls die Vermuthung, dass letzteres nicht ganz nahe am Zenit stattgefunden hat, wenn man die Häuser von solcher Höhe annimmt, wie sie in Dörfern die gewöhnliche ist.

Auf Grund dieser Erwägungen habe ich mich entschlossen, die angegebenen Richtungen aus Hirschberg und Steinau für die Ermittlung der Lage des Hemmungspunktes zu benützen. Es wurden zu diesem Zwecke daher folgende Azimute, und zwar gleichgewichtig in Rechnung gebracht: Steinau 45°, Hirschberg 39°, Karolinenthal 283°8, Adersbach 100°, Wekelsdorf 108°, Zdárek 122°, Brünn 159°. Die letztere Beobachtung entspricht zwar nicht dem Endpunkte, sondern dem Verschwinden hinter dem Dache. Da aber die Bahn hier als senkrecht bezeichnet wurde, so ist die Angabe verwendbar. Die Zahl entspricht der Beobachtung *a)*, welche sich auf gute Festmarken stützte.

Aus diesen sieben Beobachtungen habe ich für die L a g e d e s H e m m u n g s p u n k t e s erhalten:

Länge, östl. v. F. . . . . 33° 11'5±3'0 oder 3·4 *km* m. F.
Nördl. Breite . . . . 50° 44'7±1'2 oder 2·2 m. F.

Dieser Endpunkt liegt auf den Höhen des Riesengebirges nördlich von Starkenbach in der Einsattlung zwischen der grossen Kesselkoppe und dem Vogelberg.

Die Verbesserungen (berechnet—beobachtet) sind:

	ΔA
Hirschberg	—0°8
Steinau	—4·9
Hainspach	+3·7
Adersbach	+8·3

	ΔA
Wekelsdorf	+1·3
Zdárek	—1·1
Brünn	—2·7.

Der mittlere Fehler eines beobachteten Azimutes stellt sich auf ±4°9, d. i. ziemlich gross, weil für die Mehrzahl der Beobachtungsorte der Endpunkt recht hoch lag. Der mittlere Fehler im Bogen, $\Delta A \cos h$ wird nur ±3°8.

Ich habe auch versucht, noch drei andere beiläufige Beobachtungen (nach den Weltgegenden) einzubeziehen, nämlich jene aus Maffersdorf (E), Kosmanos (NE) und Chlumetz (N), jede mit dem Gewicht $^1/_4$, weil man derartigen Angaben zumeist kaum eine grössere Bestimmtheit, als bis auf etwa 8—10° zutrauen kann. Das Resultat wird aber dadurch gar nicht merklich geändert, denn man erhält damit den Endpunkt in 33° 11'1 Länge und 50° 44'8 Breite. Ich habe daher den früher bestimmten Punkt beibehalten, welcher auch jenen drei Angaben gut genug entspricht, denn er erscheint in Maffersdorf $A = 270°$, in Kosmanos $A = 236°8$ und in Chlumetz $A = 183°5$.

Es sei auch noch bemerkt, dass ein Ausgleich der grossen Widersprüche zwischen den Beobachtungen in Hirschberg und Neustadtl den Hemmungspunkt 10—12 *km* weiter südöstlich, etwa über die Gegend der »Lahrbauden« auf dem Brunnberge verlegen würde. Für die Ermittlung des scheinbaren Radianten wäre diese Alternative unerheblich, doch würde die ganze Bahn in Bezug auf die Erde mehr gegen Osten gerückt.

Die vier sichersten, durch Messung oder Beziehung auf Sterne erhaltenen Beobachtungen zur Bestimmung der linearen Höhe sind jene von Steinau, Hirschberg, Schönberg und Chlumetz.

Im Folgenden sind die einzelnen Angaben und Resultate dieser Beobachtungen dargestellt.

	Scheinbare Höhe (h)	Entfernung des Endpunktes (D)	Höhe des Endpunktes
Steinau	20°	97·8 *km*	36·3 *km*
Hirschberg	56	22·6	33·5
Schönberg	12	134·4	30·0
Chlumetz	27	66·3	34·2

Das einfache Mittel ist 33·5 *km* ± 2·6 *km* m. F.

Wenn man die beobachteten Höhen als gleichgewichtig betrachten kann, so entspricht dieses Mittel allerdings nicht genau dem wahrscheinlichsten Werthe. Abgesehen von der Unsicherheit in D, welche ohne Belang ist, müssten dann die einzelnen Resultate Gewichte erhalten proportional: $\frac{\cos^4 h}{D^2}$. Allein es bleibt meistens zweifelhaft, ob man gut thut, dieses Verfahren anzuwenden, da bei Messungen, welche erst nach längerer Zeit auf Grund der Erinnerung vorgenommen werden, die Punkte in der Nähe des Horizontes auch hinsichtlich der Höhe in der Regel sicherer bestimmt werden können, als die dem Zenith näher gelegenen. Übrigens würde man auf diese Weise in unserem Falle schliesslich 33·8 *km* für die Hemmungshöhe erhalten Der Unterschied ist also ganz unbeträchtlich.

Ausser den hier benützten liegen noch Höhenangaben aus Sprottau, Adersbach und Zdárek vor. Die erste beruht nur auf Schätzung, die beiden anderen sind allerdings, aber doch sehr verspätet, durch Messungen erhalten und ihre Resultate stehen gegen einander in erheblichem Widerspruche, wie die folgende Zusammenstellung zeigt:

	Scheinbare Höhe (h)	Entfernung des Endpunktes (D)	Höhe des Endpunktes
Sprottau	22°5	91·5 *km*	38·5 *km*
Adersbach	54	41·9	57·8
Zdárek	20	58·6	21·6

Bei gleichgewichtiger Zuziehung dieser drei Werthe würde das Mittel für die Höhe 36·0 *km* betragen. Ich habe jedoch den weiteren Betrachtungen die früher ermittelte Grösse 33·5 *km* zu Grunde gelegt. Es ergeben sich dann folgende Verbesserungen (berechnet—beobachtet):

	dh
Steinau	—1°5
Hirschberg	0·0
Schönberg	+1·1
Chlumetz	—0·4

und für die ausgeschlossenen Angaben:

	dh
Sprottau	$-\ 2^\circ 7$
Adersbach	$-15 \cdot 5$
Zdárek	$+10 \cdot 4$.

Der mittlere Fehler einer scheinbaren Höhe würde in der ersten Gruppe nur $\pm 1^\circ 1$ betragen, dagegen mit Einbeziehung der zweiten sich bis $\pm 7^\circ 6$ steigern.

Für Brünn wäre die berechnete scheinbare (bei $33 \cdot 5$ *km* wirklicher) Höhe des Endpunktes $9^\circ 3$, während der Beobachter bis ungefähr 9° herab eine Auflösung nicht bemerkt hat. Die Differenz ist somit ganz unbeträchtlich.

Radiationspunkt. Die beiden wichtigsten Beobachtungen für diese Bestimmung sind jene von Brünn und Chlumetz, weil von den beiden scheinbaren Bahnen die eine fast senkrecht, die andere wagrecht war, woraus ein sehr günstiger Schnitt hervorgeht. Da das Azimut des berechneten Endpunktes für Brünn $156^\circ 3$ beträgt, während Herr Kutschera den Anfang in $A = 154^\circ$, $h = 21^\circ$ angab, so ist zu ersehen, dass eine merkliche Abweichung vom scheinbaren senkrechten Falle wirklich nicht stattgefunden hat.

In Chlumetz erschien das Ende in $A = 183^\circ 5$, $h = 26^\circ 6$. Nach der Angabe, dass die kurze Bahn horizontal erschien, müsste ihr Knoten am Horizonte in $A = 273^\circ 5$ gewesen sein. In dieser Form ist die Beobachtung auch in Rechnung gebracht worden.

Für Hirschberg sind die beiden angegebenen Punkte unverändert benützt worden, denn die bezeichnete Bahn (kaum 3°) ist so kurz, dass die geringsten Änderungen merkliche Richtungsabweichungen im Gefolge hätten. Benützbar wären noch die Neigungsangaben in Schönberg und Maffersdorf. Sie weichen jedoch, wie schon ein graphischer Versuch zeigt, im entgegengesetzten Sinne sehr stark ab und sind vorerst nicht berücksichtigt worden. Die wenigen übrigen Angaben, welche über Lage und Richtung der Bahn noch vorliegen, sind theils zu unbestimmt, theils in sich zu sehr widersprechend, um sie erfolgreich verwenden zu können.

Die vorhin erwähnten scheinbaren Bahnen sind:

	I		II	
	α	δ	α	δ
Brünn	340°3	+55°0	330°3	+45°5
Chlumetz	201·9	0·0*	285·7	+66·3
Hirschberg	91·5	+24·4	92·7	+21·7
Maffersdorf	158·6	0·0*	170·1	+34·5
Schönberg	186·7	0·0*	1·0	+35·8

Die unter I bei der Declination mit * bezeichneten Bogen geben nur die Lage, nicht aber den Punkt der ersten Beobachtung.

Aus den ersten drei Bahnen ergibt sich nun die Lage des scheinbaren Radianten in As. R. . . . 341°1, Decl. . . . +56°4.

Die Verbesserungen am Punkt I (normaler Abstand desselben von der berechneten Bahn) sind in

Brünn .... —0°5
Hirschberg .... +0·2.

In Chlumetz ist die Verbesserung der Neigung nur +0°1.

Da diese Abweichungen äusserst geringfügig sind, wird auch der rechnungsmässige mittlere Fehler des obigen Resultats sehr klein, nämlich ±0°8 in Rectascension und ±0°4 in Declination. Diese Fehlerschätzung hat jedoch selbstverständlich nur sehr geringes Gewicht, da nur eine einzige überschüssige Beobachtung vorliegt.

Werden auch die beiden letzten Beobachtungen (Maffersdorf und Schönberg) mit den Gewichten $^1/_4$ einbezogen, so wird die Position des scheinbaren Radianten $\alpha = 341°5$, $\delta = 57°0$. Der Unterschied von dem früheren Resultat ist gering, aber die Verbesserung der scheinbaren Neigungen, welche diese beiden Beobachtungen angeben, wird sehr beträchtlich, nämlich für

Maffersdorf .... +15°2
Schönberg .... —16·5.

Mit dieser Einbeziehung würde der mittlere Fehler einer Beobachtung auf sehr nahe $\pm 13°$ anwachsen, welches ein ungewöhnlich grosser Betrag ist. Es erweisen sich daher nur die ersten drei Bahnen als brauchbar und wird dementsprechend das erstere Resultat für den Radiationspunkt beibehalten.

Aus diesem ergibt sich dann, dass das Meteor aus 154°0 Azimut und mit einer Bahnneigung von 23°8 zum Endpunkte gelangt ist.

Verfolgt man die so berechnete Projection der Bahn auf die Erdoberfläche nach rückwärts, so findet man, dass sie knapp westlich an Friedeberg vorbei, über Holzkirch bei Lauban, über Ober-Bielau, zwischen Görlitz und Bunzlau, etwa 2 *km* NE von Priebus a. d. Neisse, ebensoviel NE von Pinnov bei Guben, über Mixdorf, 2 *km* W von Briesen zwischen Frankfurt a. O. und Fürstenwalde, über Dahmsdorf bei Müncheberg, Eberswalde und dem Leuchtthurm am Darsser-Ort an der Ostsee ging.

In dieser Bahn wurde die Feuerkugel möglicherweise am frühesten von dem Herrn Kutschera in Brünn gesehen, da die von ihm bezeichnete erste Position sehr nahe am Radiationspunkte liegt. Aus diesem Grunde lässt sich aber die entsprechende Bahnlänge durch diese Beobachtung nicht bestimmen. Dagegen kann man mit einiger Sicherheit schliessen, dass das Meteor, als es aus Altenflies (1) westlich bemerkt wurde, 155 *km* oder etwa 21 geogr. Meilen hoch, über der Gegend von Eberswalde und 286 *km* vom Endpunkte entfernt war.

Geschwindigkeit. Die Angaben über die Dauer sind allerdings zahlreich; allein mit Ausnahme der zweiten Beobachtung in Brünn lässt sich nirgends mit einiger Sicherheit nachweisen, auf welche Bahnstrecke die Zeitschätzung sich bezieht. Bei mehreren ist auch ausdrücklich die Dauer des Lichteffectes im Allgemeinen bezeichnet. Wie schon erwähnt, ist aber die der zweiten Brünner Beobachtung entsprechende Strecke aus geometrischen Gründen so gut wie unbestimmbar. Selbst wenn man annimmt, dass Herr Kutschera das Meteor nicht schon in 21° Höhe, sondern erst ungefähr dort erblickt hat, wo es in der ersten Beobachtung (a) in 16° hinter dem

Dache verschwand, ergibt sich für diese Phase ein Punkt, etwa 124·5 *km* über der Gegend von Briesen und 216 *km* vom Ende entfernt. Zwar hat auch dieser Beobachter die Bahn nicht bis zum Ende verfolgen können, aber, wie die Rechnung zeigt, musste die Auflösung der Feuerkugel sehr bald nachdem sie seinem Blicke entzogen war, erfolgt sein. Mit der Dauerangabe von 2^s verglichen, würde daraus eine Geschwindigkeit von mehr als 100 *km* hervorgehen, ein jedenfalls sehr unverlässliches Resultat.

Auch die Beziehung des Mittels aller Dauerschätzungen würde meines Erachtens auf diese Strecke kaum zu rechtfertigen sein, weil es unwahrscheinlich ist, dass das Meteor auch nur von der Mehrzahl der Beobachter in dieser langen Bahn gesehen wurde. Man kann jedoch annehmen, dass dies aber doch wohl in jenem Theile des Laufes der Feuerkugel der Fall war, da eine intensivere Lichtentwicklung stattgefunden hatte. Dieser Theil der Bahn könnte ungefähr der Länge des in Schönberg angegebenen Lichtstreifens entsprechen. Dieselbe kann aus der gemessenen Höhe des oberen Endpunktes abgeleitet werden. Man erhält für diese Strecke, von ungefähr 75·5 *km* über der Gegend bei Priebus bis zum Endpunkte, 102 *km*. Auch die Wahrnehmung aus Sprottau, wo das Meteor in grosser Höhe beobachtet wurde, bezieht sich gewiss wenigstens auf dieselbe Länge. Überhaupt lehrt die Erfahrung, dass grosse nächtliche Meteore in einer Höhe von etwa 10 g. M. in der Regel schon eine weithin auffallende Lichtstärke entfalten. Es dürfte daher gestattet sein, zum mindesten auf diese Strecke, welche nicht viel mehr als der dritte Theil der überhaupt nachweisbaren Bahn ist, das Mittel der Dauerschätzungen zu beziehen.

Es liegen deren folgende vor:

Glogau	5—6^s	Adersbach	5^s
Hermsdorf	3	Wekelsdorf	3
Erdmannsdorf	2	Arnau	4
Landeshut	2	Neustadtl	2
Hirschberg	4	Zdárek	5—6
Haynau	3—4	Kosmanos	4—5
Maffersdorf	2	Brünn	2

Das Mittel aus diesen 14 Angaben ist 3ˢ4.

Verglichen mit der Länge von 102 *km*, gibt dieses die geocentrische Geschwindigkeit zu 30*km*. Berücksichtigt man die gewöhnliche Überschätzung der Dauer, so erscheint es nicht unwahrscheinlich, dass die Geschwindigkeit wohl auch noch wesentlich grösser gewesen sein kann.

Grösse, Lichtstärke und Farbe der Feuerkugel. Aus den beiden Berichten von Brünn (halbe und fast volle Mondgrösse) kann auf einen grossen Durchmesser der leuchtenden Sphäre geschlossen werden, doch lässt sich leider die zugehörige Entfernung nicht völlig sicherstellen. In der zweiten Beobachtung, welche fast bis zum Ende reichte, musste sie mindestens 183 *km* betragen haben, wenn nämlich auch nur angenommen wird, dass sich der Grössenvergleich auf die äusserste Annäherung bezieht. Selbst wenn man dabei nur halben Monddurchmesser nimmt, erhält man hieraus 850 *m* für den Durchmesser der Feuerkugel.

Von Glogau (Sonnengrösse) und Steinau (Mondgrösse) liegen übereinstimmende Schätzungen vor. Die Entfernungen gegen SW waren 100 *km* und 105 *km*, somit auch wenig verschieden. Für den wirklichen Durchmesser ergibt sich hieraus 960—980 *km*. In Michelsdorf, welches von dem letzten Theile der Bahn nur halb so weit entfernt lag, ist dieselbe scheinbare Grösse angegeben, woraus für die wahre kaum 500 *m* folgen würde. Berücksichtigt man aber, dass aus der Brünner Beobachtung gewissermassen nur eine untere Grenze folgt, so wird man wohl annehmen dürfen, dass der Durchmesser 900 *m* wirklich erreicht, wenn nicht überstiegen haben wird.

Die Theilung der Feuerkugel wurde mehrfach beobachtet, doch bleibt es ungewiss, ob sich die betreffenden Angaben (Sprottau, Ober-Dammer, Steinau, Mondschütz, Michelsdorf und Neustadtl) erst auf die Hemmung am Endpunkte oder schon auf eine etwas frühere Phase beziehen, was nicht selten vorkömmt. Wahrscheinlich gilt aber hier das erstere.

Die Lichtstärke war ohne Zweifel sehr bedeutend. An jenen Orten, welche dem letzteren Theile der Bahn näher gelegen waren, wird sie zumeist als überwältigend und schreckenerregend bezeichnet, wofür die vorne mitgetheilten

Berichte Zeugniss geben. Selbst noch an Orten, wie Glogau, Ober-Dammer und Breslau, welche von dem nächsten Theile der Bahn mehr als 100 *km* entfernt waren, wird die Helligkeit noch als blendend bezeichnet. Es ist daher nicht auffallend, dass das Meteor, als es etwa 113 *km* in horizontaler Entfernung westlich von Altenfliess vorbeizog, noch für einen lebhaften Blitz gehalten werden konnte, obwohl, mit Rücksicht auf die Höhe, der Abstand fast 200 *km* betragen hatte.

In Brünn, welches fast ebensoweit von dem letzten Theile der Bahn entfernt war, verbreitete sich zuletzt über die unteren benachbarten Partien des Himmels in NNW lebhafte Helligkeit, aber die Stadt wurde durch dieses Meteor nicht erleuchtet, was wohl begreiflich ist. Hierin stimmen die Aussagen beider Beobachter völlig überein.

Die Farbe des Lichtes vor der Hemmung wird ziemlich übereinstimmend als bläulich-weiss, gleich dem elektrischen Bogenlichte, bezeichnet, ausnahmsweise auch als blau und blassgrün, nur in Chlumetz als gelb. Hinsichtlich der Theile nach der Hemmung gibt Herr Pesta aus Neustadtl eine mit analogen Fällen ganz übereinstimmende Beschreibung der Änderung der Farbe und raschen Abnahme des Lichtes.

Detonationen. Aus 16 Orten liegen Meldungen über Detonationen vor, welche jedoch nicht durchweg verbürgt, ja in einzelnen Fällen (z. B. aus Altenflies) wohl mit Recht anzuzweifeln sind. Zwölf dieser Orte befinden sich auf der Seite, von welcher das Meteor gekommen ist und nur drei auf der gegenüberliegenden. Von den letzteren befanden sich zwei (Neustadtl und Wekelsdorf) sehr nahe am Endpunkte, der dritte (Deschney) ist zwar 80 *km* entfernt, die Wahrnehmung ist aber auch ganz vereinzelt. Auf der Nordseite sind die Detonationen aber noch weiterhin vernommen worden. Grünberg liegt 130 *km* vom Endpunkte. Wenn es mit den Detonationen seine Richtigkeit hatte, so dürften diese eher von einem näheren Bahntheile ausgegangen sein; allein der nächste lag noch immer 100 *km* entfernt. Zuverlässiger erscheinen mir die Angaben aus Steinau und Ober-Dammer, weil dort sogar — allerdings in geringer Übereinstimmung — die Abschätzung des Intervalles zwischen Licht und Schall versucht wurde.

Was die Angaben über dieses Zeitintervall betrifft, welche aus fünf Orten vorliegen, so stimmen die meisten innerhalb annehmbarer Grenzen mit den früheren Resultaten über die räumliche Lage des Hemmungspunktes überein, was aus nachstehender Übersicht hervorgehen dürfte, für welche die mittlere Schallgeschwindigkeit mit $^1/_3$ *km* in Rechnung gebracht wurde.

	Entfernung vom Endpunkte	Intervall zwischen Licht und Schall		
		berechnet	beobachtet	ber. — beob.
Gablonz	41 *km*	2^m 3^s	$1^1/_2{}^m$	+ 33^s
Neustadtl	43	2 9	$2^1/_2$	— 21
Hermsdorf	35	1 45	2—3	— 45
Steinau........	100	5 —	4	+ 60
Ober-Dammer ..	96	4 48	$1^1/_2$	+198

Wird die letzte, offenbar unrichtige Angabe weggelassen, so beträgt der Unterschied zwischen dem berechneten und beobachteten Intervall durchschnittlich 40^s oder 26% des mittleren Intervalls. Mehr kann von derartigen Schätzungen kaum verlangt werden. Die Abweichungen sind auch keineswegs so gesetzmässig, dass sie auf wesentlich andere Voraussetzungen hinsichtlich der Lage des Endpunktes oder der Schallfortpflanzung hindeuten. Betrachtet man bloss die Wahrnehmungen aus den drei nächstgelegenen Orten, so könnte man allerdings folgern, dass der Hemmungspunkt sogar noch etwas weiter von Neustadtl (Arnau) entfernt und näher an Gablonz, also noch ein wenig westlicher gelegen war; allein derartige Angaben können nur selten die Resultate optischer Beobachtungen verbessern.

Die in Hermsdorf (Schneegruben 30°, Endpunkt 39° Azim.) und Ober-Wekelsdorf (Niederadersbach 108°, Endpunkt 118° Azimut) bezeichneten Richtungen, aus welchen der Schall gekommen, stimmen ebenfalls ausreichend mit der vorliegenden Annahme überein, da sie ja doch nur als beiläufig zu nehmen sind.

Dass aus Hirschberg, Schmiedeberg, Adersbach und anderen ziemlich nahe gelegenen Orten keine Schallmeldungen vorliegen, ist zwar auffallend; es ist jedoch zu berücksichtigen,

dass diese Orte von der eigentlichen Schallquelle, wegen der Höhe des Hemmungspunktes, noch immer mehr als 40 *km* entfernt waren, so dass die Wahrnehmung durch Nebenumstände beeinträchtigt worden sein kann. Ähnliches kommt auch bei thatsächlich nachgewiesenen Meteoritenfällen vor, welche übrigens, aus allen Umständen zu schliessen, sehr wahrscheinlich mit der hier besprochenen Erscheinung ebenfalls verbunden waren.

Kosmische Beziehungen. Wird der vorhin ermittelte Betrag von 30 *km* für die relative Geschwindigkeit zu Grunde gelegt, so ist der störende Einfluss der Erdmasse kaum zu vernachlässigen. Um die Resultate von demselben zu befreien, ist diese Geschwindigkeit um 2·2 *km* zu vermindern und die Zenithdistanz des Radianten um 2°8 zu vermehren. Der verbesserte Ort des letzteren ist dann $\alpha = 338°4$, $\delta = +53°6$, oder 12°4 Länge und 55°6 n. Breite. Die Länge der Sonne zu 296°6 angenommen, ergibt sich die scheinbare Elongation vom Apex der Erdbewegung: 123°2. Die heliocentrische Geschwindigkeit wird ferner 50·7 *km* oder 6·83 g. M. und die wahre Elongation 153°3. Die Bahnneigung war $i = 26°1$, die Bewegung direct und der Ausgangspunkt dieser Hyperbel in 348°3 Länge und 21°1 n. Breite.

Im 54. Bande der »Monthly Notices of the Royal astron. soc.« theilt Herr Denning, S. 337, die Resultate der Bahnbestimmung einer am 25. Jänner 1894, $10^h\ 1^m$, in England vielfach beobachteten, grossen, detonirenden Feuerkugel mit. Der Himmel war, wie in unserem Falle, zumeist trüb und es waren nur wenige Sterne sichtbar. Unter 45 eingelangten Wahrnehmungen konnten nur wenige zur Bahnbestimmung benützt werden. Es scheint, dass dieselbe im Wesentlichen auf die dort mitgetheilten fünf guten Beobachtungen gegründet ist. Der Radiationspunkt ergab sich aus Denning's Ableitung in $\alpha = 331°$, $\delta = +55°$, die geocentrische Geschwindigkeit im Mittel aus 12 Schätzungen zu 18 e. M. oder etwa 29 *km*, was einer heliocentrischen Geschwindigkeit von rund 48 *km*, daher ebenfalls einer hyperbolischen Bahn entsprechen würde. Vergleicht man den (hinsichtlich der Erdstörung vermuthlich noch unverbesserten) Ort dieses Radianten mit dem scheinbaren,

direct abgeleiteten unseres Meteors vom 16. Jänner 1895, $\alpha = 341°1$, $\delta = +56°5$, so fällt schon eine beiläufige Übereinstimmung auf. In Wirklichkeit ist dieselbe noch viel grösser, wenn man den Unterschied der Knotenlängen beider Epochen und die hieraus entstehende Verschiebung des scheinbaren Radianten berücksichtigt. Selbstverständlich muss man dann für beide Fälle dieselbe Geschwindigkeit zu Grunde legen. Die Übereinstimmung der beiden Ausgangspunkte bleibt aber sehr nahe gleich, ob man nun die von Denning oder die hier abgeleitete Geschwindigkeit wählt. Naheliegend der Bestimmung Denning's ist $v = 1\cdot6$ (die Geschwindigkeit der Erde in der mittleren Entfernung von der Sonne als Einheit genommen); mit dieser ergibt sich für das Meteor vom 16. Jänner 1895 eine Hyperbel, deren Ausgangspunkt im Weltraum in 338°0 Länge und 15° n. Breite liegt, für jenes vom 25. Jänner 1894 würde aber der Ausgangspunkt in 338°0 Länge und 17° n. Breite sein.

Legt man dagegen nach unserer Bestimmung $v = 1\cdot8$ zu Grunde, so wird der Ausgangsort des ersteren Meteors 349°5 Länge und 23° Breite, jener des zweiten 349°0 Länge und 25° Breite.

Die Annahme einer identischen Geschwindigkeit für beide Meteore ist mit Rücksicht auf die weiten Fehlergrenzen der Schätzungen sicher gestattet. Unter dieser Voraussetzung ist die oben nachgewiesene Übereinstimmung — mit einer Abweichung von nur 2° — gewiss eine vortreffliche, denn man muss doch annehmen, dass jede der beiden Bahnbestimmungen für sich mit einer Unsicherheit in dieser Grösse und wohl auch darüber, behaftet ist.

Der scheinbare Radiationspunkt hat in diesem Falle eine mit wachsender Knotenlänge in Länge rückläufige Bewegung bei zunehmender Breite.

Herr Denning machte bei diesem Anlasse aufmerksam, dass die am 24. Februar 1879 im nördlichen England beobachtete[1] grosse Feuerkugel ungefähr aus $\alpha = 310°$, $\delta = +55°$ gekommen sei. Der Unterschied beträgt gegenüber dem Radianten vom 16. Jänner 1895 in Rectascension schon mehr

[1] Die näheren Umstände sind mir unbekannt.

als 30°. Da aber die zugehörigen Knotenlängen ebenfalls eine grosse Differenz, nämlich 39° zeigen und die Verschiebung qualitativ entsprechend erscheint, habe ich diese genauer untersucht.

Es zeigt sich dabei vollkommene Übereinstimmung in Rectascension, dagegen wäre die Declination um etwa 8° zu vermindern. Allerdings dürfte die von Denning für den 24. Februar angegebene Position nur als eine beiläufige anzunehmen sein.

Auch aus dem Monate December kennen wir eine Bestimmung, nämlich jene von Petit für die detonirende Feuerkugel am 24. December 1850, $6^h\,30^m$ (Comptes rendus, T. 42, p. 822 und Astron. Nachr., 1021) gestützt auf zwei vollständige, anscheinend genaue Beobachtungen. Der Radiationspunkt derselben (reducirt auf Äq. 1895): $\alpha = 0°$, $\delta = +51°2$ würde der nothwendigen Verschiebung hinsichtlich der Rectascension ganz genau entsprechen, in Declination aber etwa $5^1/_2°$ nördlicher zu nehmen sein.

Beiläufig käme auch der Radiant der Meteoriten von Weston am 14. December 1807 in Betracht, welcher, da er sehr nahe am Horizonte lag, auch aus einer einzelnen Beobachtung ungefähr abgeschätzt werden konnte. Ich habe bei einem anderen Anlasse[1] den Ort desselben in $\alpha = 357°$, $\delta = +55°$ (für 1895: $\alpha = 358°$, $\delta = +55°5$) angegeben. Hier wäre die Rectascension um einige Grade zu klein, die Declination dagegen übereinstimmend.

Ein am 3. November 1872 in England correspondirend beobachtetes Meteor (Report 1872, p. 362, zwei Beobachtungen) ergibt den Radianten $\alpha = 24°$, $\delta = +49°$. Auch dieser entspricht ungefähr den Bedingungen eines identischen kosmischen Ausgangspunktes.

Werden beispielsweise mit der Geschwindigkeit von rund $v = 2$ (für $r = 1$), also für Hyperbeln von 0·5 Halbaxe, unter Voraussetzung einer heliocentrischen Richtung beim Eintritt in das Sonnensystem aus 358° Länge und 29° n. Breite die schein-

---

[1] Niessl, Über die Periheldistanzen etc. Verh. des naturf. Vereines in Brünn. 29. Bd.

baren Radiationspunkte berechnet und mit den beobachteten verglichen, so ergibt sich nachstehendes Schema.

Radianten:

	Berechnet		Beobachtet		R.—B.	
	α	δ	α	δ	$\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$
November 3.....	23°9	43°1	24°	49°	—0°1	—5°9
December 24....	0 0	56·6	0·0	51·2	0·0	+5·4
Jänner 16.......	340·5	56·8	341·1	56·4	—0·4	+0·4
Jänner 25.......	333·7	55·0	331	55	+1·5	0·0
Februar 24......	310·4	46·9	310	55	+0·2	—8·1

Der durchschnittliche Unterschied von nahezu 4° ist für Beobachtungen solcher Art keineswegs bedeutend.

In diesen Schriften habe ich vor einiger Zeit (diese Sitzb., 102. Bd., II. a., April 1893, S. 293) ungefähr für dieselbe Geschwindigkeit einen benachbarten kosmischen Ausgangspunkt, nämlich in 351°3 Länge und 17°6 n. Breite nachgewiesen. Dieser ist mit dem oben supponirten wohl sicher nicht identisch. Bei der Vergleichung der berechneten mit den beobachteten Meteorradianten können jedoch einzelne unter den dort angeführten beiläufigen Bestimmungen der letzteren, möglicherweise für die eine oder auch für die andere Gruppe in Betracht kommen, worauf ich noch aufmerksam machen wollte.

Zur Ergänzung der Beobachtungen aus dieser Nacht sei noch die folgende angeführt, welche sich anscheinend auf ein stationäres Meteor bezieht.

In Keltschan bei Gaya (Mähren, 34° 50′, 49° 1′) beobachtete Herr M. Lang, k. k. Finanzwach-Oberaufseher, um $11^h 38^m$ durch einen Moment im Norden einen blauweiss leuchtenden, ansehnlichen Feuerball, welcher an derselben Stelle, ohne Andeutung einer Bewegungsrichtung oder Spur, wieder verschwand. Die nachträglichen Messungen ergaben dafür den Ort in 190° Azimut und 25°5 Höhe, d. i. $\alpha = 269°$, $\delta = +65°$.

Meteor vom 25. Jänner 1895.

6^h 51^m mittl. Greenwicher Zeit.

Preussisch-Schlesien.

1. Steinau (34° 5'5, 51° 25'2), 7^h 56^m. Anfang genau in S, etwas östlich von den Sternen 2, 3, 4 im Schilde des Orion, nach der Eintragung des Beobachters, Herrn Lehrers M. Pfeiffer, in $\alpha = 67°$, $\delta = +7°$. »Die Neigung der Bahn betrug gegen eine Senkrechte, von diesem Punkte zur Erde gedacht, etwa 60°, der Endpunkt lag in SW ungefähr 20—23° hoch. Helligkeit gross. *D*: 3^s. Himmel theilweise bedeckt«.

2. Breslau (34° 42′, 51° 7′). Gegen 8^h. Bewegung gegen SW gerichtet. Bahn gegen Ende ungefähr 45° zum Horizonte geneigt. Kugel intensiv grün, langer Schweif (Herr Oberingenieur Floegel).

3. Jauer (33° 52′, 51° 3′). Etwa 7^h 50^m. Blitzähnliches, aus den Wolken auftauchendes, blaugrünes Meteor, in der Richtung gegen SW niedergehend, eine reichliche Secunde sichtbar.

4. Cunnersdorf bei Hirschberg (33° 23′, 50° 53′). 7^h 50^m. Plötzliche Helligkeit, wachsend und wieder abnehmend. Ziemlich bedeckter Himmel. *D*: 2^s. Etwa 3^m darnach (doch nicht sicher) Donner. Zur selben Zeit ist auch in Maiwaldau, östlich von Hirschberg (33° 30′, 50° 54'6) Donner gehört worden (Dr. Baer).

5. Fischbach (33° 32′, 50° 51′). Gewitter in der Richtung nach der »Koppe« mit dumpfrollendem Donner (Landeshuter Stadtblatt).

6. Schmiedeberg (33° 30′, 50° 48′). 8^h 10^m. Das Meteor, fast so gross als der Vollmond, hellblau bis blendend weiss, hatte seinen scheinbaren Ausgang im Zenith, stürzte fast genau gegen SW ab und zersprang noch über dem Riesengebirgskamme in unzählige Stücke. Der Marktplatz war fast taghell erleuchtet. *D*: 8—10^s (Herr Kirsch).

7. Landeshut (33° 42′, 50° 47′). 7^h 55^m. Bewegungsrichtung NE—SW, starkes, grünes Licht. *D*: einige Secunden.

Nach etwa 3^m deutliches, kurzes donnerartiges Geräusch (Herr Thierarzt F. Arndt). Das »Landeshuter Stadtblatt« gibt

an: »Feurige Kugel von röthlichgelber Färbung in der Richtung SE—NW niedergehend und blendende Lichtfülle verbreitend. Dumpfes Donnerrollen in weiter Ferne«.

8. Waldenburg (33° 57′, 50° 46′). $7^h 50^m$. Das Meteor, welches mit grünem Lichte die Gegend mondhell beleuchtete, erschien in SW und bewegte sich gegen W in einer Höhe von 30—25°. *D*: 3^s (Herr F. Müller). Ein anderer Beobachter gibt SSW gegen W hin an (Waldenburger Wochenblatt).

9. Charlottenbrunn (34° 1′, 50° 43′5). $7^h 55^m$. Richtung NNE—SSW; hellglänzender, ungewöhnlich grosser, gelblichweisser Stern, die ganze Umgebung erleuchtend, löste sich während des Falles in drei Sternschnuppen auf. Kein Geräusch. *D*: wenige Secunden (Herr F. Loose).

10. Liebau (33° 40′, 50° 42′). $7^h 53^m$. Bewegung E—W. Kurze Zeit nachher Donnerrollen (Herr H. Grünberger). Das »Liebauer Wochenblatt« meldet vom 25. Jänner: Soeben um $7^h 52^m$ fiel wieder ein Meteor von gleicher Grösse, wie jenes am 16. Jänner, in der Richtung NE—SW, helles Licht verbreitend. Es zerstob in kleine Sternschnuppen. Ziemlich starker, rollender Donner folgte.

Eine aus Hirschberg vorliegende ausführliche Mittheilung wird am Schlusse erörtert werden.

Böhmen und Mähren.

11. Sct. Peter im Riesengebirge (33° 18′, 50° 43′5). »Angebliches Wetterleuchten« (Herr Dr. Schottky).

12. Trautenau (33° 35′, 50° 33′). Gegen 8^h wurde ein Gewitter bemerkt, welches in der Richtung gegen Königinhof (*A*: 26°) stand und unter Blitz und Donner sich entlud (Trautenauer Wochenblatt).

13. Kladrub (33° 9′, 50° 4′). Einige Minuten vor 8^h Lichterscheinung in der Richtung SE—NW, gleich einem Blitze, doch körperlicher, nicht linienartig, sondern ein Streifen. Mässiger Donner (Herr Hofgestütmeister Motloch, nach den Beobachtungen der Herren Krainz und Šimbersky).

14. Landskron (34° 17′, 49° 54′). Der Feuerwächter der Tabakfabrik bemerkte einen sich nach NW ausbreitenden blitzartigen Schimmer, welcher die Nordseiten der Gebäude hell

beleuchtete. Der Himmel war völlig bewölkt (Direction der k. k. Tabakfabrik).

15. Brünn (34° 16′, 49° 12′). Herr Realschulprofessor F. Obenrauch beobachtete das Meteor um $7^h 56^m$ m. Br. Z. in der Eichhorngasse. Nach seinen Angaben habe ich selbst Folgendes eingemessen. Anfang: $A = 149°$, $h = 40°$. Ende: $A = 145°$, $h = 16°5$. D: 2—3ˢ.

Eine andere Beobachtung ist die des Herrn k. und k. Rittmeisters Petschiy im Augarten. Aus seinen Zeichnungen und anderweitigen Angaben konnte ich erhalten: Anfang: $A = 166°$, $h = 37°5$. Ende: $A = 152°$, $h = 18°5$. Die von ihm gezeichnete Bahn geht verlängert ungefähr durch Polaris. Der Herr Beobachter gab mir auch schriftlich eine recht anschauliche Schilderung seiner optischen Wahrnehmungen. Zuerst war das Meteor oval, im weiteren Verlaufe zog es sich noch mehr in die Länge und es schien, in der Mitte der Bahn angelangt, sich ungefähr auf das Doppelte vergrössert zu haben. Im letzten Theile seiner Sichtbarkeit stoben plötzlich aus den oberen (rückwärtigen) Partien hellstrahlende Körper hervor, die den Anschein hatten, als ob sie die entgegengesetzte Bewegungsrichtung annehmen wollten. Einige Theile erloschen, andere folgten sodann dem Hauptkörper. D: 4—5ˢ. Beide Beobachter bezeichneten die Erscheinung als sehr schön und äusserst glanzvoll.

Von hier berichtete auch Herr H. Ernst an die k. k. Wiener Sternwarte, dass er um $7^h 53^m$ das Meteor in NW, als grosse bläuliche Kugel gesehen habe.

16. Austerlitz (34° 33′, 49° 9′). Die weissblau leuchtende Kugel mit ziemlich langem Schweife war zuerst über der Kirche Sct. Urban (N) sichtbar und bewegte sich in nordwestlicher Richtung. Der Ringplatz war durch 2ˢ ganz hell beleuchtet (Herr G. Raulich).

17. Czeitsch (34° 38′, 48° 57′). Das Meteor schien fast vom Zenit zu kommen und in der Richtung nach Nasedlowitz (N) zu fallen. D: 3—4ˢ (Herr Gutsbesitzer M. Scholz).

18. Znaim (33° 42′, 48° 51′). Tauchte nördlich auf und ging fast senkrecht herab. Licht blauweiss, wie Bogenlicht. Gegen Ende, Theilung in zwei Körper.

Nieder- und Oberösterreich.

19. Ziersdorf (33° 36′, 48° 32′). Etwa 7h50m. Beobachter wurde durch das grelle von rückwärts kommende Licht aufmerksam, wendete sich um und sah gegen N hin ein kurzes Bahnstück. Hinter dem Meteor folgte unmittelbar ein viel kleinerer Körper. Das Licht war auffallend grünlich (Herr Pfarrverweser P. B. Hromadnik).

20. Rossatz (33° 10′, 48° 24′). Fallrichtung gegen NNW. Beleuchtung der umgebenden Berge blaugrün-weisslich. (Herr H. Herzog.)

21. Korneuburg (34° 0′, 48° 21′) 8h2m. Grünlich-blaues, grosses Meteor. Es fiel ungefähr aus der Mitte des Firmaments bis 3/4 des Horizontes am NW-Himmel. *D*: 3s. (Herr W. Wolf, Fabriksbeamter.)

22. Aus Seebarn bei Korneuburg, 7h55m, gibt Herr Schlossgärtner Prinz an, dass die Feuerkugel ungefähr von Mondgrösse war und ihre Gestalt veränderte. Vorne, wo sie am breitesten erschien, war das Licht weiss wie Bogenlicht, nach rückwärts ging es in Feuerroth und Dunkelroth über. Sie zog einen langen Schweif nach.

23. Jedlersdorf (34° 4′5, 48° 17′) 8h. Fall in der Richtung über Hagenbrunn (N), senkrecht. Die Umgebung war erleuchtet. *D*: 3s. (Herr H. Blessl.)

24. Wien (33° 59′5, 48° 13′5). *a)* K. k. Universitäts-Sternwarte. 7h 56m mittl. W. Z. Einige Damen und der Portier sahen das Meteor, während Herr Assistent Dr. Fröbe der Erscheinung den Rücken kehrte. Dieser liess sodann jeden Beobachter die Einstellungen am Meteoroskop vornehmen und theilte folgende Resultate mit:

	Anfang		Ende	
	A	*h*	*A*	*h*
Frau A. Gerstmann........	180°9	27°1	169°9	19°9
Frl. M. Schwieger.........	208·1	50·4	179·6	21·5
Portier.....................	179·1	25·0	166·8	17·0.

Die Angaben sind, wie Herr Dr. Fröbe hinzufügte, unsicher, wegen des heftigen Sturmes, der das Instrument erschütterte.

Die beiden genannten Damen beschrieben das Meteor nur als einen langen Streifen. Frln. M. Kohn sah einen scharf begrenzten Körper von gelbem Lichte, der sich am Schlusse in viele Stücke theilte. Nach der Angabe des Portiers war die Feuerkugel nahezu so gross als der Mond, aber länglich und von bläulicher Farbe. Sie platzte wie ein Feuerwerkskörper mit Zurücklassung eines 3^s nachleuchtenden Schweifes.

Im Vergleiche mit diesen Feststellungen können die übrigen sehr zahlreichen Mittheilungen, welche aus Wien an die k. k. Sternwarte gelangt sind, nur als ganz beiläufige gelten. Insoferne dieselben Wahrnehmungen über die Form, Farbe etc. des Meteors enthalten, sollen sie später benützt und, um Wiederholungen zu vermeiden, hier einstweilen übergangen werden. Die nachstehenden Beobachtungen enthalten noch einige Angaben über die Bahn oder den Endpunkt.

b) Herr Med. Dr. H. Kohn fand, dass die scheinbare Bahn im Norden mit dem Meridian einen nach oben offenen Winkel von etwa 40° einschloss. *D*: 3^s.

c) Herr E. Ettel sah das Meteor von der Sofienbrücke aus zuerst über den Häusern zwischen der Wittelsbachstrasse und Thiergartenstrasse (beiläufig N), zuletzt nahe am Weissgärberufer des Donauarmes (Azimut etwa 166°5).

d) Frau M. Korner stand bei der Haltestelle der Pferdebahn vor dem Parlamentsgebäude und meinte, das Meteor müsse in der Reichsrathsstrasse zwischen Rathhauspark und Universität gefallen sein (ungefähr 169° Azimut). Es war schön gelbgrün und grösser als irgend ein Stern am Himmel.

e) Herr B. Neufeld befand sich auf der Augartenbrücke, als das Meteor in »parabolischem Bogen« aus der Richtung des Bisamberges (N) gegen den Leopoldsberg hin zu fallen schien ($A = 161°$ oder etwas mehr), einen langen, glänzenden Schweif hinter sich lassend. *D*: 4^s.

f) Herr Bürgerschullehrer J. Barbisch schätzte die Dauer zu 2^s.

25. Möllersdorf (33°58′, 48°1′5) 7^h49^m mitteleurop. Zeit. Der Beobachter, Herr M. Bruno wurde durch den grellen Schein, welcher die Häuser hell erleuchtete, aufmerksam gemacht. Das Meteor schien zwischen Möllersdorf und Guntrams-

dorf (beiläufig N) zu fallen. Die scheinbare Bahnneigung gegen den Horizont wurde in dreierlei Skizzen mit 61°, 70°, und 74° gezeichnet. Die Schilderung des Aussehens wird später zur Sprache kommen.

26. Vöslau (33° 52'5, 47° 58') $7^h 52^m$ m. e. Z. Gemäss Einzeichnung der Bahn in eine Skizze der betreffenden Sternbilder wären die Coordinaten: Anfang: $\alpha = 270°$, $\delta = +65°$, II: $\alpha = 275°$, $\delta = +65°$. Hier verschwand die Feuerkugel hinter einem Hause. Farbe: gelblichblau. Die Dächer der Häuser waren ziemlich intensiv erleuchtet. (Herr Ehrlich.)

27. Kremsmünster (31° 47'5, 48° 3'), $7^h 48^m$. Herr F. Schwab, Observator an der Stiftssternwarte berichtete hierüber brieflich an Herrn Director Dr. E. Weiss.

Als er das Meteor erblickte, war es nahe bei γ-Ursae majoris. Es bewegte sich, anfangs scheinbar schneller, dann immer langsamer, in einer Richtung ungefähr parallel zur Linie α—η Ursae majoris nach unten. Zuerst war es von Grösse und Farbe der helleren benachbarten Bärensterne, die Helligkeit wuchs aber rasch, so dass die Umgebung wie von grünlichweissem, bengalischem Lichte merklich erleuchtet wurde. In diesem Stadium dürfte das Meteor 4—6 mal so gross als Jupiter erschienen sein. Endlich verschwand es hinter einer im Norden lagernden Wolkenbank, und im nächsten Momente leuchtete die Wolke an dieser Stelle in röthlicher Farbe auf, was auf eine neue, rasch zunehmende Lichtentwicklung oder etwa eine Explosion schliessen lässt. Die ganze Erscheinung mochte kaum länger als 3—4^s gedauert haben.

Es sind noch mehrere Mittheilungen eingelaufen, welche sich theils sehr wahrscheinlich, theils ganz bestimmt auf andere Meteore beziehen.

Zunächst ist eine dem Herrn Director Dr. Galle in Breslau durch den Herrn Professor Dr. E. Reimann aus Hirschberg zugegangene Beobachtung von besonderem Interesse. Sie erscheint ganz räthselhaft. Secundaner Felsch meldete, er habe am 25. Jänner, etwa um $7^h 48^m$ ein Meteor gesehen und nach 2 Minuten und einigen Secunden lebhaften Donner gehört.

Kugel auf der Westseite von E—W, sich in drei Strahlen theilend und die Gegend taghell erleuchtend.

Das war eine merkwürdige Nacht! Schliesslich will ich noch eine Beobachtung anführen, welche trotz bedeutender Discordanz vermuthlich doch unser Meteor betrifft. Um $7^h 30^m \pm 10^m$ sah es in Wien eine Frau aus ihrem Zimmer durch das etwa 3 *m* entfernte Fenster. Sie konnte daher keinen grossen Theil des Himmels übersehen. Herr Sternwarte-Assistent Dr. Bidschof hat nach ihren Angaben folgende Daten eingemessen: I. $A = 188°5$, $h = 18°5$, II. $A = 181°5$, $h = 3°7$, D: 2^s. Theilung in zwei Stücke. Die Zeitangabe stimmt zwar nicht gut, allein die beigesetzten Fehlergrenzen sprechen dafür, dass sie überhaupt sehr unsicher ist. Die angegebene Bahn liegt wohl auch nur beiläufig in derselben Gegend des Himmels und zeigt einen ähnlichen Abfall, wie in den anderen Wiener Beobachtungen. Vermuthlich sind aber die Messungsresultate nur dadurch entstellt, dass die Lage des Beobachtungspunktes gegen das nahe Fenster nicht mehr im Gedächtnisse geblieben war. —

Für die Fallzeit dieses Meteors geben recht viele gut übereinstimmende Nachrichten: $7^h 57 \cdot 6^m$ mittl. Brünner Z. oder $6^h 51 \cdot 1^m$ mittl. Greenwicher Z.

Hemmungspunkt. Überblickt man zunächst die mehr zahlreichen als genauen Nachrichten, so ergibt sich beiläufig, dass der Endpunkt der Bahn über dem nordöstlichen Theile Böhmens sich befunden haben musste, im Süden der Hauptkämme des Riesengebirges, aber auch noch südlich von Trautenau, mit Rücksicht auf die dortigen Wahrnehmungen (12). Ferner lässt sich auch ungefähr schliessen, dass die Feuerkugel von der Ostseite hergekommen ist, in einer Bahn, deren Projection die Gebiete südlich von Trautenau und nördlich von Landskron (14) durchschnitten haben mochte.

Die Auslese unter den Beobachtungen zur genaueren Bestimmung des Hemmungspunktes fällt sehr unergiebig aus. In Vöslau und Kremsmünster ist nach Angabe der Beobachter der scheinbare Bahnbogen nicht bis zum Ende gesehen worden. Es bleiben dann nur mehr die Beobachtungen aus Wien, Brünn

und Steinau übrig, letztere mit der unsicheren Bezeichnung SW, welche eine Verwendung bloss durch Combination mit den übrigen Angaben dieser Beobachtung gestattet.

Unter diesen Umständen kann die Ermittlung des Endpunktes nur in der Weise versucht werden, dass die möglichste Ausgleichung der Widersprüche in Azimut und scheinbarer Höhe gleichzeitig versucht wird. Dieser Vorgang, welcher unter allgemeinen Voraussetzungen zwar der richtigere, wenn auch weitläufigere ist, empfiehlt sich in der Regel nicht, weil zumeist die Höhen viel unsicherer, als die Richtungen sind. Im gegenwärtigen Falle bietet er jedoch die einzige Aussicht auf Erfolg.

Zieht man nun die scheinbaren Höhen in Betracht, so ergeben sich leider gerade in dieser Hinsicht grosse und unausgleichbare Widersprüche zwischen den vollständigsten Beobachtungen, nämlich jenen von Wien und Brünn. Für Wien ist das Mittel aus den drei scheinbaren Endhöhen 19°5 (nach Ausscheidung der zweiten Beobachtung noch immer 18°5), während das Mittel der beiden Brünner Angaben 17°5 beträgt. Es ist aber einleuchtend, dass der Endpunkt im nordöstlichen Böhmen von Brünn aus sehr viel höher erscheinen musste, als von Wien. Beim Vergleiche mit anderen Angaben ergibt sich, dass die Endhöhen aus Wien etwa auf die Hälfte herabgesetzt werden müssten, daher nicht in Betracht kommen können.

Ähnliche augenfällige Bedenken ergeben sich dagegen hinsichtlich der betreffenden Azimute nicht. Werden nun die Azimute aus Wien und Brünn verbunden, zugleich aber auch mit den Angaben der Höhen aus Brünn und Steinau in Zusammenhang gebracht, endlich auch hinsichtlich der nach abwärts verlängerten Bahnbogen aus Vöslau und Kremsmünster die Beziehungen zwischen Azimut und Höhe mit berücksichtigt, so ergibt sich der wahrscheinlichste Ort für den E n d p u n k t die Gegend in 33°11′ ö. L. v. F. und 50°16′5 n. Br., etwas östlich von Smidar und Bidžov, in dem Dreieck Gičin, Chlumetz und Königgrätz.

Die Verbesserungen an den durch Messung bestimmten Azimuten in Brünn und Wien sind gering. Für Brünn beträgt das Mittel der zwei Beobachtungen 148°5, der berechnete Werth ist 147°0, also die Verbesserung —1°5. Für Wien wäre das

Mittel (nach Ausscheidung der zweiten Beobachtung) 168°4, der berechnete Werlh 166°2, somit die Verbesserung —2°2.

Die Angabe SW aus Steinau ist zwar als $A = 45°$, jedoch nur mit dem Gewichte $^1/_4$, in Rechnung gebracht worden, mit Rücksicht auf die Unbestimmtheit. Das berechnete Azimut wird dann nur 27°3, so dass der Unterschied fast 18° beträgt. Wenn es hiernach und in Rücksicht auf einige andere beiläufigen Angaben aus Schlesien erscheinen mag, dass der Endpunkt noch weiter westlich, und in Anbetracht der Detonationen vielleicht auch nördlicher gelegen war, so lassen dieses die bestimmteren Beobachtungen aus Kremsmünster und Vöslau ebensowenig zu, als jene aus Wien und Brünn.

Man darf in solchen Fällen auch nicht unterlassen, das aus den brauchbaren Beobachtungen erzielte Resultat mit solchen Wahrnehmungen zu vergleichen, welche sich nicht direct in Rechnung ziehen lassen. Darnach würden die Angaben aus Czeitsch und Möllersdorf, die zweite Messung aus Wien u. a. den Endpunkt noch weiter nach Osten verlegen. Überdies ist hinsichtlich derjenigen schlesischen Mittheilungen, nach welchen eine westlichere Lage anzunehmen wäre, auch zu bedenken, dass sich derartige Angaben in der Regel nicht sowohl auf den wirklichen Endpunkt, als auf die Bewegungsrichtung beziehen, d. h. auf den Punkt, wo die Verlängerung der gesehenen Bahn die Erde treffen würde, weil, aus leicht begreiflichen Gründen, die meisten Beobachter annehmen, dass das Meteor auch nach dem Erlöschen nach dieser Richtung hin (und nicht fast lothrecht, wie es der Wirklichkeit entspricht) gefallen sei.

Die Angaben aus Trautenau in Böhmen (Gewitter mit Donner gegen Königinhof) und aus Fischbach bei Hirschberg (gegen die »Koppe« hin) stehen mit dieser Bestimmung im befriedigenden Einklange, insbesondere würden sie auch eine namhafte Verschiebung gegen Osten nicht zulassen.

Zur Bestimmung der linearen Höhe des Hemmungspunktes stehen nur die Beobachtungen aus Brünn (17°5) und Steinau (20°, wenn, wegen der gewöhnlichen Überschätzung die untere Grenze genommen wird) zur Verfügung. Die ersteren geben 46·3 *km*, letztere 53·2 *km*. Das einfache Mittel, 49·7 *km*

oder 6·7 geogr. M. möge, in Ermanglung anderer Angaben für die Höhe des Hemmungspunktes über der Erdoberfläche beibehalten werden.

Die Verbesserungen betragen für die scheinbaren Höhen in Brünn: +1°5 und in Steinau —1°0. Für Wien stellt sich die berechnete Höhe auf 10°6. In Vöslau war der durch die eingetragene Bahn fixirte Punkt, wo das Meteor hinter einem Dache verschwand in 11°5 Höhe. Für den (dort also nicht mehr gesehenen) Endpunkt gibt die Rechnung 9°7. Auch mit der Wahrnehmung in Kremsmünster harmonirt dieses Resultat.

Radiationspunkt. Für die Ermittlung des scheinbaren Radianten können sechs Bahnen verwendet werden, von welchen fünf entweder auf Beziehungen zu Sternen oder auf directen Messungen beruhen. Bei allen wurde der berechnete Endpunkt dem beobachteten (unter II) substituirt. Als erster Bahnpunkt ist für Steinau der angegebene, für Kremsmünster geradezu γ-Ursae majoris genommen worden. In Brünn wurde das Mittel aus beiden Messungen beibehalten. Wenn in Wien der Endpunkt im angegebenen Sinne verbessert wird, so ist auch der Widerspruch der dortigen drei Beobachtungen untereinander der Lage nach nicht mehr so gross und es kann dann ebenfalls ein Mittelwerth eingeführt werden. In Vöslau ist die Eintragung der Bahn in die Sternbilder offenbar nach dem Stande einer vorgerückteren Zeit erfolgt, was auch aus der skizzirten Lage derselben zu erkennen ist. Jene wurde daher auf den verbesserten Endpunkt verschoben. Für Möllersdorf ist das Mittel der skizzirten scheinbaren Neigungen (68°) angenommen worden.

Im Sinne dieser Bemerkungen ergeben sich folgende scheinbare Bahnen:

	I		II		
	α	δ	α	δ	Gewicht
Steinau.......	67°0	+7°0	37°3	—15°6	1
Brünn.........	309°9	+70°6	296°9	+49°6	2
Wien	244°0	+68°8	265°7	+50°7	3
Kremsmünster..	177°0	+54°3	209°1	+47°1	1
Möllersdorf *....	270°4	0	264°4	+50°4	1/4
Vöslau	243°9	+69°4	261°0	+50°7	1.

Daraus folgte der scheinbare Radiant in

Rectasc.: 104° ±2°0, Nördl. Declin.: 30° ±3°5

im Fuhrmanne, nahe den Zwillingen.

Die Verbesserungen an I sind für alle directen Beobachtungen äusserst gering. Sie betragen im Bogen des Grosskreises für

Steinau	+0°3
Brünn	—0°1
Wien	+1°7
Kremsmünster	—0°6
Vöslau	—0°7.

Eine erhebliche Verbesserung erhält nur die scheinbare Neigung in Möllersdorf mit —8°2.

Da die meisten dieser Bahnen weit vom Radianten entfernt und nicht sehr lang sind, bewirken schon kleine Änderungen derselben bedeutende Abweichungen. Es sind, mit anderen Worten, die Coëfficienten der zwei Normalgleichungen so beschaffen, dass die beiden Unbekannten nicht mit grossen Gewichten aus der Auflösung hervorgehen. Aus diesem Grunde sind die mittleren Fehler der Coordinaten grösser, als man bei den geringen Verbesserungen der Bahnen unter anderen Umständen erwarten dürfte.

Da bei diesem Rechnungsverfahren die scheinbaren Positionen des Endpunktes unter II als fest, d. i. als nicht mehr zu verbessernd, gelten, während die Bestimmung der wirklichen Lage desselben im gegenwärtigen Falle minder sicher ist, habe ich probeweise auch versucht, die rohen Bahnbogen, wie sie aus den Berichten zu entnehmen sind, ohne vorhergegangene Ausgleichung auf den Endpunkt zu benützen. Diese Bahnen weichen dann am Schnittpunkte viel weiter von einander ab (woraus man schliessen darf, dass jene Ausgleichung die allgemeine Übereinstimmung befördert hat) und würden den Radianten in $\alpha = 105°$, $\delta = +30°$ geben, also nahezu dasselbe Resultat, wie durch das frühere Verfahren.

Zur Zeit der Beobachtung befand sich der vorhin nachgewiesene Radiationspunkt für den Horizont des Endes in

288°4 Azimut und 53°3 Höhe, wodurch Richtung und Neigung der Bahn gegeben sind.

Als in Steinau das Meteor bei den bezeichneten Orionsternen zuerst gesehen wurde, erschien es nur wenige Grade östlich von Süd. Derselbe Punkt entspricht sehr nahe auch den ersten Wahrnehmungen in Brünn (*b*) und Kremsmünster, annähernd auch jenen in Wien und den meisten Orten, von welchen eine brauchbare Angabe vorliegt. Das Aufleuchten der Feuerkugel ist daher ungefähr gleichzeitig beobachtet worden, als sie sich 157 *km* oder ein wenig mehr als 21 geogr. M. über Bařitov, nördlich von Gabel in Böhmen befand. Die Bahn, welche eine Länge von 134 *km* hatte, ging von hier über Helkovitz, nördlich von Senftenberg, Sypkow bei Kosteletz, Stenkow südlich von Hohenbruck und nahe über Königgrätz zum Endpunkte.

Geschwindigkeit. Es liegen 13 Dauerschätzungen vor, welche ohne Bedenken auf diese Bahnstrecke bezogen werden können, nämlich folgende:

Steinau	3^s
Waldenburg	3
Cunnersdorf	2
Schmiedeberg	8—10
Brünn *a)*	2—3
Brünn *b)*	4—5
Czeitsch	3—4
Korneuburg	3
Jedlersdorf	3
Wien *b)*	3
Wien *e)*	4
Wien *f)*	2
Kremsmünster	3—4

Wenn man die sehr abweichende Angabe aus Schmiedeberg nicht ausschliesst, ist das Mittel 3·6^s, welches, mit der Länge von 134 *km* verbunden, die durchschnittliche geocentrische Geschwindigkeit 37·2 *km* gibt.

Grösse, Lichtstärke, Farbe etc. In Wien und Korneuburg wurde die Feuerkugel nahezu von Mondgrösse geschätzt,

bei einer Entfernung von ungefähr 245 *km*. Dagegen wurde sie aus dem viel näheren Schmiedeberg (etwa 80 *km*) nahezu ebenso gross angegeben. Diese Vergleiche geben also sehr verschiedene Resultate im Verhältnisse von 3 : 1. Die Angabe aus Kremsmünster: 4—6-fache Grösse Jupiters, lässt eine directe Verwerthung kaum zu, weil die hellen Planeten mit freiem Auge viel grösser erscheinen, als ihre scheinbare Scheibe. Man wird aber annehmen dürfen, dass ein so geübter Beobachter den Vergleich mit dem Monde wohl herangezogen hätte, wenn er ganz naheliegend gewesen wäre. Hiernach ist es wahrscheinlich, dass auch die Schätzungen aus Wien zum mindesten auf die Hälfte herabzusetzen wären. Dies würde noch immer einen wirklichen Durchmesser der Feuerkugel von mehr als 1000 *m* geben. Aus Schmiedeberg erhält man dagegen unter Annahme des vollen Monddurchmessers nur 700 *m*, ein Resultat, welches der Wahrheit wohl näher liegen dürfte.

Die in dem letzteren Theile der Bahn von dem Meteor ausgehende Lichtstärke war überaus gross. Berichte aus Orten, welche bis 100 *km* und darüber von der Lichtquelle entfernt waren, stimmen darin überein, die Bezeichnungen »taghell« und »mondhell« zu gebrauchen. Darüber hinaus bis 200 *km* war die Lichtstärke noch gross genug, um die Aufmerksamkeit der Beobachter auf die betreffende Stelle des Himmels hinzulenken, ja selbst in Vöslau (260 *km*) und Kremsmünster (270 *km*) wird über die merkliche Erleuchtung der Umgebung berichtet.

Von Interesse mag es auch sein, festzustellen, dass die in Kremsmünster angezeigte sehr bedeutende Steigerung der Lichtstärke — von etwa 2. Grösse bis 4—6-fache Jupitergrösse — fast gar nicht durch den Unterschied der Entfernungen der Lichtquelle vom Beobachter bedingt war. Diese betrug im Anfange wenig mehr als 330 *km*, am Ende etwas über 270 *km*. Die Quadrate dieser Zahlen verhalten sich nicht einmal ganz wie 1·5 : 1. Das grosse Anwachsen ist daher fast ausschliesslich in einer reellen Steigerung der Lichtintensität, also der entwickelten Wärmemenge während 3—4^s begründet.[1]

---

[1] Eine annähernde Vorstellung von dem Maasse dieser Steigerung kann vielleicht folgende Betrachtung gewähren: Nach Seidel's photometrischen

Die Farbe des Lichtes geben 10 Beobachter bläulich (bläulich, weissbläulich oder blauweiss), 5 blaugrün oder grünlichblau, 5 grün oder grünlich, 1 gelbgrün, 1 grünlichweiss, 2 gelb oder gelbweiss, endlich 3 röthlich, roth und violett an. Unter diesen 27 Angaben entfallen daher 21 auf bläuliche und grünliche, oder, wie ein Beobachter sagt, »gelbblaue«[1] Töne.

Dass an dem Meteore schon während des Zuges, also noch vor der Hemmung mehrere getrennte Theile zu erkennen waren, wird von einigen Beobachtern angeführt, dabei wird auch hin und wieder ausdrücklich angedeutet, dass die Theile der Grösse nach hintereinander angeordnet waren. So zeichnete der Beobachter in Möllersdorf einen Hauptkörper und hinter diesem noch fünf andere in abnehmender Grösse. Andere Beobachter sprechen von zwei Theilen, welche nach rückwärts viele kleine Sternchen »ausstreuten«. Herr Rittmeister Petschiy gibt eine Schilderung der Theilung (15) und Herr Prinz in Seebarn meinte, die Gestaltveränderungen waren derart, als ob die Masse weich oder flüssig gewesen wäre.

Nach den Angaben mehrerer Beobachter hat das Meteor auch einen wenige Secunden nachleuchtenden Streifen hinterlassen.

Detonationen. Trotz der ziemlich ansehnlichen Hemmungshöhe liegen hierüber zahlreiche Meldungen vor. Manche derselben mögen wohl, wie dies so oft der Fall ist, dem Spiele

---

Bestimmungen (k. Akademie in München: Monumenta saecularia, 1859, S. 20) ist die mittlere Helligkeit Jupiters $= 8 \cdot 24 \times \alpha$ Lyrae. Im »Nautical Almanac« ist α Lyrae von 0·2 Grösse angegeben, indem α Bootis $= 0 \cdot 0$ gesetzt wird. Nach Newcomb's Schema für die Helligkeiten verschiedener Grössenclassen wäre dann α Lyrae etwa 5·5mal so hell als ein Stern 2. Grösse. Hieraus würde folgen, dass die fünffache Helligkeit Jupiters $= 41 \cdot 2 \times \alpha$ Lyrae $= 226 \cdot 6$mal so gross, als die eines Sternes 2. Grösse zu nehmen wäre. Dieses Verhältniss würde also die Lichtsteigerung nach der Abschätzung in Kremsmünster ungefähr darstellen. Nach Reduction auf die gleiche Entfernung würde daraus folgen, dass die Intensität noch vor dem Ende (welches in Kremsmünster nicht gesehen wurde) beiläufig 150mal so gross war, als in etwa 21 Meilen Höhe.

[1] Diese Bezeichnung, welche die Farbe gleichsam zerlegt, dürfte den Umständen ziemlich angemessen sein. Mehrfach ist nämlich bei ähnlichen Erscheinungen der Kern intensiv bläulichweiss, der Saum gelb bemerkt worden, entsprechend der grösseren und geringeren Wärme- und Lichtintensität.

einer allzu lebhaften Einbildung entsprungen sein, allein der Mehrzahl nach wird man sie kaum anzweifeln können. Die nächsten Orte sind Kladrub (55 *km*) und Trautenau (66 *km*). Wenn aus den benachbarten Gegenden nicht mehr derartige Berichte einliefen, so liegt dies, ausser in einigen hier nicht zu erörternden Nebenumständen, wahrscheinlich darin, dass hier zumeist der Himmel sehr stark bewölkt war. Detonationen ohne vorhergegangener Lichterscheinung können jedoch, wenn sie nicht besonders heftig sind, leicht unbeachtet bleiben.

Die übrigen Punkte: Fischbach, Cunnersdorf, Schmiedeberg, Liebau und Landeshut liegen alle über der Grenze in Preussisch-Schlesien ungefähr 80 *km* entfernt. Das in Cunnersdorf (nicht sicher) und Landeshut angegebene Intervall zwischen Licht und Schall würde einer geringeren Entfernung (60 *km* statt 80 *km*) als der ermittelten entsprechen.

Kosmische Verhältnisse. Die Coordinaten des scheinbaren Radianten in Bezug auf die Ekliptik sind $\lambda = 102^\circ 2$, $\beta = +7^\circ 1$. Der Betrag der Erdstörung oder sogenannten Zenithattraction ist dabei nicht in Rechnung gezogen, weil die Zenithdistanz des Radianten gering war. Mit $305^\circ 6$ Sonnenlänge wird die scheinbare Elongation dieses Punktes vom Erdapex $113^\circ 4$, die wahre Elongation würde dann bei der ermittelten geocentrischen Geschwindigkeit von 37 *km* 142°, und die heliocentrische Geschwindigkeit 56 *km* oder ein wenig mehr als $7^1/_2$ geogr. M. betragen. Die Neigung der sehr ausgeprägt hyperbolischen Bahn (Halbaxe $a = -0 \cdot 65$) wäre $i = 6^\circ$, endlich der kosmische Ausgangspunkt in 61° Länge und $+5^\circ 5$ Breite.

In der Nähe des Radiationspunktes dieser Feuerkugel — $\alpha = 104^\circ$, $\delta = +30^\circ$ — liegen einige andere aus verschiedenen Epochen. Insbesondere wären hier folgende Beispiele anzuführen:[1]

---

[1] 1862 November 27. $5^h 45^m$. Ein sehr grosses, detonirendes Meteor, über welches (Report of the br. as. 1862, p. 230 und 342) viele Beobachtungen aus England und Frankreich gesammelt wurden.

1864 December 8. $15^h 45^m$ m. Gr. Z. in England (ib. 1865, p. 121, wo die oben bezeichnete Position angegeben ist).

	Scheinbarer Radiant	
	α	δ
Meteor am 27. November 1862	100°	+28°
Meteor am 8. December 1864	95	+30
Meteor am 12. December 1863	100	+28·5
Meteor am 12. Februar 1863	105	+33.

Behält man die oben aus den Beobachtungen gefundene Geschwindigkeit bei und berechnet die Verschiebung des scheinbaren Radianten vom 25. Jänner 1895 für die Knotenlängen, welche ungefähr jenen Epochen entsprechen, so erhält man für

	Berechneter Radiant	
	α	δ
1. December	95°	+28°
12. Februar	102	+32.

Die Verschiebung ist eine geringe, weil bei dieser oder einer etwas grösseren Geschwindigkeit in der zweiten Hälfte Jänners ein Wendepunkt liegt.

Vorausgesetzt, dass die oben für den 27. November und 8. December angeführten Radianten zusammen gehören, so könnte der Unterschied wohl nur in der Unsicherheit der Resultate begründet sein, was auch nicht auffallend wäre. Jedenfalls dürfte man dann für die Mitte der Epoche, also etwa December 2.—3., das Mittel $\alpha = 97^\circ 5$, $\delta = +29°$ gelten lassen, wovon der für den 1. December berechnete Ort nur sehr wenig abweicht.

Hier, wie auch für den 12. Februar, ist die berechnete Rectascension um 2—3° kleiner als die beobachtete. Es ist daher wohl möglich, dass für unseren Radianten vom 25. Jänner, von welchem die Rechnung ausgegangen ist, die Rectascension ebenfalls um einen entsprechenden Betrag zu vermehren wäre, was die Beobachtungen wohl noch zulassen würden.

1863 December 12. $5^h 35^m$ in England (ib. 1864, p. 22 und 91). Zwei vollständige Beobachtungen.

1863 Februar 12. $7^h 57^m$ in England (ib. 1863, p. 244). Ebenfalls zwei vollständige Beobachtungen.

Dieser Radiationspunkt ist unter den Annahmen, welche vorhin abgeleitet wurden, im Februar bereits rückläufig. Er geht dann rasch und mit stark zunehmender Declination im März, April und Mai durch den »Fuhrmann«, »Perseus« und die »Cassiopeia«. Vermuthlich gehören einzelne der im April und Mai (29. April 1865: $\alpha = 75°$, $\delta = +48°$, 30. Mai 1877: $\alpha = 25°$, $\delta = +58°$) nachgewiesenen Meteor-Radianten hieher. Diese würden, auf die Knotenlänge des 25. Jänner zurückgerechnet, ebenfalls eine etwas grössere Rectascension bedingen. Es wird sich noch Gelegenheit ergeben, diese Beziehungen eingehender zu erörtern.

Über den Einfluss des Molecularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekeln

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 3 Textfiguren.)

Zur Formel für die Zahl der Zusammenstösse, welche eine Molekel in der Zeit dt erfährt, können wir auf folgende Weise gelangen. Fassen wir eine bestimmte Molekel ins Auge, so ist es für die Rechnung von Vortheil, wenn wir sie uns punktförmig denken, während alle anderen Molekeln Kugeln vom doppelten Radius, genannt Wirkungssphäre, sein sollen. Durch den Punkt legen wir eine Ebene senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung. Es wird dann aus der Ebene von den Wirkungssphären der Molekeln ein bestimmtes Stück herausgeschnitten, auf welchem der Punkt nicht liegen kann. Die Grösse desselben sei für die Flächeneinheit der Ebene α. Mithin bleibt für den Punkt ein Flächenstück $1-\alpha$ frei. Da alle Molekeln in Bewegung sind, so ändert sich die Gestalt und Lage des herausgeschnittenen Theiles beständig. Während der Zeit dt wird in Folge dessen aus der Flächeneinheit unserer Ebene ein neues Stück β herausgeschnitten. Die Wahrscheinlichkeit, dass unser Punkt auf diesem Stücke liegt, ist durch das Verhältniss

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \tag{a}$$

gegeben. Das ist also auch die Wahrscheinlichkeit, dass unser Punkt in der Zeit dt einen Zusammenstoss erfährt.

Zur Berechnung der Grössen α und β wollen wir zwei ganz allgemeine Sätze entwickeln, für welche unser Problem als

specieller Fall erscheinen wird. Der erste Satz lautet folgendermassen: Ist in einem gegebenen Raum eine sehr grosse Anzahl von Körpern in gleichmässiger Vertheilung angeordnet, legen wir durch diesen Raum eine Gerade und eine Ebene in beliebiger Richtung, so verhält sich die Summe der in die Körper fallenden Stücke der Geraden zur Gesammtlänge derselben wie die Summe der in die Körper fallenden Stücke der Ebene zur Gesammtfläche derselben, wie das Volumen der Körper zum Volumen des in Betracht kommenden Raumes.

Der Beweis dafür liegt eigentlich schon in der Definition der gleichmässigen Vertheilung. Dieselbe besteht ja in nichts anderem, als dass aus einer Ebene von bestimmter Grösse, wie immer wir dieselbe auch durch den Raum legen, von den Körpern im Mittel dasselbe Stück herausgeschnitten wird. Wie von einer Ebene so gilt das natürlich auch von einer Geraden. Daraus ersehen wir also, dass wir eigentlich eine unendlich grosse Anzahl von Körpern in Betracht ziehen müssen. Verschieben wir nun eine Gerade parallel zu sich selbst unendlich wenig in zwei aufeinander senkrechten Richtungen, so entsteht ein Elementarprisma, welches aus unseren Körpern ein gewisses Volumen herausschneidet, das sich zum Gesammtvolumen dieses Prismas genau so verhält, wie der in den Körpern liegende Theil der Geraden zur Gesammtlänge derselben. In solche Prismen können wir aber den ganzen Raum zerlegen, womit der eine Theil unseres Satzes bewiesen ist. Für die Ebene gilt aber dasselbe. Legen wir parallel zu derselben in unendlich kleiner Entfernung eine zweite Ebene, so wird auch hiedurch ein bestimmtes Volumen aus den Körpern herausgeschnitten, das sich zum Gesammtvolumen zwischen den beiden Ebenen so wie der herausgeschnittene Theil zur Gesammtfläche der Ebene verhält. Wiederum können wir den ganzen Raum in gleiche Schichten zerlegen, so dass für diesen dasselbe gilt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zum zweiten Satz gelangen wir auf folgende Weise. Wir denken uns wie früher einen Raum gleichmässig mit gleichartigen Körpern erfüllt. Von diesen wird jedoch vorausgesetzt, dass sie keine Höhlungen besitzen. Es darf also für keinen Körper eine Tangentialebene geben, die ihn gleichzeitig an

irgend einer Stelle durchschneiden würde. Durch den Raum legen wir eine Ebene, so wird, wie wir bereits wissen, aus der Flächeneinheit der Ebene von den Körpern ein gewisses Stück herausgeschnitten. Bewegt sich nun diese Ebene parallel zu sich selbt, und hat ein bestimmter Punkt derselben die Geschwindigkeit u, so ändert sich die Gestalt des herausgeschnittenen Stückes beständig, und es ist das in der Zeit dt in Folge der Bewegung neu herausgeschnittene Stück gleich dem Product

$$qNudt,$$

wenn wir unter q den Mittelwerth der orthogonalen Projectionen unserer Körper auf eine senkrecht zur Bewegungsrichtung liegende Ebene verstehen und N die in der Volumeinheit enthaltene Zahl von Körpern ist.

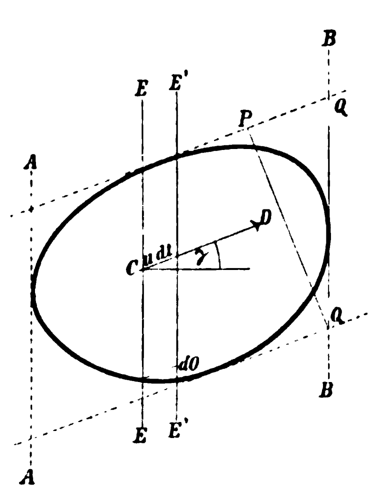


Fig. 1.

Der Beweis ist ebenfalls nicht schwer zu führen. Denken wir uns durch einen unserer Körper eine Ebene EE gelegt, die in der unendlich kleinen Zeit dt den Weg udt zurücklegt. Dieser Weg bilde mit der Normalen zur Ebene EE den Winkel γ (Fig. 1); dann ist die neue Lage $E'E'$ der Ebene von der früheren um $udt \cos\gamma$ entfernt. Dabei hat die Durchschnittsfläche um eine gewisse Grösse dO zugenommen. Sind in der Volumeinheit N Körper vorhanden, welche mit dem von uns in Betracht gezogenen congruent sind und zu ihm parallel liegen, so wird dadurch eine Flächenvergrösserung $Nudt \cos\gamma dO$ bewirkt. Die Gesammtzahl derartiger Körper nun, welche mit der Ebene EE einen Durchschnitt liefern, liegt zwischen den beiden zu EE parallelen, den Körper tangirenden Ebenen AA und BB. Alle diese Körper bewirken eine Flächenveränderung

$$\int Nudt \cos\gamma dO = Nudt \cos\gamma \int dO.$$

[illegible] dQ können wir leicht finden. Projiciren [illegible]
[illegible] unseren Körper in der Bewegungsrichtung CD auf [illegible]
[illegible] ergibt sich für die Projection das Stück $\overline{QQ}$, u[illegible]
[illegible] aus der Zeichnung unmittelbar, dass

$$dQ = 2\overline{QQ}$$

[illegible] Flächenveränderung ist, wobei für jeden einzeln[illegible]
[illegible] Flächenveränderung positiv genommen [illegible]
[illegible] Flächenveränderung fällt aber nur die Hälfte auf ein[illegible]
[illegible] aus der Ebene herausgeschnit[illegible]
[illegible] Flächenzuwachs in der Zeit dt gleich

[illegible] $\cos\vartheta\,\overline{QQ}$.

[illegible] senkrecht zu CD, so ist die örtl[illegible]
[illegible] des Körpers auf dieselbe

[illegible] $\cos\vartheta$.

[illegible] Flächeneinheit aus unse[illegible]
[illegible] Stückes [illegible] der Zeit dt der We[illegible]

[illegible]

[illegible] der Volumeinh[illegible]
[illegible] der Projection

[illegible]

[illegible] Mittelwerth

[illegible]

[illegible] der Volumeinh[illegible]

[illegible] jetzt unte[illegible]
[illegible] Projectionen zu [illegible]
[illegible] ganz willkürli[illegible]

[illegible] Dieser Satz [illegible]

[illegible]

$F = [illegible]$

[illegible]

$Z = [illegible]$

[illegible] unter F die mittlere [illegible] den anderen [illegible]

Die Grösse dO können wir leicht finden. Projiciren wir nämlich unseren Körper in der Bewegungsrichtung CD auf die Ebene BB, so ergibt sich für die Projection das Stück $\overline{QQ}$, und man ersieht aus der Zeichnung unmittelbar, dass

$$\int dO = 2\overline{QQ}$$

die Gesammtflächenveränderung ist, wobei für jeden einzelnen Körper die bewirkte Flächenveränderung positiv genommen ist. Von dieser Veränderung fällt aber nur die Hälfte auf einen Raum, der früher noch nicht aus der Ebene herausgeschnitten war. Mithin ist der Flächenzuwachs in der Zeit dt gleich

$$Nudt \cos\gamma \overline{QQ}.$$

Legen wir eine Ebene senkrecht zu CD, so ist die orthogonale Projection unseres Körpers auf dieselbe

$$\overline{PQ} = q = \overline{QQ}\cos\gamma,$$

woraus für den Zuwachs des per Flächeneinheit aus unserer Ebene herausgeschnittenen Stückes in der Zeit dt der Werth

$$qNudt$$

folgt, was zu beweisen war.

Haben wir verschiedene Körper, etwa in der Volumeinheit die Zahl N_1 mit der Projection q_1, N_2 mit der Projection q_2 u. s. w., so nimmt unsere Formel die Gestalt

$$(q_1N_1 + q_2N_2 + \ldots)udt$$

an. Für die verschiedenen q können wir den Mittelwerth

$$\bar{q} = \frac{q_1N_1 + q_2N_2 + \ldots}{N}$$

einführen, wenn N die Gesammtzahl der in der Volumeinheit enthaltenen Körper ist. Es ergibt sich dann

$$(q_1N_1 + q_2N_2 + \ldots)udt = \bar{q}Nudt,$$

also dieselbe Formel wie früher, nur haben wir jetzt unter q den Mittelwerth sämmtlicher orthogonaler Projectionen zu verstehen. Dabei kann die Projectionsebene eine ganz willkürliche

Lage haben, sobald wir eine gleichmässige Vertheilung aller Körper annehmen. Dieser Satz lässt sich auch noch auf den Fall ausdehnen, dass von unseren Körpern nur ein Theil der Oberfläche in Betracht gezogen werden soll. Nur darf dann bei der Bildung der mittleren Projection entweder nur jener Theil des in Betracht kommenden Stückes der Oberfläche projicirt werden, welcher der Projectionsebene zugekehrt, oder jener, welcher von ihr abgekehrt ist. Ob man die zugekehrte oder abgewendete Seite rechnet, ist deshalb gleichgiltig, weil bei gleichmässiger Vertheilung der Körper die Lage der Projectionsebene vollständig willkürlich ist.

Sind unsere Körper ebenfalls in Bewegung begriffen, so haben wir für u natürlich die relative Geschwindigkeit eines Punktes unserer Ebene gegen die Körper einzusetzen, welche wiederum als Mittelwerth $\bar{r}$ auftritt, sobald die Geschwindigkeiten verschiedene Grösse und Richtung haben. Demnach können wir für unseren Flächenzuwachs schliesslich schreiben

$$F = N\bar{q}\bar{r}dt.$$

Wir wollen unser Resultat vorerst zur Berechnung der mittleren Weglänge in einem verdünnten Gas anwenden. In diesem Fall können wir das Molecularvolumen gegenüber dem Gesammtvolumen vernachlässigen, desgleichen die Zahl der zu einem gegebenen Zeitpunkt sich durchschneidenden Wirkungssphären gegenüber der Zahl der sich nicht durchschneidenden. Wir können dann unsere zwei Sätze unmittelbar benützen, indem die in Betracht kommenden Körper Kugeln vom Radius σ sind, wobei σ den Durchmesser einer Molekel bedeutet. Es ist dann

$$\beta = F = N\bar{q}\bar{r}dt = N\pi\sigma^2\bar{r}dt,$$

da die orthogonale Projection einer Kugel vom Radius σ gleich der Fläche ihres grössten Kreises $\pi\sigma^2$ ist. $N\pi\sigma^2\bar{r}dt$ ist somit die Zahl der Zusammenstösse in der Zeit dt und

$$Z = N\pi\sigma^2\bar{r}$$

jene in der Zeiteinheit, wobei wir jetzt unter $\bar{r}$ die mittlere relative Geschwindigkeit einer Molekel gegenüber den anderen zu verstehen haben.

Wir wollen nun die Zahl der zu einem bestimmten Zeitpunkt sich durchschneidenden Wirkungssphären gegenüber den freien nicht mehr vernachlässigen. Das Gas sei jedoch noch so verdünnt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Wirkungssphären durchschneiden, eine kleine Grösse ist. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich gleichzeitig drei Wirkungssphären durchschneiden, eine kleine Grösse höherer Ordnung, so dass wir diesen Fall und alle übrigen, wo sich mehr als drei Wirkungssphären gleichzeitig durchschneiden, vernachlässigen können. Wir können also jetzt α nicht mehr gleich Null setzen, sondern es ist nach unserem ersten allgemeinen Satz gleich den in der Volumeinheit enthaltenen Wirkungssphären, also

$$a = \frac{4}{3} N\pi\sigma^3.$$

Eigentlich ist dieser Werth etwas zu gross, da ja jene Wirkungssphären, welche sich mit anderen durchschneiden, nicht mit ihrem vollen Volumen in Betracht kommen. Nun ist aber α gegen Eins eine kleine Grösse. Mit Berücksichtigung der sich durchschneidenden Wirkungssphären würden wir also nur zu Gliedern gelangen, welche in unserem Sinn als klein von höherer Ordnung anzusehen und somit zu vernachlässigen sind.

Den Ausdruck β haben wir in zwei Theile zu zerlegen. Der eine Theil wird alle freien Wirkungssphären umfassen, der zweite alle sich durchschneidenden. Nach unseren Voraussetzungen haben wir bloss die Möglichkeit, dass sich zwei Wirkungssphären durchschneiden, in Betracht zu ziehen. In diesem Fall liegt die Entfernung $2c$ der Mittelpunkte derselben zwischen den Grenzen σ und 2σ, wenn σ wieder der Radius einer Wirkungssphäre ist. Von jeder Wirkungssphäre kommt dann jener Theil, welcher von der anderen herausgeschnitten wird, für unsere Rechnung nicht mehr in Betracht, sondern nur das freie Kugelsegment. Es obliegt uns daher, den Mittelwerth aller orthogonalen Projectionen eines solchen Segmentes zu bilden, und dieses Mittel dann weiter auf alle möglichen Segmente auszudehnen.

Der Kreis, welcher das Kugelsegment begrenzt, habe den Radius b, die Entfernung seines Mittelpunktes von jenem der Kugel ist c, es ist demnach

$$\sigma^2 = c^2 + b^2.$$

Durch die Mittelpunkte der Kugel und des Kreises legen wir eine Gerade BB', die eine fixe Gerade AA' schneidet und mit ihr den Winkel δ einschliesst (Fig. 2). Auf eine zu AA' senkrechte Ebene EE' werde das Kugelsegment orthogonal projicirt. Ist für einen bestimmten Winkel δ die Grösse der Projection p, so findet man nach bekannten Regeln den Mittelwerth nach der Formel

$$M = \int_0^\pi \frac{p \sin \delta d\delta}{2} \quad (1)$$

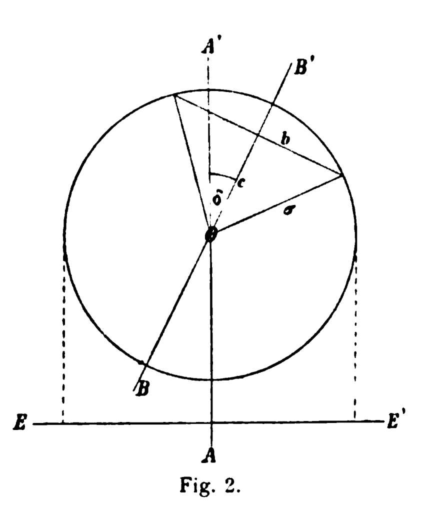


Fig. 2.

So lange δ kleiner als $\arcsin \frac{c}{\sigma}$ ist, ist die Projection gleich einem grössten Kugelkreis, also gleich $\pi\sigma^2$. Die Projection des Begrenzungskreises des Segmentes fällt dabei in die Projection des Segmentes selbst vollständig hinein, und die Fläche der ersteren ist eine Ellipse, deren grosse Halbaxe die Länge b hat. Die kleine Halbaxe

$$a = b \cos \delta,$$

was sich ja alles aus der Zeichnung leicht folgern lässt. Die Fläche der Ellipse ist also

$$\pi a b = \pi b^2 \cos \delta.$$

Wächst nun δ, so rückt die Ellipse der Kreisperipherie immer näher, gleichzeitig wird die Axe $2a$ immer kleiner, bis für $\delta = \arcsin \frac{c}{\sigma}$ Kreis und Ellipse sich in einem Punkt berühren, für welchen der Krümmungsradius der Ellipse gleich

dem Radius σ des Kreises wird. Wächst δ nun weiter, so wird die Projection kleiner. Sie wird dann begrenzt durch einen Kreisbogen und einen Ellipsenbogen (Fig. 3). Denken wir uns nämlich den Kreis vollständig, so wird er von unserer Ellipse jetzt in zwei Punkten von Innen berührt, und wir erhalten die Grösse der Projection, wenn wir von der Fläche des Kreises die

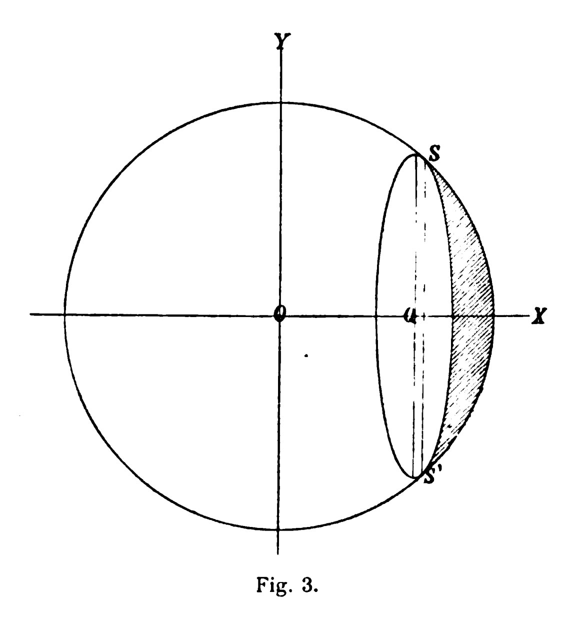


Fig. 3.

Fläche μ des mondförmigen Stückes abziehen, welches zwischen Kreis- und Ellipsenbogen liegt. Für $\delta = \frac{\pi}{2}$ wird $a = 0$. Es ist also die Ellipse zu einer Geraden geworden und die Projection zu einem gewöhnlichen Kreissegment.

Wird δ grösser als $\frac{\pi}{2}$, so wiederholen sich genau dieselben Projectionen, nur in umgekehrter Reihenfolge, ferner ist jetzt ausser dem Mond μ auch noch die Fläche der Ellipse ε von der gesammten Kreisfläche zu subtrahiren, da ja von unserem Kugelsegment nur die Kugelfläche, nicht aber die begrenzende Kreisfläche von einem wandernden Punkt getroffen werden kann. Während also für δ innerhalb der Grenzen arc sin $\frac{c}{\sigma}$

und $\frac{\pi}{2}$ die Projection gleich $\pi\sigma^2-\mu$ sein wird, ist sie zwischen $\delta=\frac{\pi}{2}$ und $\delta=\pi-\arcsin\frac{c}{\sigma}$ gleich $\pi\sigma^2-\varepsilon-\mu$ und schliesslich von $\delta=\pi-\arcsin\frac{c}{\sigma}$ bis $\delta=\pi$ gleich $\pi\sigma^2-\varepsilon$.

Den Mittelwerth der Projectionen haben wir also nach Gleichung (1) folgendermassen zu bilden:

$$M=\int_0^{\arcsin\frac{c}{\sigma}}\frac{\pi\sigma^2\sin\delta}{2}d\delta+\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}}(\pi\sigma^2-\mu)\frac{\sin\delta}{2}d\delta+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin\frac{c}{\sigma}}(\pi\sigma^2-\varepsilon-\mu)\frac{\sin\delta}{2}d\delta+\int_{\pi-\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\pi}(\pi\sigma^2-\varepsilon)\frac{\sin\delta}{2}d\delta=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sigma^2}{2}\sin\delta\,d\delta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\varepsilon}{2}\sin\delta\,d\delta-\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\pi-\arcsin\frac{c}{\sigma}}\frac{\mu}{2}\sin\delta\,d\delta=$$

$$=\pi\sigma^2-\frac{\pi}{4}(\sigma^2-c^2)-\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}}\mu\sin\delta\,d\delta.$$

Für die Fläche unserer Ellipse haben wir nämlich für $\delta>\frac{\pi}{2}$ den Werth

$$\varepsilon=-\pi b^2\cos\delta=-\pi(\sigma^2-c^2)\cos\delta$$

zu setzen. Da ferner die Grösse von μ für $\delta=\frac{\pi}{2}-\zeta$ und $\delta=\frac{\pi}{2}+\zeta$ denselben Werth hat, so ergibt sich

$$\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\pi-\arcsin\frac{c}{\sigma}}\frac{\mu}{2}\sin\delta\,d\delta=\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}}\mu\sin\delta\,d\delta.$$

Wir brauchen also nur noch μ zu bestimmen. Dies ist gleich dem Kreissegment SS', vermindert um das Ellipsensegment über derselben Sehne (Fig. 3). Die Fläche des Kreissegmentes finden wir aus der Gleichung

$$2\int_{x_1}^{\sigma}\sqrt{\sigma^2-x^2}\,dx=\left[x\sqrt{\sigma^2-x^2}+\sigma^2\arcsin\frac{x}{\sigma}\right]_{x_1}^{\sigma}=$$

$$=\frac{\pi\sigma^2}{2}-x_1\sqrt{\sigma^2-x_1^2}-\sigma^2\arcsin\frac{x_1}{\sigma}, \quad (2)$$

wenn wir unter x_1 die Abscisse der beiden Berührungspunkte der Ellipse und des Kreises verstehen.

Aus der Gleichung des Kreises

$$x^2+y^2=\sigma^2,$$

und jener der Ellipse,

$$\frac{(x-c\sin\delta)^2}{(\sigma^2-c^2)\cos^2\delta}+\frac{y^2}{\sigma^2-c^2}=1,$$

findet man leicht

$$x_1=\frac{c}{\sin\delta}.$$

Daraus folgt für die Gleichung (2)

$$2\int_{\frac{c}{\sin\delta}}^{\sigma}\sqrt{\sigma^2-x^2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi\sigma^2}{2}-\frac{c}{\sin^2\delta}\sqrt{\sigma^2\sin^2\delta-c^2}-\sigma^2\arcsin\frac{c}{\sigma\sin\delta}.$$

Beziehen wir die Gleichung der Ellipse auf ihren Mittelpunkt Q, also

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

so erhalten wir für das Ellipsensegment die Gleichung

$$\frac{2b}{a}\int_{x_2}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi(\sigma^2-c^2)\cos\delta}{2}-\frac{c\cos^2\delta\sqrt{\sigma^2\sin^2\delta-c^2}}{\sin^2\delta}-$$

$$-(\sigma^2-c^2)\cos\delta\arcsin\frac{c\cos\delta}{\sqrt{\sigma^2-c^2}\sin\delta},$$

wobei von Q aus gerechnet

$$x_2=\frac{c}{\sin\delta}-c\sin\delta$$

zu setzen ist, und es setzt sich

$$\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}}\mu\sin\delta\,d\delta$$

aus folgenden Gliedern zusammen:

1) $$\frac{\pi\sigma^2}{2}\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\delta\, d\delta = \frac{\pi\sigma^2}{2}\Big[-\cos\delta\Big]_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sigma^2}{2}\sqrt{1-\frac{c^2}{\sigma^2}},$$

2) $$-\frac{\pi}{2}(\sigma^2-c^2)\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\delta\sin\delta\, d\delta = -\frac{\pi}{2}(\sigma^2-c^2)\left[\frac{\sin^2\delta}{2}\right]_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}(\sigma^2-c^2)\left(1-\frac{c^2}{\sigma^2}\right),$$

3) $$-c\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sigma^2\sin^2\delta-c^2}\,.\sin\delta\, d\delta =$$
$$= c\left[\frac{\cos\delta\sqrt{\sigma^2\sin^2\delta-c^2}}{2} + \frac{\sigma^2-c^2}{2\sigma}\arcsin\frac{\sigma\cos\delta}{\sqrt{\sigma^2-c^2}}\right]_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{c}{\sigma}(\sigma^2-c^2),$$

4) $$-\sigma^2\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\frac{c}{\sigma\sin\delta}\cdot\sin\delta\, d\delta =$$
$$= -\sigma^2\left[-\cos\delta\arcsin\frac{c}{\sigma\sin\delta} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\left(1+\frac{c^2}{\sigma^2}\right)\sin^2\delta-\frac{2c^2}{\sigma^2}}{\sin^2\delta\left(1-\frac{c^2}{\sigma^2}\right)} + \frac{c}{2\sigma}\arcsin\frac{2\sin^2\delta-\left(1+\frac{c^2}{\sigma^2}\right)}{1-\frac{c^2}{\sigma^2}}\right]_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= -\frac{\pi\sigma^2}{2}\left(\sqrt{1-\frac{c^2}{\sigma^2}}-1+\frac{c}{\sigma}\right),$$

$$5)\quad (\sigma^2-c^2)\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin\frac{c\cos\delta}{\sqrt{\sigma^2-c^2\sin\delta}}\,.\cos\delta\sin\delta\,d\delta =$$

$$=(\sigma^2-c^2)\left[\frac{\sin^2\delta}{2}\arcsin\frac{c\cos\delta}{\sqrt{\sigma^2-c^2\sin\delta}}-\frac{c}{2\sigma}\arcsin\frac{\sigma\cos\delta}{\sqrt{\sigma^2-c^2}}\right]_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{c}{\sigma}(\sigma^2-c^2)\left(1-\frac{c}{\sigma}\right).$$

Hiezu ist zu bemerken, dass man das vierte Glied leicht findet, wenn man erst partiell integrirt und sodann $x=\sin^2\delta$ als neue Veränderliche setzt, wodurch man auf bekannte Formeln stösst.[1] In noch einfacherer Weise berechnet sich das fünfte Glied, wenn man ebenfalls erst partiell integrirt und dann $\cos\delta=x$ setzt. Die Summe sämmtlicher Glieder ergibt schliesslich

$$\int_{\arcsin\frac{c}{\sigma}}^{\frac{\pi}{2}} \mu\sin\delta\,d\delta = \frac{\pi}{4}(\sigma-c)^2,$$

und für den Mittelwerth der Projectionen einer ganz bestimmten Kugelcalotte finden wir

$$M=\frac{\pi\sigma}{2}(\sigma+c).$$

Wir müssen diesen Mittelwerth noch auf alle möglichen Kugelcalotten ausdehnen. Das ist ebenfalls nicht schwer. Wir wissen, dass der Werth von $2c$, d. i. die Entfernung der Mittelpunkte zweier sich

[1] Diese Substitution verdanke ich meinem Freunde Prof. W. Wirtinger.

schneidenden Wirkungssphären, zwischen σ und 2σ zu liegen hat. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die zwei Mittelpunkte in der Entfernung $2c$ befinden, ist proportional der Grösse $4\pi(2c)^2 d(2c)$. Multipliciren wir damit M, integriren wir dann nach c zwischen $\frac{\sigma}{2}$ und σ und dividiren wir endlich das Resultat durch

$$\int_{\frac{\sigma}{2}}^{\sigma} 4\pi(2c)^2 d(2c) = \frac{28}{3}\pi\sigma^3,$$

so erhalten wir den von uns geforderten Mittelwerth

$$M = \frac{12\pi}{7\sigma^2}\int_{\frac{\sigma}{2}}^{\sigma}(\sigma+c)c^2dc^2 = \frac{\pi\sigma^2}{2} + \frac{45}{112}\pi\sigma^2 = \pi\sigma^2 - \frac{11}{112}\pi\sigma^2.$$

Wenn wir jetzt noch wissen, wie viel von N in der Volumeinheit enthaltenen Wirkungssphären sich in einem gegebenen Zeitpunkt durchschneiden, so ist unsere Aufgabe gelöst.

Die grösstmögliche Annäherung der Mittelpunkte zweier Wirkungssphären ist gleich σ. Die Wirkungssphären durchschneiden sich, sobald die Entfernung der Mittelpunkte kleiner als 2σ ist. Die Wahrscheinlichkeit mithin, dass eine Wirkungssphäre eine andere schneidet, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt der einen Wirkungssphäre innerhalb einer Hohlkugel liegt, welche wir um den Mittelpunkt der zweiten Wirkungssphäre mit den Radien σ und 2σ beschreiben. Das Volum dieser Hohlkugel ist $\frac{28}{3}\pi\sigma^3$. Wären demnach in der Volumeinheit nur zwei Molekeln vorhanden, so wäre die Wahrscheinlichkeit, dass eine Wirkungssphäre die andere schneidet, gleich $\frac{28}{3}\pi\sigma^3$. Sind N Molekeln vorhanden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Wirkungssphäre irgend eine andere schneidet, gleich $\frac{28}{3}(N-1)\pi\sigma^3$, oder wenn N sehr gross, gleich $\frac{28}{3}N\pi\sigma^3$. Von diesen N Molekeln werden sich daher zu jeder Zeit $\frac{28}{3}N^2\pi\sigma^3$ durchschneiden.

Diese Folgerungen sind allerdings nur bei der von uns gemachten Voraussetzung richtig, dass sich im Vergleich zur Gesammtzahl der Wirkungssphären überhaupt nur wenig durchschneiden, indem wir dann nur Glieder von höherer Ordnung, als die von uns beanspruchte Genauigkeit verlangt, vernachlässigen. Übrigens können wir zur Zahl der in der Volumeinheit sich durchschneidenden Wirkungssphären auch folgendermassen gelangen.

Denken wir uns eine Molekel als Punkt, die übrigen mit einer Hohlkugel im obigen Sinn umgeben, und fragen wir nach der mittleren Zeit, in welcher der Punkt einen solchen Hohlkugelraum passirt. Wir haben da zu unterscheiden, ob der Punkt ungestört passiren kann, oder ob er auf die innere Kugelfläche stösst. In letzterem Fall legt er dann nach dem Zusammenstoss in Folge der Reflexionsgesetze wieder dieselbe Weglänge in der Hohlkugel zurück, wie vor dem Stoss. Der mittlere Weg des Punktes in der Hohlkugel ist daher

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{2\sigma}\sqrt{4\sigma^2-r^2}\,r\,dr-\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\sigma}\sqrt{\sigma^2-r^2}\,r\,dr=\frac{7}{3}\sigma.$$

Dieser Weg wird in der Zeit $\frac{7}{3}\frac{\sigma}{\bar{r}}$ zurückgelegt, wenn $\bar{r}$ die mittlere relative Geschwindigkeit einer Molekel gegenüber den anderen ist. In der Secunde passirt unser Punkt $4N\pi\sigma^2\bar{r}$-mal die Hohlkugeln. Die Zeit also, während welcher in einer Secunde eine Wirkungssphäre geschnitten wird, ist $\frac{28N\pi\sigma^3}{3}$. Von N Molekeln werden daher $\frac{28}{3}N^2\pi\sigma^3$ beständig geschnitten.

Auch hier haben wir Vernachlässigungen gemacht, indem wir für die Zahl der Zusammenstösse, welche der Punkt mit den Hohlkugeln macht, eine Formel setzten, die nur für sehr verdünnte Gase giltig ist. Doch sieht man hier noch deutlicher als früher, dass die Vernachlässigungen sich nur auf Glieder höherer Ordnung erstrecken.

Die Zahl der freien Wirkungssphären ist also

$$N-\frac{28}{3}N^2\pi\sigma^3.$$

Für die Grösse β im Ausdruck (a) erhalten wir demnach

$$\beta = \left[\left(N - \frac{28}{3} N^2 \pi \sigma^3\right) \pi \sigma^2 + \frac{28}{3} N^2 \pi \sigma^3 \left(\pi \sigma^2 - \frac{11}{112} \pi \sigma^2\right)\right] \bar{r} dt =$$

$$= \left[N \pi \sigma^2 \left(1 - \frac{11}{12} N \pi \sigma^3\right)\right] \bar{r} dt$$

und für die Zahl der Zusammenstösse, welche eine Molekel in der Secunde erfährt,

$$Z = \frac{N \pi \sigma^2 \left(1 - \frac{11}{12} N \pi \sigma^3\right)}{1 - \frac{4}{3} N \pi \sigma^3} \bar{r} = N \pi \sigma^2 \left(1 + \frac{5}{12} N \pi \sigma^3\right) \bar{r} =$$

$$= N \pi \sigma^2 \left(1 + \frac{5}{2} b\right) \bar{r},$$

wenn wir unter b das Volumen der in der Volumeinheit enthaltenen Molekeln verstehen. Die mittlere Weglänge. wird demnach

$$l = \frac{1 - \frac{5}{2} b}{N \pi \sigma^2} \cdot \frac{\bar{u}}{\bar{r}},$$

wenn $\frac{\bar{u}}{\bar{r}}$ das Verhältniss der mittleren absoluten zur mittleren relativen Geschwindigkeit der Molekeln ist.

Während also van der Waals[1] als Correctur für die mittlere Weglänge $4b$, O. E. Meyer[2] $4\sqrt{2b}$ vorschlägt, erhalten wir in Übereinstimmung mit Clausius[3]

$$\frac{5}{2} b.$$

---

[1] Over de continuiteit van den gas en vloeistoftoestand. Leyden 1873. v. F. Roth, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1881, S. 42 ff.

[2] Kinetische Theorie der Gase, 297 ff.

[3] Kinetische Theorie der Gase, 65.

gebettet ist, machte ich nachträglich noch zwei Aufnahmen, wobei das Daumenglied einmal so weit als möglich abducirt, das andere Mai dem Zeigefinger genähert war.

Die beiden Aufnahmen wurden auf Pausepapier kopirt durchgezeichnet) und dann so übereinander gelegt, dass der Metacarpus des Daumens in beiden Zeichnungen zur Deckung gelangte. Beiliegende Figur zeigt die beiden Stellungen, die eine mit ausgezogenen, die andere mit gestrichelten Conturen. Sie lässt sofort ersehen, dass die Nadel nicht im Knochen fixirt ist, da sie mit den Muskeln ihre Stellung zum Knochen ändert.



Mädchenhand mit eing
Nadelspitze nach Rönt
Methode photograp
L. Pfaundler in
19. Jänner 18

Lichtdruck von Max Jaf

Die allgemeine Luftdruckvertheilung und die Gradienten bei Föhn

von

J. M. Pernter.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

Nachdem ich in einer früheren Abhandlung[1] die Eigenschaften des Föhns zur Darstellung gebracht habe, gehe ich nun daran, die Ursachen desselben zu erforschen. Dass sie in erster Linie in der allgemeinen Luftdruckvertheilung zu suchen sein werden, ist wohl von vorneherein und aus der Lehre über die Entstehung der Winde überhaupt klar. Wie dies so sein muss, legt Hann[2] in seiner klaren Weise folgendermassen dar: »Aus den auf den telegraphischen Witterungsberichten basirten täglichen Wetterkarten von Europa hat sich auch ergeben, warum die Luft zeitweilig stürmisch von den Alpenkämmen in die Thäler herabstürzt und so den Föhn erzeugt. Es hängt dies zusammen mit dem Heranrücken der atlantischen Barometerminima oder Sturmcentren gegen Westeuropa. Wenn ein Barometerminimum im Westen oder Nordwesten der Alpen sich befindet, auf der Linie zwischen der Bai von Biscaya und Irland, so strömt die Luft über dem Alpenvorlande als Südost- oder Südwind gegen den Ort kleinsten Luftdruckes hin, aber auch die Luft aus den Alpenthälern wird gegen diese Stelle hingezogen, gleichsam aus den Thälern herausgesaugt. Da die

---

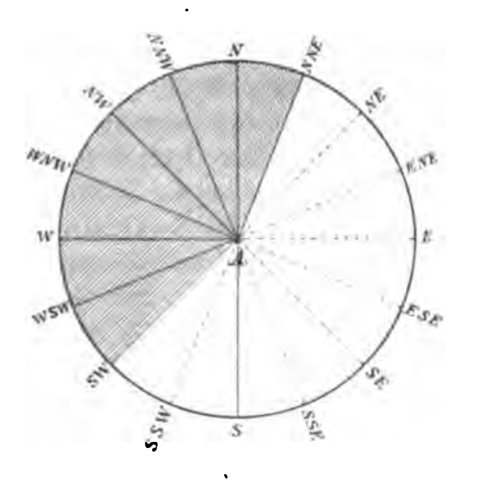
[1] Über die Häufigkeit, die Dauer und die meteorologischen Eigenschaften des Föhns in Innsbruck. Diese Sitzungsber. Bd. 104, S. 427.

[2] Handbuch der Klimatologie. Stuttgart. Engelhorn 1883, S. 215.

Alpenmauer hier das directe Zufliessen aus Süden hemmt, so muss die Luft aus der Höhe, von den Alpenkämmen herab, zum Ersatz herbeifliessen. So entsteht der Föhn«.

Dieser im Wesentlichen sicher richtigen Auffassung folgend, musste ich es mir in erster Linie zur Aufgabe stellen, für alle Tage, an welchen in Innsbruck Föhn auftrat, die Luftdruckvertheilung über Europa festzustellen und daraus auf das Wesentliche zu schliessen, das die erzeugende Ursache des Föhns ist. Ich benützte zu diesem Zwecke die Cartes synoptiques journalières von N. Hoffmeyer, September 1873—November 1876 und die Fortsetzung derselben, herausgegeben vom dänischen meteorologischen Institute und der Deutschen Seewarte von December 1880—November 1889, endlich die täglichen Wetterkarten der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, Jahr 1891—1894. Um Übersicht und Ordnung in die grosse Anzahl von Karten zu bringen, war ich gezwungen, einen grossen Theil derselben nachzuzeichnen, um sie dann nach festen Gesichtspunkten zu gruppiren. Ich zeichnete daher vorerst aus den beiden ersterwähnten Werken 126 Karten für Föhntage heraus, wobei ich die Auswahl so traf, dass ich möglichst verschiedene Lagen, bei welchen Föhn auftrat, herausgriff. Bei der Classificirung dieser 126 Karten nach der Lage der Haupt- und secundären Depressionen zeigte sich, dass sie sich alle in neun Hauptgruppen einordnen, bei welchen Föhn in Innsbruck auftritt. Da nun die Cartes synoptiques journalières von Hoffmeyer und die täglichen synoptischen Wetterkarten des dänischen meteorologischen Institutes und der Deutschen Seewarte auf den genauen, publicirten und revidirten Beobachtungen sich aufbauen und überdies ausser Europa den ganzen nordatlantischen Ocean einschliesslich Nordamerika umfassen, so musste ich mir Klarheit darüber verschaffen, ob die täglichen Wetterkarten der meteorologischen Centralanstalt in Wien, welche nur mit Hilfe der täglichen Witterungstelegramme einer beschränkten Anzahl von Stationen gezeichnet werden können und daher mit noch nicht revidirten Beobachtungsdaten, in Bezug auf die Luftdruckvertheilung bei Föhn zu denselben Resultaten führen. Ich hob daher die Wetterkarten für die Föhntage der Jahre 1891—1894 heraus (ich

besitze sie als lose Blätter) und erhielt so 164 dieser Karten, deren Gruppirung nun, wie zu erwarten war, zu demselben Resultat führte wie die oben genannten Karten. Ich musste nun für jeden Föhntag in Innsbruck, soweit mir die Kartenbehelfe vorlagen, also für die Jahre vom September 1873—December 1876, December 1880—November 1889 (für 1882—1883 stand mir die Publication des Meteorological Council in London zur Verfügung) und Jänner 1891—December 1894 die entsprechende Wetterkarte aufschlagen und mich überzeugen, dass alle in die erwähnten neun Hauptgruppen sich einordnen. Hiebei wirkte nun aber der Umstand, dass die Wetterkarten nur für die Stunde der Morgenbeobachtung gezeichnet sind, vielfach hinderlich. Es kommt ja viel häufiger vor, dass der Föhn tagsüber, Abends oder des Nachts geht als gerade Morgens zur Beobachtungsstunde. Nun kann es aber nicht zweifelhaft sein, dass zur Feststellung der Luftdruckvertheilungen, bei welchen Föhn herrscht, nur jene Tage herangezogen werden können, für welche die Luftdruckvertheilung



der Tagesstunde gezeichnet ist, zu welcher Föhn herrscht. So musste ich nun meine Untersuchung auf die Tage mit Morgenföhn beschränken. Auch diese Beschränkung führte auf die oben erwähnten Gruppen. Das Resultat war mir überraschend; ich will es zum Theile mit Hilfe der beistehenden Figur darlegen. Möge A den Centralalpenkamm, zunächst bei Innsbruck, bedeuten, so ergibt sich in Bezug auf die Lage des Hauptminimums an Föhntagen, dass Föhn auftreten k a n n, wenn das Hauptminimum irgendwo in dem schraffirten Theile liegt, wobei die äussersten Grenzen sind: Nordende des finnischen Meerbusens, Nordskandinavien, Faröer, Westen von Irland, Golf von Biscaya, Golf von Lyon.

Die Umkehrung dieses Satzes ist aber nicht gestattet, da es häufig, sogar sehr häufig, vorkommt, dass wenn in diesen Gebieten Cyclonen auftreten, kein Föhn herrscht. Anderseits ist es gar nicht nothwendig, dass eine eigentliche Cyclone überhaupt vorhanden sei, es genügt, dass in der Nähe von Innsbruck ein secundäres Gebilde sich befinde, um den Föhn zu erzeugen. Dabei braucht diese Secundäre nicht gerade ein geschlossenes Gebiet zu sein, die bekannten secundären Ausbuchtungen der Isobaren reichen vollkommen hin. Aus diesen Ergebnissen kam ich zur Eintheilung der Föhnlagen in neun Hauptgruppen, welche ich mit den Ziffern 1 bis 9 bezeichne, so dass 1 bedeutet: Hauptminimum in NNE; 2 = Hauptminimum in N; 3 = Hauptminimum in NNW u. s. w.; 8 = Hauptminimum in SW; 9 = kein Hauptminimum, aber eine Secundäre am Nordrande der Alpen. Ich gebe zur Verdeutlichung neun Karten bei, welche als Typen für diese neun Gruppen dienen können. Die Tage, welche ausgewählt erscheinen, sind solche, an denen sowohl in Innsbruck, als in Bludenz Morgens Föhn herrschte. Die beigegebenen Karten sind nicht einfach mit 1 bis 9 bezeichnet, sondern jeder Ziffer ist ein *b* hinzugefügt. Dieses *b* dient zur näheren Bestimmung der in den Karten vorgeführten Föhnlagen und bedeutet das Vorhandensein von secundären Ausbuchtungen an der Nordseite der Alpen in der Nähe von Innsbruck und Bludenz. Da diese secundären Ausbuchtungen fast die Regel sind für Föhnlagen — für Innsbruck weisen 70%, für Bludenz 65% der Karten für Morgenföhn dieselben auf — so habe ich für alle neun Gruppen mit *b* bezeichnete Typen ausgewählt, um die charakteristischeste Luftdruckvertheilung bei Föhn zur Darstellung zu bringen. Fehlt die secundäre Ausbuchtung bei sonst gleicher Luftdruckvertheilung, so bezeichne ich dies mit den Buchstaben *a* oder *c*. Hiebei bedeutet der Buchstabe *a* ein directes, deutlich ausgesprochenes Gefälle vom Alpenkamm zum Minimum hin, der Buchstabe *c* aber besagt, dass zwar eine der Gruppen 1 bis 9 vorliege, dass aber vom Alpenkamm her weit hinaus in die Alpenvorlande kein irgend nennenswerthes Gefälle zu erkennen ist, trotzdem noch weiter fort das Minimum gut ausgebildet ist. Mit Hilfe der für die *b*-Lage gegebenen neun Typen wird man,

ohne dass es nöthig wäre, für die *a*-Lage und die *c*-Lage Kartenbeispiele zu geben, leicht sich die Luftdruckvertheilung für die letzteren Lagen vorstellen können.[1] Wenn man nun aber keine Schwierigkeit darin finden dürfte, die *a*-Lagen als föhnerzeugend zu erkennen, so wird dies umsomehr bei den *c*-Lagen der Fall sein; denn wir suchen ja die föhnerzeugende Kraft in einem Minimum, das die Luft aus den nördlichen Alpenthälern gegen sich ansaugt. Wie aber das ganze Gebiet vom Alpenkamm bis weit in die nördlichen, nordwestlichen und westlichen Alpenvorlande hinaus sozusagen gradientlos ist, so wird die Luft der Alpenthäler in Ruhe bleiben, und ein Föhn ist dann ausgeschlossen. Und dennoch tritt Föhn gar nicht selten bei solchen *c*-Lagen auf, ja diese sind sehr viel häufiger als die *a*-Lagen. Das war eine der grössten Überraschungen, die mir bei dieser Untersuchung bereitet wurden. Doch der unverständlichste Punkt hierin liegt in der Thatsache, dass es auch 9*c*-Fälle gar nicht so selten gibt. Die Bezeichnung 9 besagt ohnedies schon, dass es kein Hauptminimum gibt, das seinen Einfluss geltend machen könnte, der Buchstabe *c* bedeutet aber auch den Mangel einer Secundären und überhaupt eines merklichen Gradienten. Es scheint somit 9*c* einfach die Unmöglichkeit einer Luftströmung überhaupt und insbesondere eines Föhns zu bezeichnen. Dennoch tritt wiederholt deutlicher und gut ausgeprägter Föhn bei 9*c* auf.

Diese Verhältnisse sind derart eigenthümlich, dass ich mich verpflichtet sehe, die Belege dafür beizubringen. Leider kann ich diese Abhandlung nicht mit mehr Kartenbeigaben belasten, und so muss ich die Fachcollegen ersuchen, die Karten, die ich bezeichnen werde, in den ihnen Allen zur Verfügung stehenden Kartenwerken aufzuschlagen.

Bevor ich aber zu diesem Nachweise durch Beispiele übergehe, muss ich bemerken, dass ich dieselbe Untersuchung, wie

---

[1] Es wäre die Beigabe so vieler Karten schon an sich aus Rücksicht auf die unverhältnissmässigen Druckkosten nicht thunlich, dann aber würde trotzdem die grosse Mannigfaltigkeit in der Richtung des Laufes der Isobaren und der Gradient doch nicht zur Darstellung kommen können. — Aus Raumrücksichten wurde auch das Kärtchen 1 *b* unterdrückt; diese letztere Lage lässt sich übrigens aus 2*b* leicht vorstellen.

für Innsbruck, auch für Bludenz gemacht, wobei sich herausstellte, dass für Bludenz ganz dieselben Gruppen der Luftdruckvertheilung bei Föhn mit ihren Unterabtheilungen sich ergeben; nur die Gruppe 1 fehlt hier ganz, wohl wegen der westlicheren Lage von Bludenz und der Thalöffnung bei Bregenz.

Auch scheint es mir angezeigt, ehevor ich an verschiedenen Beispielen besondere Auffälligkeiten erläutere und da ich die Fachcollegen doch schon mit Hinweisen auf die Kartenwerke bemühen muss, dass ich für die *a*-Lagen, soweit sie vorkommen, und die *c*-Lagen der verschiedenen Gruppen bestimmte Karten namhaft mache, welche als Typen für diese Lagen gelten können. Schon diese als Typen der *a*-Lage und *c*-Lage angeführten Beispiele werden dem Zwecke dienen, zu zeigen, wie Föhn bei Luftdruckvertheilungen vorkommt, wo man nicht darauf gefasst sein kann.

Für 1*a* gibt es kein Beispiel; diese Lage kommt bei Föhn nicht vor.

für 1*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 7. November 1883 — Föhn in Innsbruck;

für 2*a* diene als Typus die Wetterkarte vom 7. April 1895 — Föhn in Innsbruck;

für 2*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 2. Mai 1891 — Föhn in Innsbruck und Bludenz;

für 3*a* diene als Typus die Wetterkarte vom 10. März 1888 — Föhn in Innsbruck und Bludenz;

für 3*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 16. November 1894 — Föhn in Innsbruck;

für 4*a* diene als Typus die Wetterkarte vom 17. October 1883 — Föhn in Bludenz;

für 4*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 2. September 1883 — Föhn in Innsbruck;

für 5*a* diene als Typus die Wetterkarte vom 20. Jänner 1895 — Föhn in Innsbruck;

für 5*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 1. Mai 1889 — Föhn in Innsbruck;

für 6*a* gibt es kein Beispiel; kommt nicht vor.

für 6*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 9. October 1893 — Föhn in Bludenz und Innsbruck.

für 7*a* gibt es kein Beispiel; kommt nicht vor.

für 7*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 18. Juni 1895 — Föhn in Bludenz;

für 8*a* gibt es kein Beispiel; kommt nicht vor.

für 8*c* diene als Typus die Wetterkarte vom 25. Mai 1895 — Föhn in Innsbruck und Bludenz;

für 9*c* (es kann eben kein 9*a* geben) diene als Typus die Wetterkarte vom 1. December 1893 — Föhn in Innsbruck.

Schon diese als Typen angeführten Beispiele zeigen mehrfach, dass man aus der allgemeinen Luftdruckvertheilung, wie sie die Wetterkarten wiedergaben, nur allzu oft nicht im Stande ist, die erzeugende Ursache des Föhns zu erkennen. Wer die eben angeführten Karten sich angesehen hat, den wird es nicht mehr überraschen, wenn ähnliche Beispiele ihm nicht eben selten vorkommen. Ich will nur noch einige recht auffallende anführen.

Beispiele für Föhnlagen 9*c*: 3. Mai 1881, Föhn in Innsbruck und Bludenz. — 2. Mai 1882, Föhn in Innsbruck. — 14. September 1884, Föhn in Innsbruck. — 15. März 1888, Föhn in Innsbruck. — 17. Mai 1888, Föhn in Innsbruck. — 23. September 1888, Föhn in Bludenz. — 14. Mai 1889, Föhn in Innsbruck. — 23. Mai 1889, Föhn in Innsbruck. — 31. Mai 1889, Föhn in Bludenz. — 15. Mai 1893, Föhn in Bludenz. — 1. April 1894, Föhn in Bludenz. — 16. Mai 1894, Föhn in Bludenz.

Wer diese Beispiele anzusehen sich die Mühe genommen, für den muss es bis zur Augenscheinlichkeit klar sein, dass der Föhn nicht nur bei solchen Luftdruckvertheilungen vorkommt, wo ein stark ausgeprägtes Minimum im NW oder W die Luft aus den Alpenthälern aussaugt. Es wäre mir ein leichtes, diese angeführten Beispiele durch Beibringung von verschiedenen Fällen von Föhn bei anderen *c*-Lagen zu vervielfachen, doch ist der angestrebte Zweck wohl schon vollauf mit den Fällen von 9*c* erreicht. Damit man sich aber bequem und voll überzeugen könne, dass in diesen Fällen in der That zur Zeit der Morgenbeobachtung (für welche Zeit ja die Wetterkarten entworfen sind) Föhn in Innsbruck oder Bludenz oder gleichzeitig an beiden Orten herrschte, habe ich die Beobachtungen dieser Tage herausgeschrieben und als Tabelle hier beigegeben; ich beschränkte mich auf die Wiedergabe der

drei für Föhn in erster Linie charakteristischen Elemente: Temperatur, Feuchtigkeit und Wind.

Wenn nun auch solche scheinbar unmotivirte Föhne nicht geradezu selten sind, so bilden sie doch gegenüber der Gesammtzahl der Föhnfälle eine verhältnissmässig geringe Anzahl. Das zeigt uns die folgende Zusammenstellung für Innsbruck und Bludenz für die Zeiträume: Jänner 1881 bis September 1882, September 1883 bis December 1884, September 1887 bis December 1889, Jänner 1891 bis December 1891, Jänner 1893 bis November 1895. Ich hatte zwar für Innsbruck dieselbe Zusammenstellung für den Zeitraum Jänner 1881 bis December 1889 und Jänner 1891 bis December 1894 gemacht und werde auch diese Tabelle unten beigeben; ja ich habe die Jahre September 1873 bis November 1876 auch schon ausgezogen gehabt. Letztere liess ich fallen, weil ich bei Bestimmung der Gradienten, wovon später die Rede sein wird, sie nicht benützen konnte. In der Fortsetzung meiner Untersuchungen erschien es aber höchst wünschenswerth, Bludenz als ausgezeichnete Föhnstation mit hereinzuziehen, und da war ich gezwungen, mich nur an jene Zeiträume zu halten, in welchen genügend verlässliche Beobachtungen vorlagen. Leider hat der gegenwärtige ausgezeichnete, in jeder Weise verlässliche Beobachter in Bludenz, Baron Sternbach, nur in den Zeiträumen von Jänner 1870 bis September 1873, von September 1887 bis December 1889, von Jänner 1891 bis December 1891 und von Jänner 1893 bis jetzt gewirkt. Von den anderen Jahren konnte ich nur noch die Beobachtung von Jänner 1881 bis December 1884 benützen. Für meine Untersuchungen entfielen aber von diesen Beobachtungen Jänner 1870 bis September 1873 und October 1882 bis August 1883, da hiefür keine Wetterkarten vorlagen. So kommt es, dass ich die folgenden zwei Tabellen auf die restlichen Jahre beschränken musste: Jänner 1881 bis September 1882, September 1883 bis December 1884, September 1887 bis December 1889, Jänner 1891 bis December 1891 und Jänner 1893 bis November 1895. (Die 11 Monate von 1895 habe ich noch nachträglich bei der Überprüfung einbezogen.) Die aus diesen Zeiträumen erhaltenen Tabellen für Innsbruck und Bludenz folgen hier.

Beobachtungen

an einigen Föhntagen in Innsbruck und Bludenz, wo die allgemeine Luftdruckvertheilung nicht auf Föhn schliessen lässt.

Ort	Tag	Jahr	Temperatur			Feuchtigkeit			Wind			Föhnlage
			7	2	9	7	2	9	7	2	9	
Innsbruck	3. Mai	1881	14·0	18·4	14·4	—	—	—	SE_6	SE_8	SE_3	9 *c*
Bludenz	3. Mai	1881	14·8	17·8	12·4	47	41	73	—0	E_1	—0	
Innsbruck	2. Mai	1882	16·4	12·4	9·0	—	—	—	SW_6	SW_3	NE_1	9 *c*
Innsbruck	2. September	1883	18·3	22·1	16·1	81	66	91	SW_4	SE_8	SW_4	4 *c*
Innsbruck	7. September	1883	7·0	15·2	7·4	71	49	83	SW_4	S_6	SE_1	1 *c*
Innsbruck	14. September	1884	15·0	21·5	15·0	64	21	76	S_3	SE_3	SW_3	9 *c*
Innsbruck	15. März	1888	4·6	10·2	4·8	65	60	74	SW_4	E_3	E_1	9 *c*
Innsbruck	17. Mai	1888	14·7	24·0	18·0	56	45	52	SW_2	SE_4	SE_1	9 *c*
Bludenz	23. September	1888	12·2	22·0	13·0	74	43	85	S_2	NW_3	NE_2	9 *c*
Innsbruck	14. Mai	1889	16·2	23·0	18·8	54	34	51	SW_2	SE_5	SE_5	9 *c*
Innsbruck	23. Mai	1889	15·6	22·8	18·8	53	39	56	SW_2	SE_4	SE_3	9 *c*
Bludenz	31. Mai	1889	18·7	28·8	18·0	54	24	67	SE_3	NW_3	SW_2	9 *c*
Innsbruck	2. Mai	1891	10·2	24·6	19·4	—	—	—	S_1	S_8	S_2	2 *c*
Bludenz	2. Mai	1891	14·0	24·4	19·2	26	20	53	SE_5	SE_5	SE_4	
Bludenz	15. Mai	1893	14·0	22·0	14·4	60	33	70	SE_3	NW_3	—0	9 *c*
Innsbruck	9. October	1893	12·0	26·2	21·7	75	55	62	S_2	S_1	S_4	6 *c*
Bludenz	9. October	1893	12·6	28·4	19·8	66	14	36	SE_2	SE_5	SE_2	
Innsbruck	1. December	1893	4·6	10·0	3·1	68	60	84	SW_1	NW_1	—0	9 *c*
Bludenz	1. April	1894	8·0	15·2	8·6	41	25	52	SE_3	NW_4	—0	9 *c*
Bludenz	16. Mai	1894	16·4	23·2	15·8	51	40	68	SE_3	NW_4	—0	9 *c*
Innsbruck	16. November	1894	14·6	16·4	7·3	45	51	87	S_3	SW_1	SW_2	3 *c*
Bludenz	25. Mai	1895	13·0	17·0	12·0	75	61	84	SE_2	NW_4	—0	8 *c*
Innsbruck	25. Mai	1895	12·2	16·4	15·1	73	45	49	SW_3	NW_4	S_2	
Bludenz	18. Juni	1895	16·4	26·4	20·6	66	30	38	SE_2	SE_3	SE_3	7 *c*

Föhnlagen zur Morgenbeobachtungsstunde.

Innsbruck (1)					Bludenz					Innsbruck (2)				
Gruppe	*a*	*b*	*c*	Summe	Gruppe	*a*	*b*	*c*	Summe	Gruppe	*a*	*b*	*c*	Summe
1	0	2	1	3	1	0	0	0	0	1	0	2	3	5
2	1	4	4	9	2	7	5	3	15	2	1	4	4	9
3	8	10	3	21	3	11	20	11	42	3	8	11	4	23
4	5	28	4	37	4	11	37	8	56	4	8	35	8	51
5	1	9	2	12	5	3	15	7	25	5	3	30	7	40
6	0	11	2	13	6	0	18	3	21	6	0	20	11	31
7	0	4	0	4	7	0	5	3	8	7	0	10	4	14
8	0	2	2	4	8	0	3	1	4	8	0	3	3	6
9	—	25	9	34	9	—	13	9	22	9	—	28	13	41
Summe	15	95	27	137	Summe	32	116	45	193	Summe	20	143	57	220

Innsbruck (2) ist aus den Jahren 1881—1889 und 1891 bis 1894 inclusive genommen; diese letzteren Angaben sind allerdings nicht überprüft wie die anderen zwei [Innsbruck (1) und Bludenz], allein im Wesentlichen dürften sie richtig sein.

Vorerst eine Bemerkung über die absolute Anzahl von Tagen mit Morgenföhn. Bludenz übertrifft darin Innsbruck um ein bedeutendes. Wenn man aber aus den gleichen Zeiträumen alle Tage, an denen Föhn zu was immer für einer Tageszeit herrschte, für beide Stationen auszählt, so wird der Überschuss an Föhntagen für Bludenz nicht mehr so bedeutend; es ergeben sich dann für Innsbruck 388 und für Bludenz 421 Föhntage. Diese Auszählung ist zwar nicht strenge überprüft, wird aber im Wesentlichen richtig sein. Man ersieht aus diesen letzteren Zahlen auch, dass der Föhn viel öfter zu anderen Tagesstunden weht, als gerade zur Zeit der Morgenbeobachtung, und daraus ergibt sich auch, wie ungünstig es für die vorliegende Untersuchung war, dass für die Zeit der Mittags- und Abendbeobachtungen keine Wetterkarten zur Verfügung standen. Aller-

dings fallen die Hauptwirkungen des Föhns, die Erhöhung der Temperatur und die Verminderung der Feuchtigkeit, gerade in den Morgenstunden am meisten auf, und so hatte der bezeichnete Mangel den Vortheil, gerade die sichersten Fälle als Grundlage der Untersuchungen übrig zu lassen.

Die Discussion der gegebenen Tabellen lehrt uns, dass die Gruppe 1 für Bludenz fehlt. Es ist dies nicht auffallend, im Gegentheil es überrascht vielmehr, dass bei einer Luftdruckvertheilung, wo das Hauptminimum in NNE liegt, Innsbruck Föhn haben kann. Doch auch in Innsbruck fehlt 1*a*, und man könnte geneigt sein, die vorkommenden 1*c* lieber unter 9*c* einzuordnen, sowie die 1*b* den 9*b* beizuzählen. Letzteres ist aber sicher nicht gestattet und ersteres wäre doch zu kühn. Ferner sieht man, dass bei den Gruppen 6, 7 und 8 die *a*-Lage nicht vorkommt. Die *a*-Lagen kommen für Innsbruck überhaupt fast nur bei den Gruppen 3 und 4 vor, in Bludenz auch bei 2 und 5 öfters. Da Bludenz mehr gegen Westen liegt und das Thal seinen Ausgang zum Bodensee hat, so dürfte hierin die Ursache der öfteren *a*-Lagen für Bludenz zu suchen sein. Das bei weitem wichtigste Resultat, das die obigen Tabellen geben, besteht aber in dem gewaltigen Überwiegen der *b*-Lagen gegenüber den anderen zweien. Wenn wir die Procente der Gesammtzahl nehmen, so ergeben sich für Innsbruck: *a*-Lage 11%, *b*-Lage 69%, *c*-Lage 20%; für Bludenz: *a*-Lage 17%, *b*-Lage 60%, *c*-Lage 23%. Ich ziehe daraus den Schluss, dass die secundären Ausbuchtungen nördlich nächst dem Centralalpenkamme eine besondere Bedeutung bei der Erzeugung des Föhns haben müssen, und dies gibt mir einen Fingerzeig für die Erklärung anderer Eigenthümlichkeiten der Tabelle, besonders wenn man noch die auffallend hohe Ziffer der Fälle für 9*b* in Betracht zieht. Aus dem letzteren Umstande erkennt man, dass das Hauptminimum für die Erzeugung des Föhns nicht wesentlich ist; es scheint aber anderseits, dass es doch eine hinreichende Anzahl Fälle der *a*-Lage gibt, um annehmen zu müssen, dass das Hauptminimum allein ebenfalls hinreicht zur Erzeugung des Föhns und daher auch die secundären Ausbuchtungen dazu nicht wesentlich nothwendig seien. Das könnte man ja allenfalls auch für richtig ansehen. Allein ich komme theils

durch die Betrachtung der Fälle der *c*-Lage, theils durch näheres Anschauen der Innsbruck oder Bludenz nächsten Isobare bei *a*-Lagen zum Schlusse, dass jeder Föhn von einer Secundären jedenfalls mit verursacht wird, ja ich halte es sogar für wahrscheinlich, dass die unmittelbare und eigentliche Ursache des Föhns stets eine Secundäre ist. Folgende Erwägungen führten mich zu dieser Ansicht. Eine immerhin beträchtliche Anzahl von Föhnfällen tritt bei *c*-Lagen auf, also bei einer Luftdruckvertheilung, wo das Hauptminimum nicht mehr wohl als erzeugende Ursache des Föhns gelten kann und Secundäre ganz zu fehlen scheinen. Ganz besonders gilt dies bei den 9*c*-Lagen. Da aber der Föhn eine Luftströmung ist, die gar häufig auch in den genannten Fällen ziemlich kräftig auftritt, so muss jedenfalls ein Gradient bestehen, welcher das Ausströmen der Luft aus den Alpenthälern verursacht. Dass ein Hauptminimum, das entweder keinen Einfluss hat oder gar nicht einmal besteht, diesen Gradienten nicht erzeugt, ist in den letztgenannten Fällen klar. Es erübrigt daher nur, dass ein secundäres Minimum im Alpenvorlande nächst den Alpen vorhanden sei, das auf den allgemeinen Wetterkarten nicht zu erkennen ist. Dass dies sehr leicht möglich ist, wissen wir ja auch schon, da erstlich die Stationen, welche die Grundlage für die Zeichnung der Wetterkarten bilden, viel zu weit auseinanderliegen, und zweitens und hauptsächlich, weil diese Wetterkarten nur für Druckintervalle von 5 *mm* entworfen sind. Es ist daher nicht zu bezweifeln, dass auch bei den *c*-Lagen Secundäre vorhanden sind, welche als die eigentliche Ursache des Föhns bei diesen Lagen anzusehen sind. Nachdem wir aus der 9*b*-Lage erfahrungsgemäss wissen, dass Secundäre auch ohne Hauptminimum, ohne Cyclone, die erzeugende Ursache des Föhns thatsächlich zuweilen sind, so ist mit der obigen Annahme keine Schwierigkeit mehr verbunden.

Ich gehe noch weiter. In manchen *a*-Lagen, in welchen doch der directe Gradient von der Cyclone her den Föhn erzeugen könnte, finden sich mannigfache leichte Biegungen der dem Alpenkamme zunächst liegenden Isobare. Diese Andeutungen von Secundären selbst bei *a*-Lagen lassen vermuthen, dass es in gar keinem Falle von Föhn ohne Bildung von Secundären

abgehe. Es fällt mir allerdings nicht ein, aus reiner Freude an der Einheitlichkeit der föhnerzeugenden Ursache, die Unmöglichkeit eines vom directen Gefälle zum Mittelpunkt der Cyclone hervorgebrachten Föhns zu behaupten; man könnte ja auch wohl mit dem Resultat zufrieden sein, dass die föhnerzeugende Ursache einmal nur eine Secundäre — 9*b* und alle *c* — das anderemal nur eine Hauptcyclone mit dem directen Gradienten — *a*-Lagen — endlich am häufigsten die Combination beider Ursachen — *b*-Lagen — sei. Wenn ich dennoch das Vorhandensein einer secundären Bildung auch bei den *a*-Lagen annehmen zu sollen glaube, so bewegen mich hiezu zwei Gründe.

Erstens müsste bei den *a*-Lagen, wenn keine Secundäre bei der Föhnerzeugung mitwirkt, die Windstärke des Föhn wohl dem Gradienten proportional sein. Das ist aber nicht der Fall, wie die beigegebene Tabelle für Bludenz darthut. Ich habe zu diesem Nachweise Bludenz ausgewählt, das westlicher liegt als Innsbruck und letzteres gegen Nordwest von hohen Bergketten umgeben ist, welche bewirken müssen, dass die nordwestlichen Gradienten weniger direct wirken können. Um nicht allein auf die Windschätzungen der Morgenstunde angewiesen zu sein, gebe ich in der Tabelle auch die Temperatur und Feuchtigkeit wieder, und um eine allgemeinere Beurtheilung zu ermöglichen, nicht nur die Morgen-, sondern auch die Mittag- und Abendbeobachtung. Sie enthält alle Fälle der *a*-Lage für Bludenz für die schon mehrfach angegebenen Zeiträume, auf welche sich auch die früheren Tabellen beziehen. Die Gradienten sind in Millimetern auf den Äquatorgrad (111 *km*) gegeben. Man ersieht aus der Tabelle, dass nicht nur die Windstärke den Gradienten nicht proportional ist, sondern auch in der Intensität des Föhns in Bezug auf Temperaturerhöhung und Trockenheit eine solche Proportionalität nicht zu finden ist.

Die in der Tabelle mit * versehenen Tage sind diejenigen, welche gleichzeitig in Bludenz und Innsbruck Morgenföhn aufweisen; es sind für die *a*-Lage deren nur 7. Im Ganzen gab es für die bezeichneten Zeiträume in Innsbruck 15mal Föhn des Morgens bei *a*-Lagen, in Bludenz 32mal. Man mag daraus

Gradienten bei a-Lagen für Bludenz.

Datum	Gradient bei Bl.	Gradient Allgemein	t 7	t 2	t 9	f % 7	f % 2	f % 9	Wind 7	Wind 2	Wind 9	Föhntage
7. März 1881	2·41	2·26	11·2	18·1	7·8	73	59	84	S_3	S_1	—0	4 *a*
24. März 1881	5·05	2·67	8·0	11·4	10·4	54	54	52	E_2 [1]	NE_2	NE_2	3 *a*
27. Nov. 1881	4·42*	3·80	12·0	15·0	14·0	34	32	32	E_2 [1]	E_2	E_3	4 *a*
28. Nov. 1881	1·91*	3·07	9·0	10·0	6·1	74	63	88	—0	W_2	—0	3 *a*
18. Dec. 1881	4·42	5·02	5·3	9·4	4·2	70	57	97	SW_2	—0	—0	3 *a*
26. Febr. 1882	2·77*	2·55	3·0	14·0	8·4	74	30	21	S_1	S_2	—0	4 *a*
1. März 1882	2·13	3·00	6·1	7·0	5·0	70	76	75	E_1 [1]	S_1	SW_1	5 *a*
17. Oct. 1883	3·08	3·04	13·8	17·2	15·4	66	55	64	SE_5	SE_2	SE_4	4 *a*
11. März 1884	2·77	3·04	8·4	16·0	12·0	75	47	54	SE_5	SE_6	SE_4	5 *a*
17. Dec. 1887	2·13	2·30	5·4	6·8	2·8	49	74	80	SE_3	NE_2	SW_2	3 *a*
18. Dec. 1887	2·05	2·18	2·0	3·0	0·0	51	62	89	SE_3	NW_2	W_2	2 *a*
19. Dec. 1887	3·90	1·91	1·4	2·7	—1·9	43	53	94	SE_4	SE_4	E_2	3 *a*
11. Febr. 1888	2·13	1·96	1·8	5·2	—2·2	69	60	87	SE_3	NW_2	—0	3 *a*
9. März 1888	3·08	2·72	2·0	11·0	5·2	64	34	57	E_1	S_2	SW_1	4 *a*
10. März 1888	3·70*	2·78	4·2	7·0	3·8	74	79	83	SW_1	W_2	SW_1	3 *a*
27. März 1888	2·05*	1·86	10·0	19·6	7·0	46	23	79	SE_3	SE_5	N_4	3 *a*
28. Sept. 1889	1·85	1·87	7·2	17·8	13·2	77	44	66	SE_2	SE_3	S_3	2 *a*
4. Oct. 1889	2·05	1·53	9·2	16·0	9·5	32	28	50	SE_5	SE_4	SE_3	5 *a*
21. Aug. 1891	1·91	2·30	17·0	22·1	15·3	34	47	78	SE_4	W_2	S_2	4 *a*
14. Dec. 1891	1·63	2·02	4·4	3·2	5·0	74	83	54	SE_3	S_2	N_5	2 *a*
10. Febr. 1893	3·47	3·22	1·4	0·6	1·4	59	89	87	SE_4	NW_2	SE_2	3 *a*
16. Febr. 1893	4·23	2·72	6·2	13·1	3·8	34	22	54	SE_5	SE_4	SE_2	4 *a*
21. Febr. 1893	2·00	1·80	0·0	9·8	7·4	76	27	30	SE_2	SE_5	SE_3	4 *a*
13. März 1893	2·77	3·00	8·4	19·2	6·8	30	19	52	SE_4	W_2	SE_2	2 *a*
6. Oct. 1893	2·22*	2·14	21·2	26·2	16·6	37	34	57	SE_1	SE_5	SE_2	3 *a*
14. Dec. 1893	2·41	1·44	7·6	9·4	4·6	55	59	84	SE_2	SE_1	—0	3 *a*
17. Jän. 1894	1·91	2·90	—0·4	4·0	1·0	92	61	81	SE_2	N_2	S_2	4 *a*
23. Jän. 1894	1·59	1·86	5·6	9·6	3·8	40	28	62	SE_5	SE_4	N_2	2 *a*
12. Febr. 1894	1·98	1·46	2·0	12·0	6·6	64	40	74	SE_3	SE_2	NW_4	2 *a*
2. Oct. 1895	3·47*	3·77	14·0	24·2	18·8	65	33	57	SE_2	SW_2	NW_4	4 *a*
6. Nov. 1895	1·68	2·20	8·0	14·4	12·0	72	55	79	SE_1	W_2	SE_3	4 *a*

[1] In den Jahren 1881—1884 findet man wiederholt E statt SE verzeichnet. Was aber kein Fehler in der richtigen Schätzung der Windrichtung ist, das sind die NE, NW und N bei Föhn. Ich habe alle diese Fälle ausgeschaltet und bei meiner Untersuchung nicht einbezogen.

Weil ich ganz dieselbe Erscheinung in Innsbruck wieder fand, will ich dieselbe näher untersuchen, um feststellen zu können, ob man es hiebei vielleicht mit Nordföhn zu thun habe. Ich glaube aber schon heute sagen zu können, dass diese Fälle nicht Nordföhn sind. Hann (Föhn in Bludenz) führt sie auf den Windwechsel beim Vorübergange secundärer Depressionen zurück. Mir will scheinen, dass sie ein Rückstoss des Föhn von den vorliegenden Bergen des Nordens sein könnten.

erkennen, dass in der That Bludenz für *a*-Lagen günstigere Bedingungen besitzt.[1]

Da ich nun schon die Frage des gleichzeitigen Auftretens von Föhn in Innsbruck und Bludenz berührt habe, möge es gestattet sein, für den Morgenföhn überhaupt die Anzahl der Gleichzeitigkeiten zur Darstellung zu bringen. Die nachfolgende Tabelle, welche sich auf denselben Zeitraum bezieht, gibt darüber Aufschluss.

Gleichzeitiger Morgenföhn in Innsbruck und Bludenz.

Gruppe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Summe
a	0	0	4	3	0	0	0	0	—	7
b	2	2	8	21	8	8	2	2	10	61
c	0	1	1	3	1	1	0	1	2	10
Summe	0	3	13	27	9	9	2	3	12	78

Ich bemerke noch, dass ich anfänglich in meine Untersuchung alle Föhntage, auch jene, an welchen der Föhn zu einer beliebigen anderen als der Stunde der Morgenbeobachtung herrschte, einbezogen hatte. Aus der allgemeinen Zusammenstellung ersehe ich, dass Bludenz oft Föhn hat, während Innsbruck keinen hat und umgekehrt — ersteres

[1] Ich habe die Gradienten für die *a*-Lagen in Innsbruck ebenfalls bestimmt, ja ich habe dies sogar für alle Tage mit Morgenföhn gethan, wo ein Gradient auf der Karte vorhanden war. Ich bringe diese riesigen Tabellen aber nicht bei, weil sie nichts Anderes besagen als die obige und daher nur überflüssiger Ballast wären. Ich habe ferner untersucht, ob vielleicht die Richtung des Laufes der Isobaren ohne Rücksicht auf ein Haupt- oder secundäres Minimum eine Erklärung dafür gibt, dass der Föhn das einemal auftritt, das anderemal nicht. Ich schrieb mir zu diesem Zwecke für alle Föhntage den Lauf der Isobaren heraus. Es ergab sich, dass wohl meistens dieser Lauf im Westen etwa SW—NE, häufig auch S—N ist, bei den Alpen meist eine Knickung oder Biegung gegen Ost erhält, um dann wieder eine mehr nördliche Richtung anzunehmen; allein es gibt viele Fälle, wo der Lauf der Isobare W—E oder gar WNW—ESE ist. Die Richtung des Laufes der Isobaren ist daher nicht als föhnerzeugende Ursache anzusehen, wenn auch ein S—N oder SW—NE-Lauf dem Föhn günstiger zu sein scheint.

öfter. Das gilt nicht nur von jenen Föhnwinden, welche in Bludenz oder Innsbruck um Stunden oder einen Tag früher auftreten als an der anderen Station; es gibt zahlreiche Fälle, wo der Föhn nur an der einen Station einfällt und die andere davon weder früher, noch später heimgesucht wird. Ich hatte gehofft, aus diesen Tagen mit Hilfe der Wetterkarten nähere Aufschlüsse über die Bildung secundärer Minima zu erhalten; doch blieben die darauf verwendeten Arbeiten ohne Erfolg.

Der zweite Grund, warum ich auch bei *a*-Lagen das Vorhandensein von secundären Minima für wahrscheinlich ansehe, ist mehr theoretischer Natur. Mir scheint es unmöglich, dass eine starke Cyclone, welche bis in die Vorlande der Alpen sich ausbreitet, in den Alpenthälern nicht bewirke, dass dort eine locale stärkere Erniedrigung des Luftdruckes sich bilde, als es ohne das Vorhandensein des Alpenkammes der Fall wäre, da doch ein Ersatz der gegen die Cyclone abströmenden Luft im selben Niveau durch das Bergmassiv verhindert wird. Wir sehen dies auch unzähligemale auf den täglichen Wetterkarten zum Ausdruck gebracht, wo sich die Isobaren fast regelmässig am Nordrande der Alpen entlang ausbuchten. Sobald aber auf diese Weise eine Secundäre sich zu bilden begonnen, wird diese Bildung durch die Föhnluft selbst genährt und verstärkt. Sobald nämlich der Ersatz der unten weggeführten Luft von oben beginnt, erwärmt sich die ganze Masse der niedersinkenden und dann unten abströmenden Luft bedeutend gegenüber der draussen in der Cyclone befindlichen, und die warme Luft bewirkt in Folge ihrer geringeren Dichte eine weitere Ausbildung des schon aus mechanischen Ursachen entstandenen secundären Minimums. Letzteren Umstand hat schon Hann hervorgehoben.

Sind meine Gründe beweisend genug, so gibt es keinen Föhn ohne eine secundäre Depression in der nächsten Nähe der Föhnstationen. Um diesen Satz exact nachweisen zu können, müsste man nun aber für alle diese Föhntage der *a*-Lage, aber auch für die der *c*-Lagen, Karten der Luftdruckvertheilung in den Föhngegenden und den Alpenvorlanden in bedeutend vergrössertem Massstabe und in Druckintervallen von nur einem

Millimeter entwerfen. Dabei wird auch der Umstand zu berücksichtigen sein, dass die Reduction auf das Meeresniveau bedenklich ist für die Seehöhe der Föhnstationen an sich und besonders bei den gestörten Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnissen der Föhnstationen, und dass es sich daher empfehlen wird, die Reduction auf 500 *m* Seehöhe auszuführen. In dieser Weise hat Bilwiller (Meteorologische Zeitschrift, 1895, S. 201) Karten für den 13. Jänner 1895, und zwar für 7a., 1 p. und 9 p. entworfen. Allerdings zeigte schon die allgemeine Wetterkarte für diesen Föhntag die Secundäre sehr deutlich (Lage 4*b*). Mir mangelt nun leider das Material zur Durchführung einer solchen Untersuchung, doch hoffe ich, dass Jemand, dem es zur Verfügung steht, die Arbeit machen wird oder dass es einmal mir zugänglich gemacht wird.

Hier muss ich noch eine Bemerkung anknüpfen, welche ich bei der häufigen Durchsicht der Wetterkarten von 1881 bis 1894 machte und die ebenfalls geeignet ist, die Bildung secundärer Minima als eine nothwendige Bedingung des Föhns erscheinen zu lassen. Wiederholt fragt man sich beim Anblick einer Karte für einen Tag von Morgenföhn in Bludenz, warum bei dieser Lage nicht auch gleichzeitig in Innsbruck Föhn weht; das Gleiche begegnet Einem auch bei Föhn in Innsbruck, wo er in Bludenz fehlt. Das Erstaunlichste ist aber, dass bei ausgesprochenen Föhnlagen wiederholt weder in Innsbruck, noch in Bludenz Föhn auftritt. Ich habe viele Tabellen ausgezogen, Reihenfolgen von Karten herausgezeichnet und die Veränderung der allgemeinen Luftdruckvertheilung von Tag zu Tag verfolgt, den gleichzeitigen Gang des Luftdruckes in Innsbruck und Bludenz in langen Tabellen für solche Tage verglichen — Alles erfolglos, die ganze riesige Arbeit war umsonst gemacht, wenn man nicht folgende bei dieser resultatlosen Arbeit immer lebhafter in mir hervorgetretene Vermuthung als ein Resultat ansehen will: Mag die allgemeine Vertheilung des Luftdruckes scheinbar dem Föhn sehr günstig sein oder aber keine Andeutung der Möglichkeit eines Föhns aufweisen, Föhn tritt nur dann und dann sicher auf, wenn die Bedingungen zur Bildung einer secundären Depression in den Föhnthälern

und Alpenvorlanden gegeben sind und diese Bildung auch wirklich zu Stande kommt. Welche Bedingungen die Bildung dieser secundären Depressionen erfordert, wird sich wohl ebenfalls erst aus der genauen Untersuchung nach Art der erwähnten von Billwiller ergeben können.

Die Resultate dieser ganzen Untersuchung sind kurz folgende: 1. Föhn tritt bei den verschiedensten Luftdruckvertheilungen auf und beschränkt sich durchaus nicht darauf, als Folgeerscheinung von im Westen bis Nordwesten oder Nordnordwesten auftretenden Cyclonen, die ihre Wellen bis an den Wall des Centralalpenstockes werfen, sich einzustellen. Selbst bei ganz flachen Minimis in WSW und SW, bei denen ein Einfluss auf die Nordseite der Alpen sowohl wegen der Lage, als wegen der Flachheit des Gefälles kaum zu erwarten wäre, kommt starker Föhn vor, ja sogar bei Luftdruckvertheilungen, wo ein ganz gleichmässig gradientloses Gebiet von den Alpen bis zur Nordsee und dem Atlantischen Ocean sich ausdehnt, wird wiederholt kräftiger Föhn beobachtet.

Dieses erste Resultat der Untersuchung ist ein positiv sichergestelltes.

2. Die Ursache des Föhns scheint unmittelbar immer eine secundäre Depression zu sein, welche sich in den Vorlanden der Alpen und den Föhnthälern bildet.

Dieses zweite Resultat ist höchst wahrscheinlich, um es zur Gewissheit zu erheben, bedarf es noch weiterer, auf grösserem Materiale fussender Untersuchungen über die Luftdruckvertheilung in den Alpen und Vorlanden derselben bei Föhn nach dem Vorgange von Billwiller.

3. Der Grund, warum bei Luftdruckvertheilungen, die ganz jenen gleich sind, bei welchen anderemale Föhn ging, kein Föhn auftritt, könnte muthmasslicherweise darin liegen, dass Föhn erst sich einstellen kann, wenn die Möglichkeit der Bildung einer secundären Depression vorliegt und diese sich auch bildet, in den erwähnten Fällen es zu dieser Bildung aber nicht kam.

Dieses ist kein Resultat, sondern nur eine nicht ganz grundlose Vermuthung.

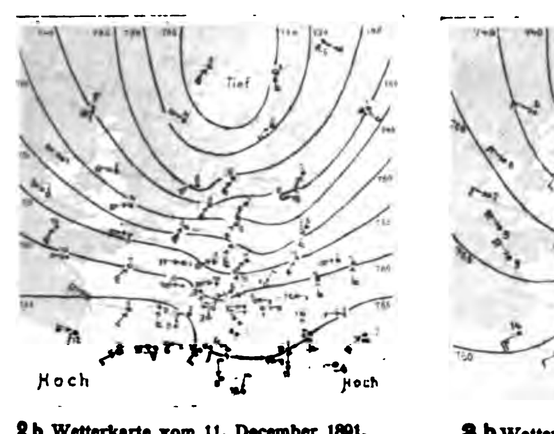
Ich schliesse mit einigen Bemerkungen über frühere Ansichten bezüglich der Ursachen des Föhns. Durch die oben citirte Abhandlung Billwiller's über den Föhn vom 13. Jänner 1895 wurde ich auf eine Arbeit von F. F. Hébert aufmerksam, die ich aber im Original nicht nachsehen kann. Es wird dies auch nicht nöthig sein, da Billwiller darüber in der Zeitschrift für Meteorologie, Bd. 13, referirte. Hébert's Arbeit findet sich im Atlas météorologique de françe, tome VIII, 1876. Dass seine Auffassung des Föhns falsch ist, geht schon daraus hervor, dass er »in ganz unmotivirter Weise die Hann'sche Theorie verwirft«. Er hält den Föhn und den Scirocco für dasselbe und steht bezüglich der Cyclonentheorie auf dem Standpunkte Faye's, indem er annimmt, dass in den von oben herab sich bildenden Wirbeln die Luft von oben nach unten gerissen wird. So soll auch der Föhn stets durch kleine derartige »partielle« Wirbel erzeugt werden, die durch den »Anprall der grossen Cyclonen an den bis 4000 *m* hohen Gebirgsmassen« sich bilden. Es ist nun sicher unrichtig, dass in den »partiellen Wirbeln« die Luft von oben nach unten geführt wird; aus meinen Untersuchungen geht auch deutlich hervor, dass auch ohne den »Anprall der grossen Cyclonen« an die Alpen Föhn auftritt, aber darin dürfte etwas Wahres liegen, dass jeder Föhn einem »partiellen Wirbel« zu verdanken sei, wenn man darunter eine secundäre Depression versteht. Freilich ist das nicht der Sinn, den Faye und mit ihm Hébert mit dem Ausdrucke »partielle Wirbel« verbindet, was ich als bekannt annehmen kann. Und so bleibt eigentlich nichts in Hébert's Föhntheorie richtig.

Billwiller bemerkte, über Hébert's Arbeit referirend (Zeitschrift für Meteorologie, XIII. Bd., S. 319): »Die geheimnissvolle Kraft, welche diese herabsteigende Bewegung der Luft veranlasst, ist nichts Anderes als die Aspiration eines in grösserer oder geringerer Entfernung vorüberziehenden barometrischen Minimums, in welchem bekanntlich die Luft von allen Seiten her in Spirallinien dem Centrum zuströmt«.

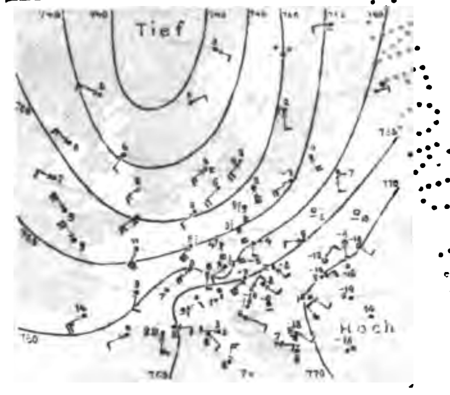
Auf Billwiller's eben genannte Auffassung beruft sich Bosshard (»Über Herkunft und Entstehung der Föhnstürme.«



I. Pernter: Luftdruckvertheilung bei Föhn.

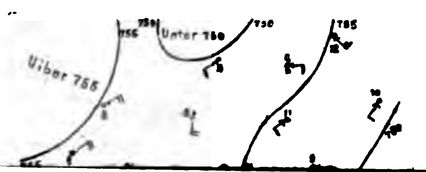


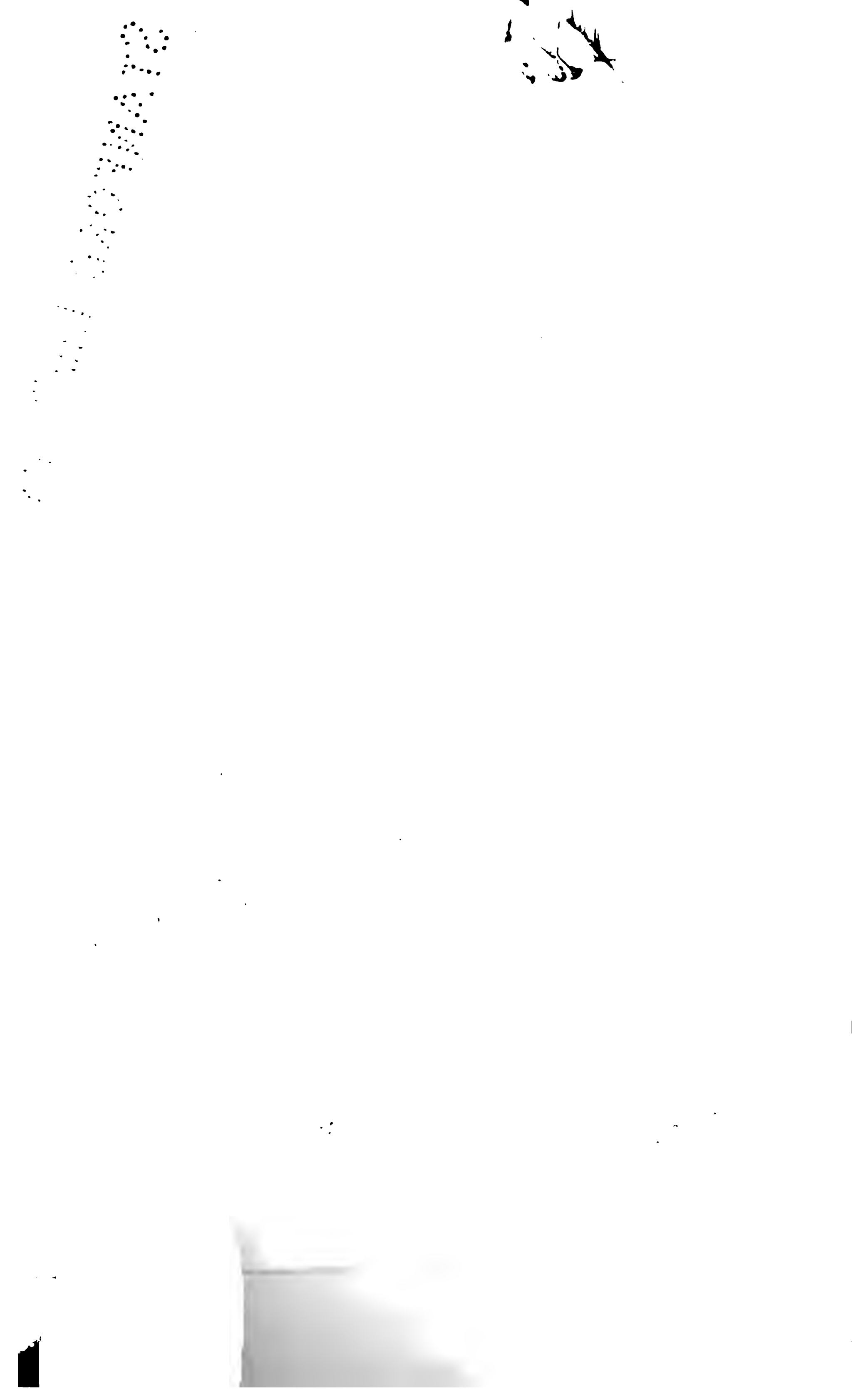
2 b Wetterkarte vom 11. December 1891.



3 b Wetterkarte vom 18. Jänner 1894.







Über den Sitz der Potentialdifferenzen in Tropfelektroden und im Capillarelektrometer

von

Stefan Meyer.

(Mit 5 Textfiguren.)

Zur Erklärung der capillar-elektrischen Erscheinungen sind zwei Theorien aufgestellt worden. Die erste von Lippmann[1] angebahnte, von Helmholtz[2] durchgeführte sogenannte Doppelschichtentheorie führt, unter Annahme eines conservativen Systems, zu dem Schlusse, dass Quecksilber, welches mit einem Elektrolyten in Berührung steht, gleichzeitig mit dem Maximum seiner Oberflächenspannung das Potential des angrenzenden Elektrolyten annehmen müsse.

Auf Grund dieser Anschauungen hat Ostwald[3] die Tropfelektroden zur Bestimmung der Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Elektrolyten eingeführt. Vorher hatte König[4]

---

[1] Pogg. Ann. 149, S. 546.

[2] Wiss. Abh. I, S. 925. Zu ähnlichen Resultaten gelangte auch M. Garbe, C. r. 99, p. 123.

[3] Zeitschr. f. phys. Chemie, I, S. 583.

[4] Wied. Ann. 16, S. 35. Hier findet sich auch eine Zusammenstellung der einschlägigen Literatur bis dahin. Von späteren Arbeiten sind hauptsächlich zu nennen:

F. Exner und J. Tuma, Diese Sitzungsber., 97, S. 923.

Bichat et Blondlot, C. r. 100, p. 791.

Pellat, C. r. 104, p. 1099 und C. r. 108, p. 667.

Paschen, W. A. 41, S. 42 und S. 186, W. A. 43, S. 576.

F. Braun, W. A. 41, S. 449.

F. Exner, Diese Sitzungsber., 100, S. 607; 101, S. 627 und S. 1436; 103, S. 845.

experimentell schon Helmholtz's Theorie zu bestätigen gesucht. Paschen[1] hat an Ostwald's Elektroden eine nicht unerhebliche Verbesserung durch Correction ihrer Einstellung angebracht. Wie gross aber das Misstrauen gegen dieselben trotz ihrer Vervollkommnung ist, ist bekannt. Unter den zahlreichen Äusserungen möchte ich bloss diejenige von Nernst:[2] »Da aber bekanntlich die Tropfelektroden bei der Untersuchung der zwischen verschiedenen wässerigen Lösungen wirkenden Potentialdifferenzen bisher stets total fehlerhafte Resultate gegeben haben...« erwähnen und einen Ausspruch citiren, den Ostwald[3] selbst gethan hat: »Auch scheint, nachdem ich vor 10 Jahren zuerst eine solche Bestimmung der absoluten Potentiale der Metalle ausgeführt hatte, kaum ein Fachgenosse sich rückhaltslos von der Richtigkeit jenes Schlusses überzeugt zu haben...«

Die zweite, chemische, Theorie wurde in einer Arbeit von F. Exner und J. Tuma[4] begründet. Nach dieser sollte Quecksilber im Maximum seiner Oberflächenspannung, also im reinsten Zustande, gerade die grösste Neigung zu chemischen Veränderungen und somit auch die höchste Potentialdifferenz gegen den Elektrolyten haben. Nach dieser Anschauung kann die tropfende Elektrode nie das Potential des Elektrolyten annehmen und auch im Capillarelektrometer müsste der grösste Potentialsprung zwischen der Schwefelsäure und der auf das Maximum polarisirten capillaren Quecksilberoberfläche bestehen.

Ein Vermittelungsversuch zwischen beiden Theorien wurde von Warburg[5] unternommen. Nach seiner Ansicht

---

Warburg, W. A. 38, S. 320 und W. A. 41, S. 1.
J. Brown, Phil. Mag. 27, p. 384.
Gouy, C. r. 114, p. 22 und p. 211.
G. Meyer, W. A. 45, S. 508 und W. A. 53, S. 845.
Rothmund, Zeitschr. f. phys. Chemie, 15, S. 1.
Luggin, Zeitschr. f. phys. Chemie, 16, S. 677.
Schreber, W. A., 53, S. 109.

[1] Wied. Ann., 41, S. 42.
[2] Jahrbuch für Elektrochemie, I, S. 39.
[3] Zeitschr. für Elektrochemie, II, S. 130.
[4] Diese Sitzungsber., 97, S. 923.
[5] W. A. 41, S. 1.

bestehen die Erscheinungen der »Ladungsstromtheorie« und die der »Leitungsstromtheorie« nebeneinander.

Zuletzt hat Luggin[1] auf Grund seiner Arbeiten die Vor- und Nachtheile der beiden Auffassungsweisen zusammengestellt. Er fand die Existenz des abfallenden Astes der Lippmann'schen Curve direct an das Auftreten von Wasserstoff gebunden und zeigte, wie auch schon Andere[2] vor ihm, durch die Helmholtz'sche Theorie kaum erklärbare Änderungen der Maxima der Oberflächenspannung des Quecksilbers mit dem Elektrolyten. Die Schwierigkeiten der chemischen Theorie sieht er darin, »dass die Capillarconstante oft ein und dieselbe Function des Potentials ist, während sehr verschiedene chemische Vorgänge an der Oberfläche stattzufinden scheinen«. Schliesslich führt er eine sehr beachtenswerthe neue Anschauungsweise ein. Man hätte sich nach derselben vorzustellen, dass der kathodisch polarisirende Strom »lediglich die Bildung von Wasserstoffgas vorbereite«. »Die Grenze, bei der Wasserstoffbildung merklich wird, muss dann für verschiedene Körperclassen wechseln«.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit zwei Fragen. Man erhält bekanntlich aus der Combination: Tropfendes Quecksilber, verdünnte Schwefelsäure, Quecksilber, einen dauernden Strom, der sich mittelst eines Galvanometers messen lässt. Einen gleichgerichteten, bei weitem stärkeren erhält man nun, wenn man Amalgame von Zink oder Zinn in die Tropfelektrode füllt und die Kette: Tropfendes Amalgam, Schwefelsäure, ruhendes Quecksilber bildet, wohingegen sich z. B. für: Tropfendes Zink-Amalgam, Schwefelsäure, Zink, nur mehr oder minder lebhafte Schwankungen der Galvanometernadel um die Null-Lage zeigen.[3] Zunächst soll untersucht werden, ob die Energiequelle, die diese Ströme liefert, mechanischen oder chemischen Ursprunges sei. Hiezu wurde beobachtet, ob man für Paschen's Einstellung thatsächlich immer die grösste Potentialdifferenz erhält. Handelte es sich um mechanische

[1] Zeitschr. f. phys. Chemie, 15, S. 702.

[2] So Gouy, C. r. 114, p. 211.

[3] Es hat dies schon Pellat, Ann. d. ch. et ph. (6), Bd. 19, gezeigt.

Ursachen, so müsste der Gang der Erscheinungen unabhängig von der Natur der tropfenden Flüssigkeit verlaufen. Nimmt man aber Amalgame statt Quecksilber in die Tropfelektrode, so kehrt sich der Sinn um, man erhält Minima.

Die zweite Aufgabe bestand darin, zu zeigen, wo in Tropfelektroden und im Capillarelektrometer die Potentialdifferenzen zu suchen sind, und ihre Grössenordnung festzustellen. Zu diesem Zwecke wurde unter Beibehaltung aller übrigen Bedingungen bloss die tropfende Flüssigkeit oder bloss der Elektrolyt variirt. Dann wurden unter Zuhilfenahme einer als gegeben betrachteten Potentialdifferenz Kupfer | Kupfersulfatlösung die einzelnen Differenzen in Tropfelektrode und Capillarelektrometer zu messen unternommen und schliesslich die

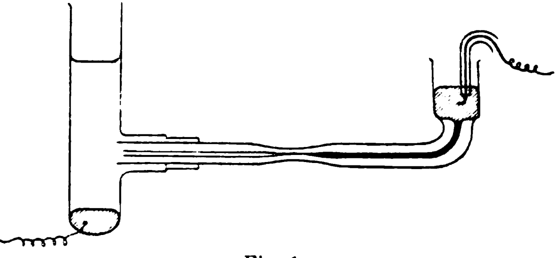


Fig. 1.

Combination Platin | Elektrolyt untersucht, da es sich ergab, dass, wenn diese gleiche Null zu setzen ist, die Potentialdifferenz von circa 0·8 Volt — die auch den Unterschied zwischen den Zahlen von F. Exner und J. Tuma einerseits und den übrigen Autoren anderseits darstellt — zwischen dem tropfenden Quecksilber und dem Elektrolyten liegen muss.

Von den im Verlaufe der Arbeit zur Verwendung gelangten Apparaten möchte ich ein Capillarelektrometer erwähnen, dessen ich mich ausser dem Lippmann'schen verticalen bediente. Man erhält dasselbe durch eine kleine Veränderung aus demjenigen, welches Ostwald[1] als horizontales angegeben hat. Man braucht nämlich das dickwandige Thermometerrohr (Fig. 1)

[1] Ostwald, Hand- und Hilfsbuch zur Ausführung physico-chemischer Messungen, S. 243.

bloss in der Mitte ein wenig auszuziehen und den Quecksilbermeniscus in den Conus durch entsprechende Neigung des Apparates einzustellen, um ein mit dem verticalen Elektrometer an Empfindlichkeit wetteiferndes Instrument zu haben, das gleichzeitig die Vortheile des horizontalen Capillarelektrometers besitzt. Dasselbe ist allerdings, wie übrigens alle anderen Capillarelektrometer auch, nur für Nullmethoden geeignet und verlangt für genaue Messungen ein Mikroskop.

Zunächst wurden Tropfelektroden untersucht und hiezu folgende Anordnung gegeben.

Die Messung geschah durch Compensation. Das sonst stets durch *u* (Fig. 2) in sich geschlossene Capillarelektrometer wird durch die Tropfelektrode und die compensirende, der Batterie *B*[1] entnommene Potentialdifferenz geschlossen. Da die Widerstände dieses Kreises alle zusammen gegen den sehr grossen des Schwefelsäurefadens in der Capillare des Elektrometers *C* zu vernachlässigen sind, darf sich, falls die Potentialdifferenzen in der Tropfelektrode durch die compensirende eben aufgehoben sind, bei Öffnen des Schlüssels *u* das Quecksilber im Capillarelektrometer nicht aus seiner Stellung verschieben, was durch Regelung des Verhältnisses $W_1/(W_1+W_2)$ leicht zu bewerkstelligen ist. Diese letzteren Widerstände wurden so gross gewählt, dass dagegen der innere Widerstand der Elemente vernachlässigt werden konnte. Das Gefäss unter der Tropfelektrode konnte durch einen Zahntrieb an dem Tische, auf den es gestellt war, gehoben und gesenkt, und so die Ostwald'sche und Paschen'sche Einstellung gegeben werden. Als positive Potentialdifferenz gilt im Folgenden jene, die der Richtung tropfendes $\overrightarrow{Hg \,|\, H_2SO_4 \,|\, Hg}$ entspricht.

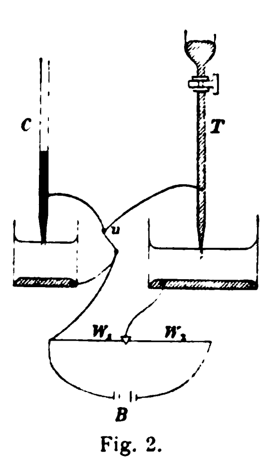


Fig. 2.

[1] Es wurden Daniell zu 1·075 Volt verwendet.

Über die Einstellungen nach Ostwald und Paschen.

Ostwald liess seine Tropfelektrode so tropfen, dass die Spitze innerhalb des Elektrolyten sich befand. Paschen stellte so ein, dass der Zerreisspunkt eben die Flüssigkeitsoberfläche berührte. Das Quecksilber tritt geschlossen aus der Capillare aus, der Strahl verliert aber bald seine Continuität, um sich in Tropfen aufzulösen. Die Länge des geschlossenen Strahles hängt naturgemäss von der Druckhöhe des Quecksilbers und der Form und Grösse der Ausflussöffnung ab. Die Potentialdifferenzen zwischen der Tropfelektrode und dem Elektrolyten hängen nun, wie sich zeigt, von der Länge des geschlossenen Strahles ab, der in den Elektrolyten taucht.

So fand ich für in sehr verdünnte[1] Schwefelsäure tropfendes Quecksilber die Potentialdifferenz von Ostwald's zu Paschen's Einstellung allmälig steigend für zwei verschiedene Tropfelektroden in Volt:

Ostwald	Paschen	
0·47[2]	0·77	I α)
0·51	0·77	I β)

Paschen's Einstellung ergibt hier ein Maximum und es sind nur nach dieser vergleichbare Resultate für verschiedene Tropfelektroden[3] erhältlich. Nicht immer aber ergeben diese Zahlen, wie in diesem Falle, für Quecksilber in Schwefelsäure das Maximum der so erreichbaren Potentialdifferenz. Lässt man Zink- oder Zinn-Amalgame[4] tropfen, so erhält man in Volt

	Ostwald	Paschen	
Zink-Amalgam	0·07	0·02	II)
Zinn-Amalgam	0·008	±0·0001	III)

---

[1] Vom specifischen Gewichte unter 0·01 *g*.

[2] Diese Zahl kommt der von Moser, Monatshefte f. Chemie, VIII, S. 509, gefundenen Grösse nahe. Moser hatte offenbar einen ziemlich langen, geschlossenen Strahl ganz im Elektrolyten eingetaucht.

[3] So werden auch, worauf schon Paschen verwiesen hat, die Differenzen erklärlich, die Ostwald bei Änderungen der Druckhöhe etc. in seiner ersten bezüglichen Arbeit constatirte.

[4] Circa 0·6% Zink, respective Zinn.

In den folgenden Versuchen liess ich nach Fig. 3 Amalgame durch Schwefelsäure, unter der sich Quecksilber befand, und umgekehrt Quecksilber durch Schwefelsäure, unter der Amalgame waren, tropfen, derart, dass die fallenden Tropfen durch das innere Gefäss aufgefangen und so von dem abgeleiteten Quecksilber (Amalgam) getrennt waren.

Man findet dann in Volt:

	Ostwald	Paschen	
Zink-Amalgam|Schwefelsäure|Quecksilber.	1·39	1·34	IV)
Zinn-Amalgam|Schwefelsäure|Quecksilber.	0·82	0·81	V)
Quecksilber|Schwefelsäure|Zink-Amalgam.	–0·99	–0·71	VI)
Quecksilber|Schwefelsäure|Zinn-Amalgam.	–0·41	–0·16	VII)

Für sämmtliche Combinationen ergab sich also für tropfendes Amalgam ein Minimum, für tropfendes Quecksilber ein Maximum für die Paschen'sche Einstellung.

Bei Annahme eines chemischen Angriffes werden obige Zahlen leicht verständlich. In den Fällen I), VI) und VII) hat man sich vorzustellen, dass das eintauchende Stück des geschlossenen Strahles von einer Schicht der Quecksilberverbindung umgeben ist. Im Augenblicke des Zerreissens wird sich diese Schicht auch um die neu gebildeten Oberflächen zu schliessen suchen, und es werden je nach dem Grade der Ausbildung derselben reinere oder minder reine Oberflächen entstehen. Die Abhängigkeit von der Tropfgeschwindigkeit ist einleuchtend. Bei der Paschen'schen Einstellung bietet das Quecksilber als Berührungsfläche dem Elektrolyten nur den Zerstäubungspunkt dar, die Oberfläche ist dort am reinsten, die Potentialdifferenz am grössten.

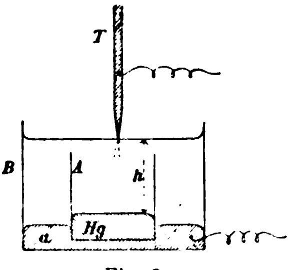


Fig. 3.

Diese Erklärung gilt für die Fälle, in denen Quecksilber in der Tropfelektrode war — in VI) und VII) zeigt sich die Änderung entsprechend dem Vorzeichen von entgegengesetztem Sinne als in I β) — und es ergab sich in allen diesen Fällen dieselbe Steigerung von: 0·26, 0·26, 0·25 Volt.

Diese Änderung kann nicht durch Wechsel des Widerstandes hervorgerufen sein, da auch bei bedeutenden Änderungen der Flüssigkeitshöhe *h* sich dieselben Werthe ergeben. Der mittelst eines Differentialgalvanometers gemessene Strom nimmt gleichfalls gegen die Paschen'sche Einstellung zu, und zwar bei meinen Beobachtungen von 7—10 Scalentheilen.

In den vier Fällen II) bis V) hingegen steigt offenbar die Potentialdifferenz mit der Menge des dem hier viel intensiver wirkenden chemischen Angriffe dargebotenen Menge von Zink oder Zinn. Das von mehreren Beobachtern gefundene Resultat, dass nach einigen Versuchen mit derselben Elektroden-Flüssigkeit sich diese Potentialdifferenzen denen des Quecksilbers nähern, rührt einfach daher, dass die im Amalgam enthaltenen Metalle herausgelöst wurden.

Über eine Fehlerquelle bei den Messungen mit Tropfelektroden.

Der Fall der Tropfen ist nicht ohne Einfluss auf das unter dem Elektrolyten befindliche Quecksilber und bietet eine ziemlich constante Fehlerquelle wohl in allen bisher getroffenen Anordnungen der Messungen mit Tropfelektroden. Man erhält nämlich nicht die gleiche Potentialdifferenz, wenn man das untere Quecksilber des Gefässes *A*,

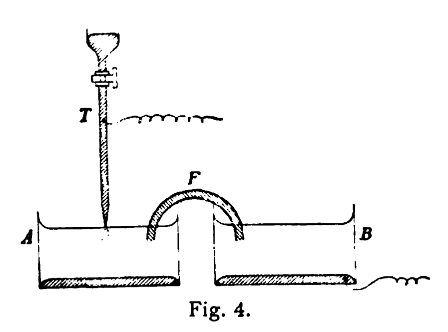


Fig. 4.

wie in Fig. 2, direct ableitet oder ein zweites Gefäss *B* durch einen leitenden Bügel (ein mit dem gleichen Elektrolyten gefülltes Rohr oder einfacher ein getränktes Filtrirpapier) mit *A* verbindet und erst aus dem Quecksilber dieses Gefässes ableitet. So ergibt sich beispielsweise für

Ableitung aus	
A	*B*
0·77 Volt	0·71 Volt
0·77	0·72.

Um dies näher zu prüfen, wurde das Gefäss *B* mit Kupfersulfatlösung gefüllt und durch Kupfer zu einer Seite des Elektrometers, das Quecksilber im Gefässe *A* zu dessen anderer Seite abgeleitet. Tropfte das Quecksilber der Elektröde nicht, so erhielt ich 0·20 Volt, liess ich dieselbe tropfen, bekam ich den Werth 0·14 Volt, also wie oben eine Änderung von ungefähr 0·06 Volt. Die auffallenden Tropfen wirken demnach wie mechanische Störungen, zum Beispiel Umrühren mit einem Glasstabe, wie sie schon Lippmann[1] gezeigt hat. Die Tropfelektrode braucht hiezu natürlich nicht in Contact mit dem Elektrolyten zu stehen Mit der Fallhöhe ändern sich die Potentialdifferenzen in dem Sinne, dass mit steigender Entfernung vom Elektrolyten die Abnahme — allerdings nicht erheblich — wächst.

Für genaue Messungen wird es sich sonach empfehlen, eine Anordnung, wie die in Fig. 3 oder in Fig. 4 angedeuteten, zu wählen.

Sitz der Potentialdifferenzen.

Zur Aufsuchung des Sitzes der Potentialdifferenzen in der Tropfelektrode wurden zwei Wege eingeschlagen: Variation der tropfenden Flüssigkeit allein, unter Beibehaltung aller übrigen Bedingungen, und Variation des Elektrolyten über der grossen Quecksilberoberfläche.

Variation der tropfenden Flüssigkeit.

Um die einmal gefundene Paschen'sche Einstellung wenigstens annähernd zu erhalten, wurde das Gefäss *B* (Fig. 3) noch in ein drittes gestellt und so weit gefüllt, dass die durch das Fliessen der Tropfelektrode steigende Schwefelsäure fortwährend überfloss und das Niveau in gleicher Höhe blieb. Hatte ich in der Tropfelektrode und den beiden Gefässen *A* und *B* Quecksilber, so ergab sich für

Ableitung aus *A* .... 0·77 Volt,
» » *B* .... 0·72 »

[1] Pogg. Ann. 149, S. 87.

Füllte ich dann *B* mit Zink-Amalgam von circa 0·6% Zinkgehalt, Tropfelektrode und Gefäss *A* mit Quecksilber, so ergab sich

für Paschen's Einstellung .... —0·71 Volt,
für Ostwald's[1] Einstellung........ —0·99 Volt,

wenn aus *B* abgeleitet wurde.

Hatte ich umgekehrt Tropfelektrode und *A* mit Zink-Amalgam gefüllt und in *B* Quecksilber, so fand ich bei wiederholter Benützung desselben Amalgams

Paschen	Ostwald
1·49	1·61
1·34	1·40
1·25	1·30

Offenbar war der Gehalt an Zink gefallen.

Waren schliesslich sowohl Tropfelektroden, als beide Gefässe mit Zink-Amalgam gefüllt, so erhielt ich

0·02 Volt nach Paschen's Einstellung,
0·07 Volt nach Ostwald's Einstellung.

Dieselben Versuche wurden auch mit Zinn-Amalgam angestellt. Die Zusammenstellung ergibt in Volt:

	Einstellung nach	tr. Amalgam, Schwefelsäure, Amalgam	Amalgam, Schwefelsäure, Quecksilber	Quecksilber, Schwefelsäure, Amalgam	Quecksilber, Schwefelsäure, Quecksilber
Zink-Amalgam	Paschen	0·02	1·49	—0·72	0·77
	Ostwald	0·07	1·61	—0·99	0·51
Zinn-Amalgam	Paschen	±0·0001	0·81	—0·16	
	Ostwald	0·008	0·82	—0·41	

[1] Für Amalgame führe ich hier und im Folgenden immer auch die Ergebnisse nach Ostwald's Einstellung an, da diese die erreichten Maximalwerthe darstellen, und für dieselbe Tropfelektrode die Resultate vergleichbar sind.

Daraus folgt, dass die tropfende Elektrode auch nicht annähernd das Potential des Elektrolyten annimmt, da es ja bei obiger Anordnung ganz gleichgiltig sein müsste, was tropft, die Unterschiede aber hier zwischen Zink-Amalgam und Quecksilber 0·72, nach Ostwald's Einstellung sogar 1·10 Volt, Zinn-Amalgam und Quecksilber 0·06 (0·31) Volt betragen. Diese Resultate sprechen zwingend dafür, dass zwischen der tropfenden Elektrode und dem Elektrolyten ein sehr erheblicher Potentialunterschied bestehen muss, der sich nicht wohl anders, als im Sinne der chemischen Theorie deuten lässt. Allerdings gäbe es noch einen Ausweg: die Potentialdifferenz zwischen die Metalle zu verlegen, wobei man dann zum Beispiel Zn-Amalgam | Hg = 0·72 Volt zu setzen hätte, doch ist kaum anzunehmen, dass selbst die Gegner der chemischen Theorie diesen Weg beschreiten würden. Die gefundenen Zahlen stimmen übrigens gut mit den von F. Exner für $Zn | H_2SO_4$ und $Sn | H_2SO_4$ gefundenen überein, wie die Tabelle zeigt.

gegen H_2SO_4	nach F. Exner	tropfendes Amalgam $\| H_2SO_4 \|$ Hg	tropfendes Hg $\| H_2SO_4 \|$ Hg — tropfendes Hg $\| H_2SO_4 \|$ Amalgam
Zn	1·55	1·49 bis 1·61	1·49
Sn	0·97	0·81 bis 0·82	0·93

Die letzte Columne zeigt, dass man als Potentialdifferenz des ruhenden Amalgams gegen die Säure fast dieselben Werthe erhält, wie für das tropfende, was übrigens auch schon aus den Resultaten für tropfendes Amalgam | Säure · Amalgam sich ergibt.

Variation des Elektrolyten.

Die Anordnung war diejenige der Fig. 4 und es wurden in verschiedenen Combinationen die Gefässe *A* und *B* mit verschiedenen verdünnten Elektrolyten gefüllt. Zwischen diesen wurde entsprechend der Nernst'schen Theorie eine sehr

geringe Potentialdifferenz angenommen, die vernachlässigt werden konnte. Diese Vernachlässigung kann umso eher geschehen, als es bei den Versuchen dieser Arbeit hauptsächlich auf qualitative Resultate ankommt, die Berechtigung der Annahme soll übrigens in der Untersuchung über die Potentialdifferenz Platin|Elektrolyt dargelegt werden.

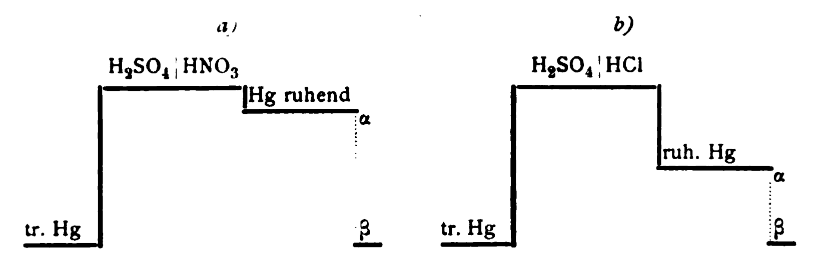
Es ergab sich in Volt:[1]

Tropfendes Hg|H_2SO_4|H_2SO_4|Hg ..... 0·77
tropfendes Hg|H_2SO_4|HCl|Hg .... 0·48
tropfendes Hg|H_2SO_4|HNO_3|Hg ...... 0·77
tropfendes Hg|HCl|H_2SO_4|Hg .... 0·78
tropfendes Hg|HCl|HCl|Hg .... 0·50
tropfendes Hg|HNO_3|H_2NO_3|Hg ...... 0·82
tropfendes Hg|HNO_3|H_2SO_4|Hg....... 0·72.

Dies Ergebniss erscheint für die Anhänger der chemischen Theorie recht ungünstig, denn es ergäbe, dass, abgesehen von kleinen Störungen, die gefundene Potentialdifferenz unabhängig sei von dem Elektrolyten, der sich unter dem reinen, tropfenden Quecksilber befindet und bloss von dem aus *B* abgeleiteten Quecksilber und der über diesem befindlichen Säure beeinflusst werde. Doch ist eine Erklärung auch nach dieser Auffassungsweise sehr leicht zu geben. Die Zahlen für Salpetersäure und Schwefelsäure stehen einander ziemlich nahe, bei oberflächlicher Betrachtung konnte auch Abscheidung eines Quecksilbersalzes in diesen Fällen nicht beobachtet werden. Anders bei Salzsäure, die auch die stark abweichenden Resultate ergibt: Hier ist binnen kürzester Zeit Salzabscheidung (HgCl?) zu bemerken und es wird in diesem Falle zweifellos nicht nur der Quecksilberstrahl, sondern auch die grosse Quecksilberfläche wesentlich durch die Säure beeinflusst. Schematisch wäre dies durch Fig. 5 *a)* für Schwefelsäure und Salpetersäure, *b)* für Salzsäure ausgedrückt; $\overline{\alpha\beta}$ ist die gemessene Potentialdifferenz.

---

[1] Die Concentration aller Säuren betrug circa 1%, die angeführten Zahlen sind Mittelwerthe.



Um Klarheit darüber zu erlangen, welche Rolle die ruhende Quecksilberfläche spielt, wurde das Quecksilber aus dem Gefässe *B* entfernt und Platinblech eingeführt. Die Resultate weichen zum Theile (für Salzsäure) recht wesentlich von den obigen ab und führen zu einem charakteristischen Dilemma.

Tropfendes Hg | H_2SO_4 | H_2SO_4 | Pt	0·82
tropfendes Hg | H_2SO_4 | HCl | Pt	0·78
tropfendes Hg | H_2SO_4 | HNO_3 | Pt	0·84
tropfendes Hg | HNO_3 | HNO_3 | Pt	0·83
tropfendes Hg | HCl | HCl | Pt	0·79
tropfendes Hg | HCl | H_2SO_4 | Pt	0·83
tropfendes Hg | HNO_3 | HCl | Pt	0·77
tropfendes Hg | HNO_3 | H_2SO_4 | Pt	0·84

Die Zahlen stehen einander alle nahe. Nach der chemische Theorie ist Platin | Säure gleich Null zu setzen. Nimmt man aber mit der Lippmann—Helmholtz'schen Auffassungsweise an, dass das tropfende Quecksilber thatsächlich wenigstens annähernd das Potential des Elektrolyten annehme, so folgt hieraus, dass man die Potentialdifferenz Pt | Säure ungefähr gleich —0·8 Volt zu setzen hätte. Diese Annahme erscheint nun aber doch recht unwahrscheinlich gegenüber dem bekannten Verhalten des Platin in chemischer Hinsicht. Quelle aller Potentialdifferenzen sind ja auch nach Ostwald's[1] Anschauung ausschliesslich die chemischen Vorgänge; und da sollte das so indifferente Platin eine eben so grosse Potentialdifferenz zeigen wie Quecksilber? Das zu glauben dürfte wohl recht schwer fallen. Der chemischen Theorie hingegen könnte man

[1] Ostwald, Chemische Energie, S. 521.

es — wie Luggin es ja thatsächlich thut — zum Vorwurfe machen, dass Hg gegen diese verschiedenen Säuren so ähnliche Potentialdifferenzen zeigen soll. Doch ist zu bedenken, dass auch die Bildungswärmen von $HgCl = 29°2$ C. und $HgNO_3$[1] $= 29°0$ C. einander sehr nahe stehen.

Paschen[2] hat die Potentialdifferenzen zwischen Platin und den einzelnen Säuren bestimmt und fand allerdings sehr hohe Werthe

H_2SO_4|Pt .... 0·74
HCl|Pt .... 0·51
HNO_3|Pt .... 0·88,

doch hat er diese aus dem Schema Strahl|Säure|Pt erhalten, indem er Strahl|Säure gleich Null setzte. Seine Resultate stimmen mit den oben für

tropfendes Hg|H_2SO_4|Hg .... 0·77
tropfendes Hg|HCl|Hg .... 0·50
tropfendes Hg|HNO_3|Hg .... 0·82

gefundenen auffallend überein. Hingegen weicht sein Werth Strahl|HCl|Pt von dem meinigen erheblich ab, was zu der Vermuthung drängt, es könnte vielleicht das tropfende Quecksilber mit dem Pt in irgend welche Berührung gekommen sein.

Weist man also die Annahme, dass man in beiden Fällen die Potentialdifferenz tropf. Hg|Säure messe, zurück, so müsste sich Platin gegen alle diese Säuren genau wie Quecksilber verhalten. Ich hoffe im Folgenden übrigens zu zeigen, dass man thatsächlich, wie es die chemische Theorie verlangt, die Potentialdifferenz Pt|verdünnte Säure gleich Null zu setzen habe, wenn die Potentialdifferenzen zwischen den Elektrolyten als gering angesehen werden können.

Messung der einzelnen Potentialdifferenzen zwischen tropfendem, respective ruhendem Quecksilber und Schwefelsäure.

Da man nach Obigem die Potentialdifferenz Platin|verdünnte Säure noch nicht ohneweiters gleich Null setzen darf

---

[1] Für $HgSO_4$ konnte ich keine Angabe finden.

[2] W. A. 41, S. 59 und 60.

— in diesem Falle bekäme man z. B. direct für tropfendes-reines $Hg|H_2SO_4$ 0·84 Volt — wurde die Potentialdifferenz $Cu|CuSO_4$ zu Hilfe genommen. Die Anordnung war diejenige der Fig. 5.

Gefäss *D* wurde mit Kupfersulfatlösung gefüllt und durch Kupfer abgeleitet. Wie oben wurde angenommen, dass zwischen

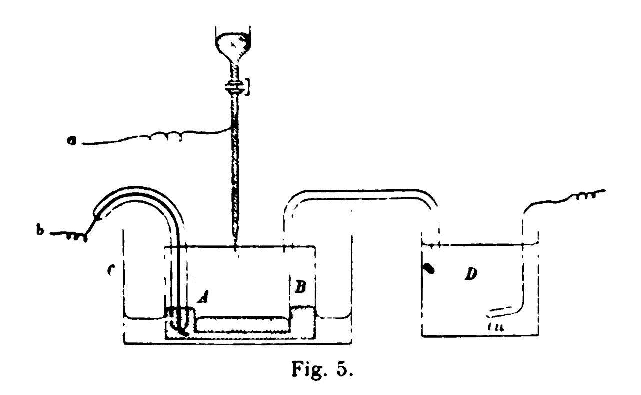


Fig. 5.

den Elektrolyten keine oder eine zu vernachlässigende Potentialdifferenz herrsche.

Es ergab sich in Volt:

Tropfendes Hg $H_2SO_4|CuSO_4|Cu$	0·46	
ruhendes $Hg|H_2SO_4|CuSO_4|Cu$	—0·28	
tropfendes Zn-Amalgam $|H_2SO_4|CuSO_4|Cu$.	1·22	nach Ostwald's Einstellung.
tropfendes Zn-Amalgam $|H_2SO_4|CuSO_4|Cu$.	1·15	nach Paschen's Einstellung.
ruhendes Zn-Amalgam $|H_2SO_4|CuSO_4|Cu$.	1·13	
tropfendes Sn-Amalgam $|H_2SO_4|CuSO_4|Cu$	0·60	(Ostwald)
» »	0·59	(Paschen)
ruhendes Sn-Amalgam $H_2SO_4|CuSO_4|Cu$.	0·59.	

In der folgenden Tabelle sind die hieraus berechneten Zahlen unter Abzug der Werthe von $Cu|CuSO_4$, die F. Exner (0·39 Volt) und Paschen (—0·02 Volt) gefunden haben, zusammengestellt.

Es sei daran erinnert, dass F. Exner und J. Tuma[1] diesen Werth fanden, indem sie eine Tropfelektrode innerhalb eines feuchten Papiercylinders, der auf das Potential der Flüssigkeit gebracht war, tropfen liessen, während Paschen[2] sein Resultat nach dem Schema Strahl|$CuSO_4$|Cu erhielt, indem er Strahl|$CuSO_4$ gleich Null setzte.

gegen H_2SO_4	Cu|$CuSO_4$ = = 0·39 (nach F. Exner u. J. Tuma)	Cu|$CuSO_4$ = = —0·02 (nach Paschen)	nach den genannten Methoden bestimmt von	
			F. Exner u. J. Tuma	Paschen
tropfendes Hg..	0·85	0·44	0·84	0
ruhendes Hg...	0·11	—0·30	0·01	—0·87
tropfendes Zn-Amalgam	1·61 (Ostw.) 1·54 (Pasch.)	1·20 1·13	—	—
ruhendes Zn-Amalgam ...	1·52	1·11	1·45 (1·56)[3]	0·54
tropfendes Sn-Amalgam	0·99 (Ostw.) 0·98 (Pasch.)	0·58 0·57	—	—
ruhendes Sn-Amalgam ...	0·98	0·57	(0·99)	—

Paschen setzt allerdings noch $CuSO_4$|H_2SO_4 = —0·45, doch sind so hohe Werthe zwischen verdünnten Elektrolyten mit allen aufgestellten Theorien im Widerspruche und auch wie ich im Folgenden zeigen werde, zum mindesten sehr unwahrscheinlich.

Er fand diesen Werth aus dem Schema Strahl|$ZnSO_4$|$CuSO_4$|Strahl[4] oder durch die Differenz Strahl|$CuSO_4$|Cu und Strahl|$ZnSO_4$|Zn von Cu|$CuSO_4$|$ZnSO_4$|Zn. Es liegt die

[1] Diese Sitzungsber., 97, 938.

[2] W. A. 41, S. 65.

[3] Die eingeklammerten Zahlen sind einer späteren Arbeit von F. Exner, diese Sitzungsber., 101, S. 630, entnommen und auf anderem Wege gewonnen.

[4] Ich begehe hiebei die Ungenauigkeit, dass ich für diesen Fall H_2SO_4|$CuSO_4$ und $ZnSO_4$|$CuSO_4$ gleichsetze.

Deutung nahe, dass das Quecksilber des Strahles Kupfer ausfällt und man dann an der gegen $CuSO_4$ stehenden Elektrode Kupferamalgam hat. Nach dieser Annahme hätte Paschen eigentlich Cu-Amalgam | $CuSO_4$ | Cu gemessen, was natürlich niedrige Werthe geben muss und auch im Einklange mit Pellat's Resultaten steht, und ebenso Cu-Amalgam | $CuSO_4$ | $ZnSO_4$ | Hg, welch letzterer Werth aus Hg | $ZnSO_4$ = 0·84 und Cu $CuSO_4$ = 0·39, wie sie F. Exner bestimmte, —0·45 Volt ergibt — genau das Resultat, das Paschen für $CuSO_4$ | H_2SO_4 in Anspruch nimmt.[1]

Für die Potentialdifferenzen: Tropfendes Quecksilber (Amalgam), Schwefelsäure, ruhendes Quecksilber (Amalgam) ergibt sich aus dem Vergleiche der früher direct gefundenen Zahlen mit den aus obiger Tabelle berechneten:

	berechnet	gefunden
tropfendes Hg | H_2SO_4 | Hg	0·74	0·77
tropfendes Zn-Amalgam | H_2SO_4 | Zn-Amalgam	0·02	0·02
tropfendes Sn-Amalgam H_2SO_4 | Sn-Amalgam	0·00	±0·0001

was eine recht gute Übereinstimmung zeigt.

Messungen am Capillarelektrometer.

Zunächst wurde constatirt, dass in normalem Zustande zwischen dem capillaren Meniscus und der grossen Quecksilberoberfläche keine Potentialdifferenz herrscht, und sodann die einzelnen Potentialdifferenzen unter Einschaltung der Hilfsgrösse Cu $CuSO_4$ gemessen.[2]

Es ergab sich für den unpolarisirten Zustand

capillares Hg H_2SO_4 | $CuSO_4$ | Cu = —0·34 Volt,

grosses Hg | H_2SO_4 | $CuSO_4$ | Cu = —0·35 Volt, .

---

[1] In Anbetracht der Genauigkeit der Paschen'schen Werthe schwankte nach seinen Angaben die Potentialdifferenz Strahl | $CuSO_4$ Cu relativ stark und nahm mit der Zeit von 0·0375 bis 0·0196 ab, was durch diese Deutung verständlich wird.

[2] Diese Messungen geschahen mittelst eines Thomson'schen Quadrantenelektrometers und machen keinen Anspruch auf besondere Genauigkeit.

woraus man findet

	nach Exner ($Cu\|CuSO_4 = 0·39$)	nach Paschen ($Cu\|CuSO_4 = -0·02$)
capillares $Hg\|H_2SO_4$......	$0·05 + H_2SO_4\|CuSO_4$	$-0·36 + H_2SO_4\|CuSO_4$
grosses $Hg\|H_2SO_4$.......	$0·04 + H_2SO_4\|CuSO_4$	$-0·37 + H_2SO_4\|CuSO_4$.

Durch kathodische Polarisation der capillaren Quecksilberfläche wurde eine Änderung der Potentialdifferenz unteres Hg H_2SO_4 nicht bemerkt. Für diejenige capillares $Hg|H_2SO_4$ tergib sich, dass man eben die Grösse findet, mit der man polarisirt.

polarisirt mit	gefunden
0·53 Volt	0·49 Volt
0·86	0·90
0 97	1·00

Eine Entscheidung lässt sich hieraus noch nicht geben, doch kann man behaupten, dass wenn, wie sich im Folgenden als sehr wahrscheinlich ergibt, ruhendes Quecksilber ebenso wie Platin gegen verdünnte Schwefelsäure nur geringe Potentialdifferenzen zeigt, auch im Capillarelektrometer im polarisirten Zustande der Sprung am capillaren Meniscus sich befinden muss.

Über die Potentialdifferenz Platin | Elektrolyt.

Die Messungen $Quecksilber|Säure_1|Säure_2|Platin$ ergaben:

tropfendes $Hg\|H_2SO_4\|H_2SO_4\|Pt$...	0·82	ruhendes $Hg\|H_2SO_4\|H_2SO_4\|Pt$..	0·08
tropfendes $Hg\|H_2SO_4\|HCl\|Pt$....	0·78	ruhendes $Hg\|H_2SO_4\|HCl\|Pt$....	0·04
tropfendes $Hg\|H_2SO_4\|HNO_3\|Pt$...	0·84	ruhendes $Hg\|H_2SO_4\|HNO_3\|Pt$..	0·10
tropfendes $Hg\|HCl\|HCl\|Pt$.......	0·79	ruhendes $Hg\|HCl\|HCl\|Pt$......	0·16
tropfendes $Hg\|HCl\|H_2SO_4\|Pt$.....	0·83	ruhendes $Hg\|HCl\ H_2SO_4\|Pt$....	0·35
tropfendes $Hg\|HNO_3\|HNO_3\ Pt$...	0·83	ruhendes $Hg\|HNO_3\|HNO_3\|Pt$..	±0·00
tropfendes $Hg\|HNO_3\|H_2SO_4\|Pt$...	0·84	ruhendes $Hg\|HNO_3\|H_2SO_4\|Pt$..	0·04
tropfendes $Hg\|HNO_3\|HCl\|Pt$.....	0·77	ruhendes $Hg\|HNO_3\|HCl\|Pt$....	0·09
		ruhendes Hg|concentrirtere $HNO_3\|H_2SO_4\|Pt$...........	0·20

Die zweite Columne zeigt Werthe von der Grösse bis zu 0·1 Volt, nur die Fälle für HCl und concentrirtere HNO_3 über dem Quecksilber ergeben höhere Werthe, weil dort ein heftigerer, dauernder Angriff des Quecksilbers stattfindet.

Es ergibt ferner

$Pt|HCl|H_2SO_4|Pt$ .... 0·07
$Pt|HNO_3|H_2SO_4|Pt$ .... 0·01
$Pt|HNO_3|HCl|Pt$ .... 0·00,

also lauter geringe Werthe.

Aus der Zusammenfassung der Resultate der Messungen HgStrahl|Säure$_1$|Säure$_2$|Pt, HgStrahl|Säure$_2$|Säure$_1$|Pt und Pt|Säure$_2$|Säure$_1$|Pt ergibt sich unmittelbar, wenn man Strahl|Säure gleich Null setzt, dass Säure$_1$|Säure$_2$ gering sein muss und Pt|Säure constant mit circa —0·8 Volt zu bewerthen wäre. So hätte man z. B.

$$HCl|H_2SO_4 + H_2SO_4|Pt = 0{\cdot}83$$
$$H_2SO_4|HCl + HCl|Pt = 0{\cdot}78$$

und durch Subtraction hieraus

$$Pt|HCl + 2\,HCl|H_2SO_4 + H_2SO_4|Pt = 0{\cdot}05.$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung noch

$$Pt|HCl + HCl|H_2SO_4 + H_2SO_4|Pt = 0{\cdot}07,$$

so erhält man

$$HCl|H_2SO_4 = -0{\cdot}02$$

Nimmt man aber, wie es die chemische Anschauungsweise und die Versuche mit tropfenden Amalgamen verlangen, zwischen Strahl und Elektrolyt eine Potentialdifferenz an, so ergeben sich die Beziehungen nicht ganz so leicht. Nach dieser Theorie muss Pt|Säure klein sein und es soll, um dies zu zeigen, die Differenz $CuSO_4|H_2SO_4$ näher betrachtet werden.

Einige Zahlen von F. Exner und J. Tuma ergeben hierüber Anhaltspunkte. Dieselben fanden nämlich

$Cu|CuSO_4|$Luft|Strahl .... 0·39 Volt
$Cu|H_2SO_4|$Luft|Strahl .... 0·42 bis 0·50 Volt.

Ferner ergibt sich $Cu|CuSO_4|H_2SO_4|Cu$ als sehr gering (0·05). Setzt man also nach Paschen $Cu|CuSO_4$ nahezu gleich Null, $CuSO_4|H_2SO_4$ rund —0·45 Volt, so müsste $Cu|H_2SO_4$

circa —0·5 Volt, also in Obigem Luft | $CuSO_4$ = —0·4, dagegen Luft | H_2SO_4 = —0·8 bis —0·9 Volt haben.

Auch Pt | H_2SO_4 | Luft | Strahl ist nach F. Exner und J. Tuma gleich Null zu setzen, es müsste demnach Pt | H_2SO_4 gleich Luft | H_2SO_4 gleich circa —0·8 Volt sein.

Pt | H_2SO_4 | $CuSO_4$ Pt zeigt nur kleine Werthe. Man müsste also unter Paschen's Voraussetzungen Pt | $CuSO_4$ = —0·4 setzen. Kurz es müssten Pt, Luft und auch ruhendes Quecksilber dieselben Potentialdifferenzen gegen verdünnte Kupfersulfatlösung zeigen, und zwar diejenige von circa —0·4 Volt, und gleichfalls gegen H_2SO_4 den untereinander gleichen Werth —0·8 Volt. Das ist gewiss recht unwahrscheinlich. Noch bezeichnender sind aber die Versuche, wie sie Pellat anstellte. Tropfendes Kupfer-Amalgam | $CuSO_4$ | Kupfer und tropfendes Zink-Amalgam | $ZnSO_4$ | Zink zeigen keine Potentialdifferenzen. Man müsste also unter Annahme von Paschen's Werth für $CuSO_4$ | $ZnSO_4$ etwa —0·6 Volt zwischen die Metallcontacte verlegen. Nimmt man aber, wie auch Paschen dies thut, zwischen den Metallen keinen erheblichen Potentialsprung an, so erhielte man für $CuSO_4$ | $ZnSO_4$ aus Pellat's Versuchen den Werth von —1 Daniell. Gleichzeitig kann aber $CuSO_4$ | $ZnSO_4$ keinenfalls circa —0·45 und circa —1 Volt sein.

Setzt man hingegen, wie es fast alle Theorien und auch die Bestimmungen von F. Exner und J. Tuma verlangen, H_2SO_4 | $CuSO_4$ gering, so entfallen alle eben angeführten Schwierigkeiten und Widersprüche. Luft | H_2SO_4 wird gleich Luft | $CuSO_4$ und beide, sowie auch Pt | Elektrolyt gering, der Werth von Cu | $CuSO_4$ ähnlich dem von Cu | H_2SO_4.

Ist aber Pt | H_2SO_4 gering, so folgt aus den obigen Versuchen für Hg Strahl | H_2SO_4 | Pt = 0·8 und ruhendes Quecksilber | H_2SO_4 | Pt = gering, dass nicht nur überhaupt, wie dies die Versuche nach dem Schema tropfendes Amalgam | H_2SO_4 | Hg bewiesen, eine Potentialdifferenz zwischen tropfendem Quecksilber und Säure besteht, sondern dass fast der ganze so gemessene Werth eben diese Grösse darstellt, während das ruhende, mit einer continuirlichen Salzschicht bedeckte Quecksilber unter dem Elektrolyten gegen diesen nur geringe Differenzen zeigt.



Wie Paschen gleichwohl seine Werthe erhalten konnte, habe ich bereits früher angedeutet.[1]

Zusammenfassung der Resultate.

Aus vorstehenden Versuchen ergeben sich folgende Resultate.

1. Der Übergang von Ostwald's zu Paschen's Einstellung der Tropfelektrode ergibt den deutlichen Einfluss eines chemischen Angriffes auf den Strahl, als Ursache des entstehenden Stromes, was insbesondere durch das Auftreten eines Minimum in Paschen's Einstellung bei einzelnen Amalgamen als Tropfflüssigkeit erwiesen erscheint.

2. Die Tropfelektrode nimmt auch nicht annähernd das Potential des Elektrolyten an, sondern zeigt sich wesentlich abhängig von der tropfenden Flüssigkeit.

3. Die Differenz $CuSO_4 | H_2SO_4$ ist mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit als gering zu betrachten. Dasselbe gilt für $\text{Säure}_1 | \text{Säure}_2$.

4. Sind die Potentialdifferenzen zwischen zwei Elektrolyten gering, so muss auch Pt|Elektrolyt als klein (gleich Null) angesehen werden.

5. Ist Pt|Säure gering, so muss auch die Potentialdifferenz desjenigen Quecksilbers, dessen Oberfläche dauernd mit dem Elektrolyten in Berührung ist — ausser in den Fällen, wo heftigere chemische Reactionen auftreten (HCl, concentrirtere HNO_3) — gegen den Elektrolyten klein sein.

6. Daraus folgt, dass die durch Tropfelektroden gemessenen Potentialdifferenzen hauptsächlich den Werth tropfendes = reines Quecksilber|Elektrolyt darstellen.

7. Da der Strom in der Richtung tropfendes $\overrightarrow{\text{Hg|Elektrolyt|}}$ ruhendes Hg verläuft, ist $\overrightarrow{\text{Hg|Elektrolyt}}$ und nicht wie bisher $\overrightarrow{\text{Elektrolyt|Hg}}$ für die Richtung der Potentialdifferenz zu setzen.

8. Auch im Capillarelektrometer muss im polarisirten Zustande die Potentialdifferenz zwischen dem capillaren Meniscus und der Säure angenommen werden.

---

[1] S. 154.

Die Methode, Tropfelektroden in Elektrolyte tropfen zu lassen, ist sonach für die Messung einzelner Potentialdifferenzen kaum von Werth. Sie ergibt für Elektrolyte, welche das ruhende Quecksilber chemisch nicht stark beeinflussen (allerdings mit verkehrtem Vorzeichen), annähernd richtige Resultate für Hg|Elektrolyt, da oben immer durch das Tropfen reines Quecksilber denselben gegenübersteht und die Potentialdifferenz ruhendes Hg Elektrolyt nur von der Grössenordnung 0·1 Volt ist. Wo aber letzteres nicht der Fall ist, wie bei HCl, sind die Ergebnisse unrichtige.

Diese Thatsachen beweisen, dass man es nicht mit einem conservativen System in dem Sinne, wie es Helmholtz für seine Theorie verlangt, zu thun hat. Sie sprechen für die chemische Anschauungsweise, bringen aber auch keine Erscheinung, die Luggin's Auffassung widerspräche. Denn wenn dieser es auch nicht ausgesprochen hat, so folgt doch aus seinen Andeutungen, dass er annimmt, es werde durch Einführung der kathodisch polarisirenden Kräfte am capillaren Meniscus ein Spannungszustand geschaffen, der schliesslich zur chemischen Umlagerung der Theilchen führe und dass daher das Maximum eben an jenem Punkte der Wasserstoffabscheidung eintreten müsse.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Franz Exner, unter dessen Anleitung diese Arbeit entstanden ist, für seine freundliche Unterstützung meinen besten Dank auszudrücken.

SITZUNGSBERICHTE

DER

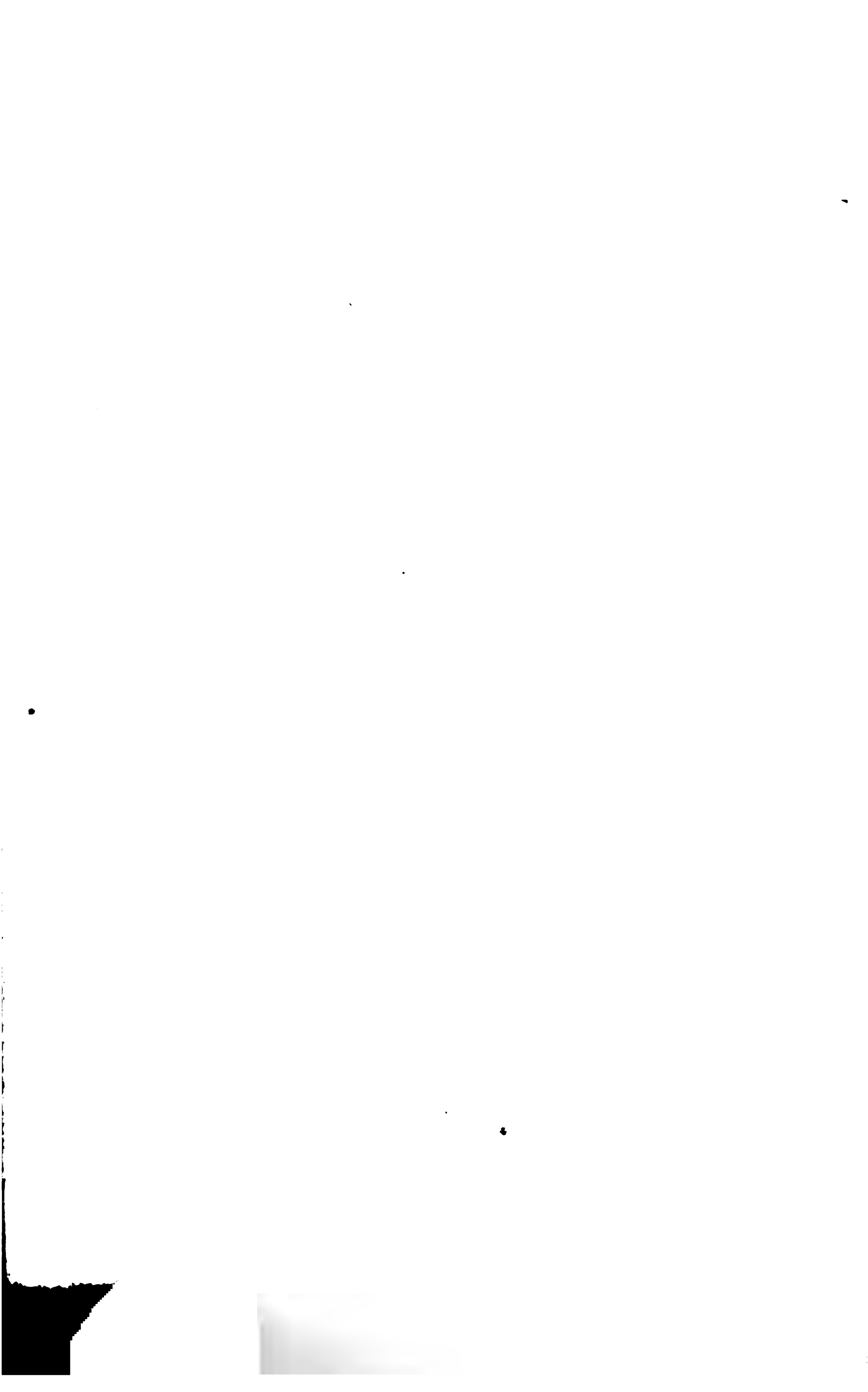
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. II. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



IV. SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 104 (1895): Abth. II. a, Heft VIII (October); Abth. III, Heft VIII—X (October—December).

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt den V. Band des im Wege des k. u. k. Ministeriums des Äusseren eingelangten Werkes »Galileo Galilei«.

Herr Prof. J. Puluj an der deutschen technischen Hochschule in Prag übersendet acht Stück photographische Reproductionen von kathodischen Aufnahmen.

Herr Prof. Dr. Franz Streintz übersendet aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz einen vorläufigen Bericht: »Über eine elektrochemische Wirkung der Röntgen-Strahlen auf Bromsilber«.

Herr Dr. Eduard Richter, Professor an der k. k. Universität in Graz, übersendet die Abhandlung: »Geomorphologische Beobachtungen aus Norwegen« als wissenschaftliche Ergebnisse seiner mit Akademie-Subvention unternommenen Reise.

Herr Dr. Otto Biermann, Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Eine Methode zur Herstellung nicht-analytischer Functionen einer complexen Variablen«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine im mathematisch-physikalischen Seminare der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Herrn Oscar Singer:

»Über die wechselseitige Induction zweier auf eine Kugel gleichmässig gewickelter Windungslagen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien: »Über das Verhalten der Opiansäure und ihrer Ester gegen einige Aldehydreactionen«, von Dr. Rud. Wegscheider.



Über die wechselseitige Induction zweier auf eine Kugelschale gleichmässig gewickelter Windungslagen

von

Oscar Singer.

Aus dem mathematisch-physikalischen Seminar der k. k. Universität in Wien.

In seiner Abhandlung: »Über Faraday's Kraftlinien« betrachtet Maxwell die Induction, welche ein auf eine Kugelfläche gleichmässig aufgewundener Draht auf einen zweiten, auf dieselbe Fläche gewundenen ausübt. In seiner Lösung wird angenommen,[1] dass die elektromotorische Kraft des primären Stromes momentan von der Intensität 0 bis zu einer endlichen Intensität ansteigt. Dasselbe wird dann auch für die Intensität des Inductionsstromes gezeigt. Da aber hiedurch auf den primären Stromkreis eine unendliche Inductionswirkung ausgeübt würde, so wird die Richtigkeit der Maxwell'schen Lösung zweifelhaft. Um dieselbe auf ihre Richtigkeit zu prüfen, wollen wir hier den Fall discutiren, dass die elektromotorische Kraft F des primären Stromes in einer endlichen, wenn auch sehr kurzen Zeit τ von 0 continuirlich bis zu einer constanten Intensität c ansteigt.

Die allgemeinen Gleichungen für die Induction zweier Stromkreise J und J' mit den Widerständen R und R', den Selbstinductionscoëfficienten A und B und dem wechselseitigen Inductionscoëfficienten C sind:

---

[1] Ostwald's Classiker, 69, S. 90.

$$RJ + A\frac{dJ}{dt} + C\frac{dJ'}{dt} = F$$

$$R'J' + B\frac{dJ'}{dt} + C\frac{dJ}{dt} = 0,$$

wenn im primären Stromkreis J eine elektromotorische Kraft wirkt, von der wir voraussetzen, dass sie von $t = 0$ bis $t = \tau$ eine beliebige Function $F(t)$ der Zeit, für negative t aber $= 0$, für $t > \tau$ gleich einer Constanten c sei. Für die vorausgesetzte Art der Windung ist $A = Nn^2$, $B = Nn'^2$, $C = Nnn'$, wobei n und n' die Anzahl der Windungen des primären, respective secundären Stromkreises und N eine Constante bedeutet. Durch Elimination erhält man:

$$a\frac{dJ}{dt} + J = \frac{Nn'^2}{RR'}\frac{dF}{dt} + \frac{F}{R} = \varphi \qquad a = N\left(\frac{n^2}{R} + \frac{n'^2}{R'}\right)$$

$$J = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\int \varphi e^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$J' = \frac{n'R}{nR'}J - \frac{n'}{nR'}F$$

$t = 0$ bis $t = \tau$:

$$J = J_1 = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\frac{Nn'^2}{RR'}\int \frac{dF}{dt}e^{\frac{t}{a}}\,dt + \frac{1}{aR}e^{-\frac{t}{a}}\int Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\frac{Nn'^2}{RR'}F + \frac{1}{aR}e^{-\frac{t}{a}}\left(1 - \frac{Nn'^2}{aR'}\right)\int Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$= \frac{1}{R}\left(1 - \frac{Nn^2}{aR}\right)F + \frac{Nn^2}{a^2R^2}e^{-\frac{t}{a}}\left(\int_t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right)$$

$$J' = J_1' = -\frac{n'}{nR'}\cdot\frac{Nn^2}{aR}F + \frac{n'}{nR'}\frac{Nn^2}{a^2R}e^{-\frac{t}{a}}\left(\int_t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right)$$

$$= -\frac{Nnn'}{aRR'}\left[F - \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\left(\int_t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right)\right]$$

$t = \tau$ bis $t = \infty$ ist $F = c$ $\varphi = \frac{c}{R'}$

$$J = J_2 = \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\frac{c}{R}\int e^{\frac{t}{a}}\,dt = \frac{c}{R} + \frac{1}{a}e^{-\frac{t}{a}}\frac{c}{R}C_2$$

$$J' = J_2' = \frac{n'c}{nR'} + \frac{n'c}{anR'}e^{-\frac{t}{a}}C_2 - \frac{n'c}{nR'} = -\frac{n'c}{anR'}e^{-\frac{t}{a}}C_2.$$

Die Constanten C_1 und C_2 bestimmen sich aus den Bedingungen:

$$(J_1)_0 = 0 = \frac{Nn^2}{a^2R^2}\left(\int Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + C_1\right) \qquad C_1 = -\int_0 Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$(J_1)_\tau = (J_2)_\tau = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{Nn^2}{aR}\right)c + \frac{Nn^2}{a^2R^2}\,e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt =$$

$$= \frac{c}{R} + \frac{1}{a}\,e^{-\frac{\tau}{a}}\frac{c}{R}\,C_2$$

$$C_2 = -\frac{Nn^2}{R}\left(e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{ac}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right).$$

Man erhält also schliesslich:

$t = 0$ bis $t = \tau$

$$J_1 = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{Nn^2}{aR}\right)F + \frac{Nn^2}{a^2R^2}\,e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt$$

$$J_1' = -\frac{Nnn'}{aRR'}\left[F - \frac{1}{a}\,e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right]$$

$t = \tau$ bis $t = \infty$

$$J_2 = \frac{c}{R} - \frac{Nn^2c}{aR^2}\,e^{-\frac{t}{a}}\left[e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{ac}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right]$$

$$J_2' = -\frac{Nnn'c}{aRR'}\,e^{-\frac{t}{a}}\left[e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{ac}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right]$$

Nach Weber wird ein Strom, welcher während einer bestimmten Zeit T mit der constanten Intensität I' fliesst, dann als Äquivalentstrom des Inductionsstromes bezeichnet, wenn die beiden Gleichungen bestehen:

$$I'T = \int_0^\infty J'dt \quad \text{und} \quad I'^2T = \int_0^\infty J'^2dt$$

$$I'T = -\frac{Nnn'}{aRR'}\left\{\int_0^\tau Fdt - \frac{1}{a}\int_0^\tau e^{-\frac{t}{a}}\,dt\int_0^t Fe^{\frac{t}{a}}\,dt + \right.$$

$$\left. + \left(ce^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{a}\int_0^\tau Fe^{\frac{t}{a}}\,dt\right)\int_\tau^\infty e^{-\frac{t}{a}}\,dt\right\}$$

$$I'T = -\frac{Nnn'}{aRR'}\left\{\int_0^\tau F dt + \Big|^{0} e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\Big|_0^\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^\tau F dt + ca - e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt\right\}$$

$$= -\frac{Nnn'}{RR'}\cdot c$$

$$I'^2 T = \left(\frac{Nnn'}{aRR'}\right)^2 \left\{\int_0^\tau \left[F - \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}}\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2 dt + \right.$$

$$\left. + \left[c e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{\frac{\tau}{a}} dt\right]^2 \int_\tau^\infty e^{-\frac{2t}{a}} dt\right\}$$

$$= \left(\frac{Nnn'}{aRR'}\right)^2 \{A + B + C + D\}$$

$$D = \left(c e^{\frac{\tau}{a}} - \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt\right)^2 \int_\tau^\infty e^{-\frac{2t}{a}} dt =$$

$$= \frac{c^2 a}{2} - c e^{-\frac{\tau}{a}}\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt + \frac{1}{2a} e^{-\frac{2\tau}{a}}\left[\int_0^\tau F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2$$

$$C = \frac{1}{a^2}\int_0^\tau e^{-\frac{2t}{a}} dt \left[\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2 =$$

$$= -\frac{1}{2a}\left| e^{-\frac{2t}{a}}\left[\int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt\right]^2\right|_0^\tau + \frac{1}{a}\int_0^\tau e^{-\frac{2t}{a}} F e^{\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$B = -\frac{2}{a}\int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$A = \int_0^\tau F^2 dt = \int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} F e^{\frac{t}{a}} dt =$$

$$= \left| F e^{-\frac{t}{a}} \int F e^{\frac{t}{a}} dt\right|_0^\tau - \int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(F e^{-\frac{t}{a}}\right) dt \int F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$= c e^{-\frac{\tau}{a}} \int_\tau F e^{\frac{t}{a}} dt + \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt -$$

$$- \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$A + B + C + D = \frac{c^2 a}{2} + c e^{-\frac{\tau}{a}} \int_0 F e^{\frac{t}{a}} dt +$$

$$+ \frac{1}{a}\int_0^\tau F e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0 F e^{\frac{t}{a}} dt - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$= \frac{c^2 a}{2} + c e^{-\frac{\tau}{a}} \int_0 F e^{\frac{t}{a}} dt + \frac{1}{a} \left(\int_0 F e^{\frac{t}{a}} dt \right) \left[\left| -a F e^{-\frac{t}{a}} \right|_0^\tau + \right.$$

$$\left. + a \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \right] - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$= \frac{c^2 a}{2} - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt$$

$$I'^2 T = \left(\frac{Nnn'}{aRR'} \right)^2 \left\{ \frac{c^2 a}{2} - \int_0^\tau \frac{dF}{dt} e^{-\frac{t}{a}} dt \int_0^t F e^{\frac{t}{a}} dt \right\}.$$

Der inducirte Integralstrom $I'T$ hängt also von der Zeit τ und der Function F gar nicht, seine gesammte Arbeitsleistung $R'I'^2 T$ in der Weise ab, dass sie sich für unendlich klein werdendes τ ein und derselben von F unabhängigen Grenze $\left(\frac{Nnn'}{aRR'} \right)^2 \frac{c^2 a}{2}$ nähert. Für diesen Grenzfall ist also die

Dauer des Äquivalentstromes: $T = 2a$,

Intensität des Äquivalentstromes: $I' = \frac{Nnn'}{2aRR'} c$,

d. i. $\dfrac{1}{1 + \dfrac{n'^2 R}{n^2 R'}}$ mal

so gross als der von Maxwell gefundene Werth $\frac{cn'}{2Rn}$.

V. SITZUNG VOM 13. FEBRUAR 1896.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 16 (1895), Heft X (December).

Herr Regierungsrath Dr. J. M. Eder, Director der k. k. Lehranstalt für Photographie und Reproductionsverfahren in Wien, dankt für die ihm zur Beschaffung von Hilfsmitteln zu seinen Untersuchungen der verschiedenen Spectren des Argons bewilligte Subvention.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt als weitere Fortsetzung seiner photographischen Mondvergrösserungen nach Original-Negativen des Lick-Observatoriums und der Pariser Sternwarte (von Loewy und Puiseux) 10 Mondlandschaften.

Herr Prof. Dr. J. Puluj übersendet zu den bereits vorgelegten photographischen Reproductionen von kathodischen Aufnahmen eine weitere unter seiner Leitung im physikalischen Cabinet der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag bewerkstelligte Aufnahme, und zwar die Photographie eines todten Kindes von neun Tagen.

Ferner übersendet Herr Prof. Puluj eine Abhandlung: »Über die Entstehung der Röntgen'schen Strahlen und ihre photographische Wirkung«.

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Dr. Emanuel Pochmann in Linz a. D. vor: »Über zwei neue physikalische Eigenschaften der atmosphärischen Luft und deren Bedeutung für die Wärmemechanik wie für die gesammte Energetik«.

Das w. M. Herr Prof. K. Grobben überreicht eine im II. zoologischen Institute der k. k. Universität in Wien von dem

Assistenten dieses Institutes Dr. Franz Werner ausgeführte Arbeit: »Über die Schuppenbekleidung des regenerirten Schwanzes bei Eidechsen«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner von Marilaun berichtet über das Vorkommen der Manna-Flechte *(Lecanora esculenta)* in Griechenland.

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Ebner überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung, betitelt: »Weitere Versuche über die Umkehrung der Doppelbrechung leimgebender Gewebe durch Reagentien«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine aus seinem Laboratorium hervorgegangene Arbeit: »Über die Einwirkung des alkoholischen Kalis auf den Isovaleraldehyd«, von Leopold Kohn.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine von Herrn A. Reich im I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Untersuchung, betitelt: »Synthetische Versuche in der Topasreihe«.

VI. SITZUNG VOM 20. FEBRUAR 1896.

Das c. M. Herr Prof. R. v. Wettstein in Prag dankt für die ihm behufs einer monographischen Bearbeitung der Gattung *Sempervivum* von der kaiserl. Akademie gewährte Subvention.

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Das Erfrieren der Pflanzen bei Temperaturen über dem Eispunkt«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. v. Hepperger in Graz: »Über den Einfluss der relativen Absorption auf die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre«.

Ferner theilt das w. M. Herr Director E. Weiss mit, dass er für den neuen, wahrscheinlich in den Morgenstunden des 14. Februar von Herrn Perrine, Astronomen der Lickstern-warte, entdeckten Kometen, ein Elementarsystem berechnet habe, welches in einem Circulare der kais. Akademie, und zwar unter Nr. LXXVIII bekannt gemacht wurde.

Über den Einfluss der selectiven Absorption auf die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre

von

Dr. **J. v. Hepperger,**

Professor an der k. k. Universität in Graz.

In meiner Abhandlung: »Über die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens«[1] habe ich die Annahme gemacht, dass die Extinction des Lichtes durch die Formel darstellbar sei

$$\log \frac{J_0}{J} = X\vartheta + Y(1 - Z^{-\vartheta}), \tag{1}$$

in welcher J_0 die Intensität des ungeschwächten Lichtes $J_0 - J$ den Intensitätsverlust ausdrückt und

$$\vartheta = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{l}s}}{\cos i} ds; \quad \log X = 1 \cdot 7269; \quad \log Y = 9 \cdot 1112 - 10;$$

$$\log\log Z = 2 \cdot 2200.$$

Die Grundlage zur Berechnung der Coëfficienten X, Y, Z bildeten die in der Abhandlung des Herrn Seeliger: »Über die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre« aufgeführten Werthe der Herrn Müller's mittlerer Extinctionstabelle entlehnten Reductionen auf das Zenith, von welchen sich die Hälfte auf Zenithdistanzen über 80° bezieht. Da diese mittlere Extinctionstabelle durch Verbindung zweier Tabellen entstanden ist, deren

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV, Abth. II. a., März 1895.

eine sich auf photometrische Vergleiche der fünf Sterne α Cygni, η Ursae majoris, δ Persei, α Aurigae und α Tauri mit dem Polarstern gründet und von 0°—80° Zenithdistanz reicht, während die andere aus Beobachtungen (mittelst des Zöllner'schen Photometers) von Planeten und α Tauri bei Zenithdistanzen über 80° abgeleitet wurde und von Herrn Müller ausdrücklich bemerkt wird, dass letztere Beobachtungen nur an besonders klaren Tagen ausgeführt worden sind, so erscheint es sehr fraglich, ob die durch Vereinigung beider Tabellen entstandene Tafel einem einheitlichen mittleren Zustande der Luft entspricht und den nöthigen Grad von Homogenität besitzt, um theoretischen Untersuchungen als Basis zu dienen. Auch ist es überhaupt immer misslich, als Grundlage der Rechnung Werthe einer auf empirischem Wege erhaltenen Tabelle zu benützen, indem die Fehler derselben für verschiedene Argumente oft sehr ungleich sind und verlässliche Anhaltspunkte zu einer rationellen Gewichtsbemessung meist fehlen.

Deshalb unternahm ich die Reduction sämmtlicher Potsdamer Beobachtungen, und zwar für beide Gruppen getrennt, unter Zugrundelegung der Formel 1). Um aber auch der Frage näher zu treten, ob sich in den Beobachtungen eine Abnahme der Absorption in den unteren Schichten der Atmosphäre mit hinreichender Deutlichkeit ausspricht, oder ob die der Laplace'schen Formel zu Grunde liegende Annahme eines constanten Absorptionscoëfficienten den Beobachtungen bereits Genüge leistet, habe ich auch die Reduction nach dieser Formel ausgeführt.

Bedeutet J_1 die Intensität des Lichtes, wenn sich die Lichtquelle im Zenith befindet, und ϑ_1 den entsprechenden Werth von ϑ, so ist nach Formel 1) die Correction wegen Extinction

$$\log \frac{J_1}{J} = X(\vartheta - \vartheta_1) + Y(Z^{-\vartheta_1} - Z^{-\vartheta}). \qquad 2)$$

Ist J' die Intensität des Lichtes des Polarsterns in seiner mittleren Zenithdistanz, welche für Potsdam 37°6 beträgt, so wird

$$\log \frac{J_1}{J'} = \log \frac{J}{J'} + \log \frac{J_1}{J}.$$

Bezeichnet man die eingangs aufgeführten Werthe von X, Y, Z mit dem Index 0 und die beobachteten Werthe von $\log\frac{J}{J'}$ mit dem Buchstaben ν, so liefert, wenn $c = X_0(\vartheta - \vartheta_1) + Y_0(Z_0^{-\vartheta_1} - Z_0^{-\vartheta})$ gesetzt wird, jede Beobachtung einen genäherten Werth von $\log\frac{J_1}{J'}$, welcher N heissen möge und bestimmt ist durch die Gleichung

$$N = \nu + c.$$

Die Werthe von $\log\vartheta$ und c enthält Tafel XIII am Schlusse der Abhandlung. Bedeutet p das Gewicht einer Beobachtung, $[p]$ die n Beobachtungen desselben Sternes entsprechende Gewichtssumme, so ist der wahrscheinlichste Werth von $\log\frac{J_1}{J'} = \frac{[pN]}{[p]}$ und für jede Beobachtung die Abweichung δ vom Mittel

$$\delta = N - \frac{[pN]}{[p]}.$$

Eine Änderung von X, Y, Z bedingt auch im Allgemeinen eine Änderung von δ; ändert man nur X und setzt

$$X = X_0(1+x); \quad a = X_0(\vartheta - \vartheta_1); \quad A = a - \frac{[pa]}{[p]},$$

so erhält man für $\log\frac{J_1}{J'}$ einen Näherungswerth N'

$$N' = N + ax$$

und es wird der wahrscheinlichste Werth von

$$\log\frac{J_1}{J'} = \frac{[pN]}{[p]} + \frac{[pa]}{[p]}x$$

und die Abweichung δ' vom neuen Mittel

$$\delta' = \delta + Ax.$$

Zu ganz ähnlichen Ausdrücken gelangt man bei Anwendung der Laplace'schen Formel, nach welcher die Correction wegen Extinction für die wahre Zenithdistanz z (welcher die

scheinbare Zenithdistanz z' und die Refraction ζ entsprechen möge) gleich wird

$$H\left[\frac{\zeta}{\sin z'} - \left(\frac{\zeta}{\sin z'}\right)_{z=0}\right].$$

Bezeichnet man diese Grösse für

$$\log H = \log H_0 = 7\cdot1258-10$$

(es ist dies der von Herrn Seeliger angenommene Werth) mit dem Buchstaben b, so wird

$$N = \nu+b; \qquad \delta = N - \frac{[pN]}{[p]},$$

während für

$$H = H_0(1+w) \text{ und } B = b - \frac{[pb]}{[p]}$$

$$\delta' = \delta + Bw$$

wird.

Die Reduction der ersten Gruppe von Beobachtungen[1] gibt die nun folgende Tafel I.

Columne 1 enthält die Nummer der Beobachtung, 2 die wahre Zenithdistanz, 3 die Werthe von ν, 4 die von $\nu+c$ entsprechend der Formel 2), welche im Folgenden mit H bezeichnet werden soll, 5 die aus den Zahlen der vorangehenden Columne gebildeten Abweichungen vom Mittel $\left(N - \frac{[pN]}{[p]}\right)$; Columne 6 wird später erklärt werden; Columne 7 enthält die nach der Laplace'schen Formel (L) berechneten Abweichungen vom Mittel, und Columne 8, 9 die von Herrn Müller angegebenen Abweichungen, welche sich bei Benützung seiner Specialtabelle (M_1) und mittleren Tabelle (M_2) ergeben.

Das Zeichen : in Columne 3 bedeutet, dass Herr Müller der Beobachtung das Gewicht $^1/_2$ zuerkannte, während die übrigen Beobachtungen das Gewicht 1 erhielten. Diese Gewichtsbemessung habe ich unverändert beibehalten.

---

[1] Beide Gruppen von Beobachtungen sind in Nr. 12 der »Publicationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam« enthalten.

Tafel I.

α Cygni.

Nr.	z	log α Cygni / Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·304 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·287 L	0·279 M_1	0·302 M_2
1	7·6	0·272	0·273	− 31	−1	− 14	− 7	− 30
2	7·7	269	270	− 34	−1	− 17	− 10	− 33
3	7·7	338:	339	+ 35	−1	+ 52	+ 59	+ 36
4	7·9	201	202	−102	−1	− 85	− 78	−101
5	7·9	317	318	+ 14	−1	+ 31	+ 38	+ 15
6	8·1	231	232	− 72	−1	− 55	− 48	− 71
7	8·1	314	315	+ 11	−1	+ 28	+ 35	+ 12
8	9·1	193	194	−110	−1	− 93	− 86	−109
9	9·1	333	334	+ 30	−1	+ 47	+ 54	+ 31
10	9·3	256	257	− 47	−1	− 30	− 23	− 46
11	9·4	228	230	− 74	−1	− 58	− 51	− 74
12	9·7	337	339	+ 35	−1	+ 51	+ 58	+ 35
13	10·2	336:	338	+ 34	−1	+ 50	+ 57	+ 34
14	10·6	305:	307	+ 3	−1	+ 19	+ 26	+ 4
15	11·1	291	293	− 11	−1	+ 5	+ 12	− 10
16	11·2	270	272	− 32	−1	− 16	− 9	− 31
17	11·2	322	324	+ 20	−1	+ 36	+ 43	+ 21
18	13·0	334	337	+ 33	−1	+ 49	+ 56	+ 33
19	13·7	265	268	− 36	−1	− 20	− 13	− 36
20	14·9	262:	266	− 38	−1	− 22	− 16	− 38
21	15·2	271	275	− 29	−1	− 13	− 7	− 29
22	15·5	316	320	+ 16	−1	+ 32	+ 38	+ 16
23	15·5	356:	360	+ 56	−1	+ 72	+ 78	+ 56
24	15·6	364	368	+ 64	−1	+ 80	+ 86	+ 64
25	17·6	216:	221	− 83	−1	− 67	− 61	− 83
26	17·6	287	292	− 12	−1	+ 4	+ 10	− 12
27	18·2	233	239	− 65	−1	− 50	− 44	− 66
28	19·4	285	292	− 12	−1	+ 3	+ 8	− 14
29	19·5	274	281	− 23	−1	− 8	− 3	− 25
30	20·2	263	270	− 34	−1	− 19	− 13	− 35
31	20·9	233:	241	− 63	−1	− 49	− 43	− 65
32	20·9	215	223	− 81	−1	− 67	− 61	− 83
33	21·0	228	236	− 68	−1	− 54	− 48	− 70

Nr.	z	log α Cygni / Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·304 H	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·287 L	0·279 M_1	0·302 M_2
34	21·1	0·298	0·306	+ 2	—1	+ 16	+ 22	0
35	22·0	305	313	+ 9	—1	+ 24	+ 29	+ 8
36	22·3	269	278	— 26	—1	— 12	— 6	— 28
37	22·6	277	286	— 18	—1	— 4	+ 2	— 20
38	23·1	261	270	— 34	—1	— 19	— 14	— 36
39	24·2	272	282	— 22	—1	— 8	— 2	— 24
40	24·6	292	303	— 1	—1	+ 13	+ 18	— 3
41	24·8	246	257	— 47	—1	— 33	— 28	— 49
42	27·2	280	293	— 11	—1	+ 3	+ 7	— 13
43	28·5	262:	277	— 27	—1	— 14	— 10	— 30
44	29·4	255	271	— 33	—1	— 21	— 16	— 36
45	29·5	288	304	0	—1	+ 12	+ 17	— 3
46	29·6	212	228	— 76	—1	— 64	— 59	— 79
47	29·6	247	263	— 41	—1	— 29	— 24	— 44
48	29·6	266	282	— 22	—1	— 10	— 5	— 25
49	30·8	261	278	— 26	—1	— 13	— 9	— 29
50	32·2	254	273	— 31	—1	— 19	— 15	— 34
51	32·2	290:	309	+ 5	—1	+ 17	+ 21	+ 2
52	33·3	326	347	+ 43	—1	+ 54	+ 58	+ 39
53	33·3	275	296	— 8	—1	+ 3	+ 7	— 12
54	34·8	259:	282	— 22	—1	— 11	— 7	— 26
55	35·0	252	275	— 29	—1	— 18	— 14	— 33
56	36·1	243	268	— 36	—1	— 26	— 22	— 41
57	36·3	256:	281	— 23	—1	— 13	— 8	— 27
58	37·0	245	272	— 32	—1	— 23	— 19	— 37
59	37·1	275	302	— 2	—1	+ 7	+ 12	— 7
60	37·2	263	290	— 14	—1	— 4	0	— 19
61	37·3	246	273	— 31	—1	— 21	— 17	— 36
62	39·0	243	273	— 31	—1	— 22	— 18	— 36
63	41·4	320:	355	+ 51	—1	+ 59	+ 62	+ 45
64	41·6	281	316	+ 12	—1	+ 20	+ 24	+ 6
65	41·7	316	351	+ 47	—1	+ 55	+ 59	+ 42
66	42·0	258	294	— 10	—1	— 2	+ 1	— 16
67	43·1	256	295	— 9	—1	— 3	+ 1	— 16
68	43·4	282	321	+ 17	—1	+ 24	+ 27	+ 11
69	45·8	236:	281	— 23	—1	— 18	— 15	— 29

Nr.	z	log $\frac{\alpha \text{ Cygni}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·304 *H*	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·287 *L*	0·279 M_1	0·302 M_2
70	46·1	0·220	0·266	— 38	—1	— 33	— 30	— 45
71	46·8	204	252	— 52	—1	— 48	— 45	— 59
72	47·2	244	293	— 11	—1	— 7	— 4	— 18
73	47·6	266	316	+ 12	—1	+ 16	+ 19	+ 5
74	47·9	212	263	— 41	—1	— 37	— 34	— 48
75	48·2	249	300	— 4	—1	0	+ 3	— 10
76	48·3	272 :	324	+ 20	—1	+ 24	+ 26	+ 13
77	48·6	249	302	— 2	—1	+ 1	+ 4	— 9
78	49·4	238	293	— 11	—1	— 8	— 5	— 18
79	53·4	296	365	+ 61	—1	+ 61	+ 63	+ 54
80	54·0	210	281	— 23	—1	— 23	— 22	— 29
81	54·1	211	283	— 21	—1	— 22	— 20	— 28
82	54·7	236	310	+ 6	—1	+ 5	+ 7	— 1
83	55·3	301	377	+ 73	—1	+ 72	+ 73	+ 67
84	56·1	234 :	314	+ 10	—1	+ 8	+ 9	+ 4
85	56·4	176	257	— 47	—1	— 49	— 48	— 53
86	57·4	244	330	+ 26	—1	+ 23	+ 23	+ 20
87	57·4	241	327	+ 23	—1	+ 20	+ 20	+ 17
88	58·9	171 :	264	— 40	—1	— 44	— 44	— 45
89	60·4	177	278	— 26	0	— 32	— 32	— 31
90	60·8	233	337	+ 33	—1	+ 26	+ 26	+ 28
91	61·1	201	306	+ 2	0	— 4	— 4	— 2
92	62·0	249	360	+ 56	0	+ 48	+ 48	+ 52
93	63·0	190 :	307	+ 3	0	— 5	— 5	0
94	63·5	186	307	+ 3	0	— 6	— 6	0
95	64·0	214	338	+ 34	0	+ 25	+ 25	+ 31
96	65·1	241	373	+ 69	0	+ 59	+ 58	+ 67
97	65·6	207	343	+ 39	0	+ 28	+ 28	+ 38
98	66·5	133	277	— 27	0	— 39	— 40	— 28
99	66·6	168	313	+ 9	0	— 3	— 4	+ 8
100	66·6	185	330	+ 26	0	+ 14	+ 13	+ 25
101	66·6	184	329	+ 25	0	+ 13	+ 12	+ 24
102	67·4	140	292	— 12	0	— 25	— 25	— 12
103	67·6	210	364	+ 60	0	+ 47	+ 46	+ 60
104	68·5	097	259	— 45	+1	— 59	— 59	— 43

Nr.	z	log α Cygni / Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·304 *H*	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·287 *L*	0·279 M_1	0·302 M_2
105	68·5	0·171	0·333	+ 29	+1	+ 15	+ 15	+ 31
106	68·6	138	301	— 3	1	— 17	— 17	— 1
107	68·8	148	313	+ 9	1	— 5	— 5	+ 11
108	69·6	138 :	312	+ 8	1	— 7	— 7	+ 11
109	70·4	147	330	+ 26	1	+ 10	+ 11	+ 30
110	71·0	103	293	— 11	2	— 27	— 26	— 6
111	71·1	099	291	— 13	1	— 30	— 29	— 9
112	71·1	102	294	— 10	1	— 27	— 26	— 6
113	71·7	098	298	— 6	1	— 24	— 22	— 1
114	72·2	148	354	+ 50	2	+ 33	+ 34	+ 57
115	73·1	078	297	— 7	2	— 25	— 23	+ 1
116	73·1	160	379	+ 75	2	+ 57	+ 59	+ 83
117	73·5	087	313	+ 9	2	— 10	— 7	+ 17
118	74·3	152	391	+ 87	2	+ 68	+ 71	— 96
119	74·6	074	318	+ 14	3	— 5	— 2	+ 24
120	75·7	036	301	— 3	3	— 23	— 19	+ 8
121	76·0	041	312	+ 8	3	— 11	— 7	+ 20
122	76·3	0·029	307	+ 3	3	— 17	— 13	+ 14
123	77·0	9·974 :	268	— 36	3	— 56	— 52	— 24
124	77·2	9·975	273	— 31	4	— 50	— 46	— 18
125	77·2	0·044	342	+ 38	4	+ 19	+ 23	+ 51
126	77·4	0·012	315	+ 11	4	— 8	— 4	+ 24
127	78·0	9·973	292	— 12	4	— 31	— 28	+ 1
128	78·6	0·036	372	+ 68	4	+ 49	+ 52	+ 81
129	78·7	0·033	372	+ 68	4	+ 49	+ 52	+ 81
130	78·9	9·976 :	321	+ 17	4	— 1	+ 1	+ 30
131	79·1	9·909	260	— 44	4	— 62	— 60	— 31
132	79·2	9·963	318	+ 14	4	— 4	— 3	+ 26
133	79·8	9·934	309	+ 5	4	— 12	— 12	+ 16
134	80·1	9·973	359	+ 55	4	+ 39	+ 37	+ 65
135	80·7	9·899	309	+ 5	4	— 10	— 15	+ 13
136	81·0	9·952	374	+ 70	4	+ 56	+ 49	+ 78
137	81·3	9·852	288	— 16	4	— 29	— 39	— 10
138	81·4	9·919	359	+ 55	4	+ 43	+ 32	+ 61
139	81·5	9·908	353	+ 49	4	+ 37	+ 25	+ 55
140	81·7	9·842	297	— 7	4	— 19	— 33	— 2



Nr.	z	log $\frac{\alpha\ \text{Cygni}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·304 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·287 L	0·279 M_1	0·302 M_2
141	81·7	9·934 :	0·389	+ 85	+4	+ 73	+ 59	+ 90
142	81·8	9·868	328	+ 24	4	+ 13	— 3	+ 28
143	81·8	9·874	334	+ 30	4	+ 19	+ 3	+ 34
144	82·1	9·838	314	+ 10	3	0	— 19	+ 13
145	82·1	9·885	361	+ 57	3	+ 47	+ 28	+ 60
146	82·3	9·888	375	+ 71	3	+ 62	+ 39	+ 73
147	82·5	9 748	246	— 58	3	— 66	— 91	— 57
148	82·6	9·768	272	— 32	3	— 39	— 67	— 31
149	82·6	9·744 :	248	— 56	3	— 63	— 91	— 55
150	82·6	9·878	382	+ 78	3	+ 71	+ 43	+ 79
151	82·7	9·807	317	+ 13	3	+ 6	— 23	+ 13
152	82·7	9·802	312	+ 8	3	+ 1	— 28	+ 8
153	82·7	9·842	352	+ 48	3	+ 41	+ 12	+ 48
154	82·7	9·856	366	+ 62	3	+ 55	+ 26	+ 62
155	82·7	9·816	0·326	+ 22	+3	+ 15	— 14	+ 23
[$p\delta\delta$]				0·2231	+0·0085	0·1833	0·1779	0·2422

η Ursae majoris.

Nr.	z	log $\frac{\eta\ \text{Urs.}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·079 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·059 L	0·063 M_1	0·077 M_2
1	2·6	0·074	0·074	— 5	—1	+ 15	+ 11	— 3
2	2·7	078	078	— 1	—1	+ 19	+ 15	+ 1
3	4·4	100	100	+ 21	—1	+ 41	+ 37	+ 23
4	6·0	091	092	+ 13	—1	+ 32	+ 28	+ 14
5	7·5	078	079	0	—1	+ 20	+ 15	+ 1
6	9·2	065 :	066	— 13	—1	+ 7	+ 2	— 12
7	10·7	083	085	+ 6	—1	+ 25	+ 20	+ 7
8	12·2	087	089	+ 10	—1	+ 30	+ 25	+ 11
9	12·7	045	048	— 31	—1	— 12	— 17	— 31
10	12·8	060	063	— 16	—1	+ 3	— 2	— 16

Nr.	z	log η Urs./Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·079 H	Δζ	Abweichung v. Mittel 0·059 L	0·063 M_1	0·077 M_2
11	18·1	0·060	0·066	— 13	—1	+ 5	— 1	— 14
12	20·3	096	103	+ 24	—1	+ 42	+ 36	+ 23
13	21·3	093	101	+ 22	—1	+ 40	+ 34	+ 20
14	22·2	049	058	— 21	—1	— 4	— 10	— 23
15	22·4	070	079	0	—1	+ 17	+ 11	— 2
16	23·9	024 :	034	— 45	—1	— 28	— 34	— 47
17	24·3	095	105	+ 26	—1	+ 43	+ 38	+ 24
18	24·7	040	051	— 28	—1	— 11	— 17	— 30
19	26·1	097	109	+ 30	—1	+ 47	+ 41	+ 28
20	26·3	097	109	+ 30	—1	+ 47	+ 41	+ 28
21	26·5	115	128	+ 49	—1	+ 65	+ 59	+ 46
22	27·7	062 :	076	— 3	—1	+ 13	+ 7	— 6
23	30·3	013	030	— 49	—1	— 34	— 40	— 52
24	32·2	060	079	0	—1	+ 15	+ 9	— 3
25	34·6	026 :	049	— 30	—1	— 17	— 23	— 35
26	35·0	017	040	— 39	—1	— 25	— 31	— 43
27	35·6	084	108	+ 29	—1	+ 43	+ 36	+ 25
28	36·0	034	059	— 20	—1	— 7	— 13	— 25
29	36·8	039	065	— 14	—1	— 1	— 7	— 19
30	37·5	038	065	— 14	—1	— 1	— 7	— 19
31	38·3	052	081	+ 2	—1	+ 14	+ 8	— 3
32	39·3	0·027	058	— 21	—1	— 10	— 16	— 27
33	39·9	9·995 :	027	— 52	—1	— 41	— 47	— 58
34	40·6	0·017	050	— 29	—1	— 18	— 24	— 35
35	42·2	0·081	118	+ 39	—1	+ 49	+ 43	+ 33
36	42·7	0·029	067	— 12	—1	— 2	— 9	— 18
37	44·7	0·070	112	+ 33	—1	+ 42	+ 36	+ 27
38	45·6	0·034	078	— 1	—1	+ 8	+ 1	— 7
39	46·0	9·990	035	— 44	—1	— 35	— 42	— 50
40	46·2	0·059	105	+ 26	—1	+ 34	+ 28	+ 20
41	46·2	9·996	042	— 37	—1	— 29	— 35	— 43
42	46·4	9·990 :	037	— 42	—1	— 35	— 41	— 49
43	46·9	0·051	099	+ 20	—1	+ 27	+ 21	+ 13
44	47·1	0·040	088	+ 9	—1	+ 17	+ 11	+ 3
45	50·1	0·033	090	+ 11	—1	+ 17	+ 11	+ 5
46	50·2	0·020	078	— 1	—1	+ 4	— 2	— 8

Nr.	z	log $\frac{\eta \text{ Urs.}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·079 *H*	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·059 *L*	0·063 M_1	0·077 M_2
47	53·1	0·066	0·134	+ 55	−1	+ 58	+ 52	+ 48
48	53·4	0·004:	073	− 6	−1	− 3	− 9	− 13
49	53·9	9·985	056	− 23	−1	− 21	− 26	− 30
50	54·0	0·021	092	+ 13	−1	+ 16	+ 10	+ 7
51	54·2	9·983	055	− 24	−1	− 22	− 27	− 31
52	54·9	0·017	092	+ 13	−1	+ 15	+ 9	+ 6
53	55·7	9·964	042	− 37	−1	− 36	− 41	− 43
54	56·0	9·956:	035	− 44	−1	− 43	− 47	− 50
55	56·7	0·009	091	+ 12	−1	+ 13	+ 8	+ 6
56	56·9	9·994	077	− 2	−1	− 1	− 6	− 8
57	57·5	9·996	082	+ 3	−1	+ 3	− 1	− 3
58	58·0	0·076	165	+ 86	−1	+ 85	+ 81	+ 80
59	59·6	9·959	056	− 23	−1	− 25	− 28	− 28
60	60·8	9·953	057	− 22	−1	− 26	− 28	− 27
61	61·5	9·992	100	+ 21	−1	+ 17	+ 15	+ 16
62	62·7	9·968	083	+ 4	0	− 1	− 1	+ 1
63	62·9	9·956	072	− 7	0	− 12	− 12	− 10
64	63·1	9·937	055	− 24	0	− 30	− 30	− 28
65	63·5	9·947	068	− 11	0	− 17	− 17	− 14
66	63·8	9·976	099	+ 20	0	+ 14	+ 14	+ 17
67	64·0	9·907	031	− 48	0	− 54	− 53	− 51
68	64·3	9·917	043	− 36	0	− 42	− 41	− 38
69	65·0	9·939:	071	− 8	0	− 16	− 14	− 10
70	65·5	9·972	108	+ 29	0	+ 20	+ 23	+ 27
71	65·5	9·982	118	+ 39	0	+ 30	+ 33	+ 37
72	66·0	9·960	100	+ 21	0	+ 12	+ 15	+ 19
73	66·2	9·874	015	− 64	+1	− 72	− 69	− 65
74	66·3	9·961	103	+ 24	+1	+ 15	+ 19	+ 23
75	66·6	9·938	083	+ 4	0	− 5	− 1	+ 3
76	67·7	9·937	092	+ 13	0	+ 2	+ 8	+ 13
77	69·1	9·876	045	− 34	+1	− 46	− 39	− 32
78	69·2	9·851	021	− 58	+1	− 70	− 62	− 56
79	69·5	9·955	128	+ 49	+1	+ 37	+ 45	+ 52
80	71·1	9·901	093	+ 14	+1	0	+ 10	+ 18
81	71·4	9·896	091	+ 12	+2	− 1	+ 9	+ 18
82	71·5	9·814	011	− 68	+1	− 82	− 71	− 63

Nr.	z	$\log \frac{\eta \text{ Urs.}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·079 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·059 L	0·063 M_1	0·077 M_2
83	71·6	9·892	0·090	+ 11	+2	— 3	+ 8	+ 17
84	71·9	9·821	023	— 56	2	— 70	— 59	— 50
85	72·0	9·898	102	+ 23	1	+ 8	+ 19	+ 29
86	72·3	9·838	046	— 33	2	— 48	— 36	— 27
87	72·6	9·915	127	+ 48	2	+ 33	+ 45	+ 55
88	72·8	9·927	144	+ 65	2	+ 50	+ 62	+ 72
89	72·9	9·814	030	— 49	2	— 64	— 51	— 41
90	73·3	9·853	075	— 4	3	— 19	— 6	+ 4
91	73·4	9·837	061	— 18	2	— 33	— 21	— 10
92	73·4	9·873	097	+ 18	2	+ 3	+ 15	+ 26
93	74·4	9·863	104	+ 25	2	+ 9	+ 22	+ 34
94	75·1	9·893	146	+ 67	3	+ 51	+ 64	+ 78
95	75·1	9·884	137	+ 58	3	+ 42	+ 55	+ 69
96	76·0	9·813	0·084	+ 5	3	— 11	+ 1	+ 17
97	76·1	9·698	9·971	—108	3	—124	—112	— 96
98	76·6	9·744	0·028	— 51	4	— 67	— 56	— 39
99	76·8	9·780	0·069	— 10	3	— 27	— 16	+ 2
100	77·1	9·733:	0·029	— 50	3	— 67	— 56	— 37
101	77·2	9·677	9·975	—104	4	—120	—110	— 91
102	77·2	9·737	0·035	— 44	4	— 60	— 50	— 31
103	77·3	9·769	0·070	— 9	3	— 26	— 16	+ 4
104	77·4	9·791	0·094	+ 15	4	— 1	+ 8	+ 28
105	77·5	9·803:	0·109	+ 30	3	+ 13	+ 22	+ 43
106	77·6	9·781	0·089	+ 10	4	— 6	+ 3	+ 23
107	77·7	9·870:	0·181	+102	4	+ 86	+ 94	+115
108	77·7	9·863:	0·174	+ 95	4	+ 79	+ 87	+108
109	77·7	9·823	0·134	+ 55	4	+ 39	+ 47	+ 68
110	77·7	9·884	0·195	+116	+4	+100	+108	+129
[$p\delta\delta$]				0·1456	+0·0003	0·1599	0·1488	0·1529

δ Persei.

Nr.	z	log $\frac{\delta\ \text{Persei}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 9·648 *H*	Δδ	Abweichung v. Mittel 9·629 *L*	9·642 M_1	9·647 M_2
1	5·1	9·674	9·674	+ 26	−1	+ 45	+ 32	+ 27
2	5·2	654	654	+ 6	−1	+ 25	+ 12	+ 7
3	5·7	665	665	+ 17	−1	+ 36	+ 23	+ 18
4	5·8	688	688	+ 40	−1	+ 59	+ 46	+ 41
5	6·2	683	684	+ 36	−1	+ 54	+ 41	+ 36
6	6·4	719	720	+ 72	−1	+ 90	+ 77	+ 72
7	6·9	672	673	+ 25	−1	+ 43	+ 30	+ 25
8	7·1	589	590	− 58	−1	− 39	− 53	− 58
9	8·5	626	627	− 21	−1	− 2	− 16	− 21
10	9·0	588	589	− 59	−1	− 40	− 54	− 59
11	9·0	641	642	− 6	−1	+ 13	− 1	− 6
12	9·3	673	674	+ 26	−1	+ 45	+ 31	+ 26
13	10·4	653	655	+ 7	−1	+ 25	+ 11	+ 6
14	10·5	578	580	− 68	−1	− 50	− 64	− 68
15	11·0	723	725	+ 77	−1	+ 95	+ 82	+ 77
16	11·6	694	696	+ 48	−1	+ 67	+ 53	+ 48
17	11·6	614	616	− 32	−1	− 13	− 27	− 32
18	13·1	717	720	+ 72	−1	+ 90	+ 76	+ 71
19	16·9	670	675	+ 27	−1	+ 44	+ 30	+ 25
20	18·0	695	701	+ 53	−1	+ 70	+ 56	+ 51
21	18·6	577	583	− 65	−1	− 48	− 62	− 67
22	21·0	587	595	− 53	−1	− 37	− 51	− 56
23	22·4	580	589	− 59	−1	− 43	− 57	− 62
24	24·3	566	576	− 72	−1	− 56	− 70	− 75
25	25·0	648 :	659	+ 11	−1	+ 27	+ 13	+ 8
26	26·0	692	704	+ 56	−1	+ 72	+ 57	+ 53
27	28·1	638	652	+ 4	−1	+ 19	+ 5	0
28	28·1	686 :	700	+ 52	−1	+ 67	+ 53	+ 48
29	28·3	630 :	644	− 4	−1	+ 11	− 3	− 7
30	28·5	611	626	− 22	−1	− 7	− 22	− 26
31	28·7	607	622	− 26	−1	− 11	− 25	− 30
32	28·7	645	660	+ 12	−1	+ 27	+ 13	+ 8
33	29·3	607	623	− 25	−1	− 11	− 25	− 29
34	30·5	601	618	− 30	−1	− 16	− 30	− 34
35	31·0	658 :	676	+ 28	−1	+ 42	+ 28	+ 23

Nr.	z	log δ Persei / Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 9·648 H	Δδ	Abweichung v. Mittel 9·629 L	9·642 M_1	9·647 M_2
36	31·1	9·577 :	9·595	— 53	—1	— 39	— 53	— 58
37	32·5	614	634	— 14	—1	— 1	— 15	— 19
38	33·0	621	641	— 7	—1	+ 7	— 7	— 12
39	34·9	613	636	— 12	—1	+ 1	— 13	— 17
40	35·8	610	635	— 13	—1	— 1	— 15	— 19
41	36·9	611	638	— 10	—1	+ 1	— 13	— 17
42	37·4	663 :	690	+ 42	—1	+ 54	+ 40	+ 36
43	38·1	590	618	— 30	—1	— 18	— 32	— 36
44	39·2	581	611	— 37	—1	— 26	— 39	— 43
45	41·2	643	677	+ 29	—1	+ 39	+ 26	+ 23
46	41·3	617	652	+ 4	—1	+ 13	0	— 3
47	41·6	601	636	— 12	—1	— 2	— 15	— 19
48	42·0	606	642	— 6	—1	+ 3	— 10	— 13
49	43·6	635	675	+ 27	—1	+ 35	+ 22	+ 19
50	44·6	539	581	— 67	—1	— 59	— 72	— 74
51	45·1	596	639	— 9	—1	— 1	— 14	— 16
52	45·5	594	638	— 10	—1	— 2	— 15	— 17
53	48·0	601	652	+ 4	—1	+ 10	— 2	— 4
54	48·4	591	643	— 5	—1	+ 1	— 11	— 13
55	48·7	591	644	— 4	—1	+ 2	— 10	— 12
56	49·4	590	645	— 3	—1	+ 2	— 9	— 11
57	49·5	534	589	— 59	—1	— 54	— 65	— 66
58	49·9	625	682	+ 34	—1	+ 38	+ 27	+ 26
59	50·5	520 :	579	— 69	—1	— 65	— 76	— 77
60	50·5	594	653	+ 5	—1	+ 9	— 2	— 3
61	50·5	636	695	+ 47	—1	+ 51	+ 40	+ 39
62	50·5	666	725	+ 77	—1	+ 81	+ 70	+ 69
63	50·8	673	733	+ 85	—1	+ 89	+ 78	+ 77
64	51·1	615	676	+ 28	—1	+ 31	+ 21	+ 20
65	51·6	571	633	— 15	—1	— 11	— 21	— 22
66	52·6	618 :	684	+ 36	—1	+ 39	+ 29	+ 28
67	53·3	640 :	708	+ 60	—1	+ 63	+ 53	+ 53
68	54·7	551	625	— 23	—1	— 22	— 30	— 31
69	55·0	581	656	+ 8	—1	+ 9	+ 1	+ 1
70	55·8	569	647	— 1	—1	0	— 8	— 8
71	57·4	575	661	+ 13	—1	+ 12	+ 5	+ 6

Nr.	z	log $\frac{\delta \text{ Persei}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 9·648 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 9·629 L	9·642 M_1	9·647 M_2
72	58·9	9·593 :	9·686	+ 38	—1	+ 36	+ 30	+ 32
73	59·0	482	576	— 72	—1	— 75	— 80	— 79
74	59·5	588	684	+ 36	0	+ 33	+ 29	+ 30
75	60·7	549	652	+ 4	0	0	— 4	— 2
76	61·6	504 :	612	— 36	0	— 41	— 43	— 41
77	62·0	550	661	+ 13	0	+ 7	+ 5	+ 8
78	63·0	496	613	— 35	0	— 41	— 42	— 39
79	63·1	491	609	— 39	0	— 46	— 46	— 44
80	63·2	616	735	+ 87	0	+ 80	+ 80	+ 82
81	63·7	535	657	+ 9	0	+ 2	+ 2	+ 5
82	63·9	611	734	+ 86	0	+ 79	+ 80	+ 83
83	63·9	496	619	— 29	0	— 36	— 35	— 32
84	64·0	547	671	+ 23	0	+ 16	+ 16	+ 19
85	64·3	500 :	626	— 22	0	— 29	— 28	— 25
86	64·6	527	655	+ 7	0	0	+ 1	+ 4
87	64·6	508	636	— 12	0	— 19	— 18	— 15
88	65·2	510	643	— 5	0	— 13	— 11	— 8
89	65·6	495	631	— 17	0	— 26	— 23	— 19
90	65·7	510	646	— 2	0	— 10	— 7	— 3
91	66·1	534	674	+ 26	0	+ 17	+ 21	+ 24
92	66·7	524	669	+ 21	+1	+ 11	+ 16	+ 20
93	67·0	501	649	+ 1	1	— 9	— 4	0
94	67·9	583	739	+ 91	1	+ 80	+ 87	+ 91
95	67·9	495	651	+ 3	1	— 8	— 1	+ 3
96	67·9	521	677	+ 29	1	+ 18	+ 25	+ 29
97	68·2	460	619	— 29	1	— 40	— 33	— 28
98	68·2	484	643	— 5	1	— 16	— 9	— 4
99	68·2	522	681	+ 33	1	+ 22	+ 29	+ 34
100	68·5	458	620	— 28	1	— 40	— 32	— 27
101	69·4	457	629	— 19	1	— 32	— 22	— 18
102	69·4	533	705	+ 57	1	+ 44	+ 54	+ 58
103	69·5	434 :	607	— 41	1	— 54	— 44	— 39
104	70·3	439	621	— 27	1	— 41	— 29	— 24
105	70·6	444	629	— 19	2	— 33	— 20	— 15
106	71·0	524	714	+ 66	2	+ 52	+ 65	+ 70
107	71·1	453	645	— 3	1	— 18	— 4	0
108	71·3	440	634	— 14	2	— 29	— 15	— 10

Nr.	z	log δ Persei / Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 9·648 H	Δδ	Abweichung v. Mittel 9·629 L	9·642 M_1	9·647 M_2
109	71·3	9·373:	9·567	— 81	+2	— 96	— 82	— 77
110	71·6	425	623	— 25	2	— 40	— 25	— 20
111	72·4	412:	621	— 27	2	— 43	— 26	— 21
112	72·5	483	694	+ 46	1	+ 30	+ 46	+ 51
113	72·7	412	625	— 23	2	— 38	— 21	— 17
114	73·1	419:	638	— 10	2	— 26	— 8	— 3
115	73·1	408	627	— 21	2	— 37	— 19	— 14
116	73·1	475	694	+ 46	2	+ 30	+ 48	+ 53
117	73·5	422	648	0	2	— 17	+ 2	+ 7
118	73·6	505	732	+ 84	2	+ 68	+ 87	+ 91
119	74·0	361:	595	— 53	2	— 70	— 50	— 45
120	74·2	438	675	+ 27	3	+ 10	+ 31	+ 35
121	74·5	393	635	— 13	3	— 30	— 8	— 4
122	74·6	405	649	+ 1	3	— 16	+ 6	+ 10
123	74·7	383	629	— 19	3	— 36	— 14	— 10
124	75·0	381	632	— 16	3	— 33	— 10	— 6
125	75·2	391	646	— 2	3	— 19	+ 4	+ 8
126	75·8	406	673	+ 25	3	+ 7	+ 32	+ 35
127	75·9	357	626	— 22	3	— 39	— 14	— 11
128	75·9	352	621	— 27	3	— 44	— 19	— 16
129	75·9	337	606	— 42	3	— 59	— 34	— 31
130	76·1	367	640	— 8	3	— 25	0	+ 3
131	76·6	340	624	— 24	4	— 41	— 15	— 13
132	76·7	342	629	— 19	3	— 37	— 10	— 8
133	76·8	277:	566	— 82	3	—100	— 72	— 71
134	76·9	392:	683	+ 35	4	+ 18	+ 45	+ 47
135	77·3	313	614	— 34	3	— 52	— 23	— 22
136	77·7	309	620	— 28	4	— 45	— 16	— 16
137	77·8	280	594	— 54	3	— 72	— 43	— 44
138	78·6	239	575	— 73	4	— 90	— 60	— 61
139	78·8	382	724	+ 76	4	+ 60	+ 90	+ 88
140	78·9	279	624	— 24	4	— 40	— 10	— 12
141	79·4	365	726	+ 78	4	+ 62	+ 92	+ 89
142	79·5	269	634	— 14	4	— 30	0	— 4
143	79·8	189:	564	— 84	4	— 99	— 69	— 74
144	80·2	224	614	— 34	+4	— 48	— 20	— 25
[pδδ]				0·2084	—0·0014	0·2387	0·2049	0·2070

α Aurigae.

Nr.	z	log α Aur./Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·751 H	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·731 L	0·768 M_1	0·749 M_2
1	6·5	0·800	0·801	+ 50	−1	+ 69	+ 32	+ 51
2	6·9	783	784	+ 33	−1	+ 52	+ 15	+ 34
3	8·8	766	767	+ 16	−1	+ 36	− 2	+ 17
4	11·7	793	795	+ 44	−1	+ 63	+ 26	+ 45
5	14·2	741	744	− 7	−1	+ 12	− 25	− 7
6	14·3	815:	818	+ 67	−1	+ 86	+ 49	+ 67
7	15 2	784	788	+ 37	−1	+ 56	+ 18	+ 37
8	15·8	820	824	+ 73	−1	+ 92	+ 54	+ 73
9	16·1	784	788	+ 37	−1	+ 56	+ 19	+ 37
10	16·7	716	721	− 30	−1	− 12	− 49	− 31
11	16·8	729	734	− 17	−1	+ 1	− 36	− 18
12	17·7	720	725	− 26	−1	− 7	− 45	− 26
13	20·1	819	826	+ 75	−1	+ 93	+ 56	+ 74
14	20·2	686	693	− 58	−1	− 40	− 77	− 59
15	20·9	819	827	+ 76	−1	+ 93	+ 56	+ 74
16	21·9	814:	822	+ 71	−1	+ 89	+ 52	+ 70
17	22·4	792	801	+ 50	−1	+ 67	+ 30	+ 48
18	22·7	785:	794	+ 43	−1	+ 60	+ 23	+ 41
19	23·0	701	710	− 41	−1	− 23	− 60	− 43
20	23·2	767	776	+ 25	−1	+ 43	+ 6	+ 24
21	25·1	812	823	+ 72	−1	+ 89	+ 52	+ 70
22	26·6	757	770	+ 19	−1	+ 35	− 1	+ 16
23	27·4	795:	808	+ 57	−1	+ 74	+ 37	+ 55
24	27·5	763	777	+ 26	−1	+ 42	+ 5	+ 23
25	27·6	764	778	+ 27	−1	+ 43	+ 6	+ 24
26	28·2	728:	742	− 9	−1	+ 7	− 29	− 12
27	29·0	817	832	+ 81	−1	+ 97	+ 61	+ 78
28	29·6	743	759	+ 8	−1	+ 23	− 13	+ 5
29	30·3	704:	721	− 30	−1	− 15	− 51	− 33
30	30·6	775	792	+ 41	−1	+ 56	+ 21	+ 38
31	31·1	808	826	+ 75	−1	+ 90	+ 54	+ 71
32	31·9	817	836	+ 85	−1	+100	+ 64	+ 81
33	33·5	673	694	− 57	−1	− 43	− 78	− 61
34	33·8	757	779	+ 28	−1	+ 42	+ 6	+ 23

Nr.	z	log α Aur. / Polaris	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·751 H	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·731 L	0·768 M_1	0·749 M_2
35	35·5	0·798	0·822	+ 71	—1	+ 84	+ 50	+ 67
36	36·2	770 :	795	+ 44	—1	+ 57	+ 23	+ 39
37	36·3	782	807	+ 56	—1	+ 69	+ 35	+ 52
38	36·8	678 :	704	— 47	—1	— 34	— 68	— 52
39	37·7	700	728	— 23	—1	— 11	— 45	— 28
40	39·1	729	759	+ 8	—1	+ 20	— 14	+ 3
41	41·3	705	740	— 11	—1	— 1	— 33	— 17
42	41·5	755	790	+ 39	—1	- 50	+ 17	+ 33
43	41·7	665 :	700	— 51	—1	— 40	— 73	— 56
44	41·8	708	744	— 7	—1	+ 3	— 30	— 13
45	42·7	693	731	— 20	—1	— 10	— 43	— 26
46	43·3	730	769	+ 18	—1	+ 28	— 4	+ 12
47	43·4	756	795	+ 44	—1	+ 54	+ 22	+ 38
48	44·2	730 :	771	+ 20	—1	+ 29	— 2	+ 14
49	47·0	726	774	+ 23	—1	+ 31	+ 1	+ 17
50	47·5	693	743	— 8	—1	— 1	— 31	— 15
51	47·6	731	781	+ 30	—1	+ 37	+ 7	+ 23
52	47·7	683	733	— 18	—1	— 11	— 40	— 25
53	47·9	701	752	+ 1	—1	+ 8	— 22	— 6
54	48·1	659	710	— 41	—1	— 34	— 63	— 47
55	48·5	717	769	+ 18	—1	+ 25	— 4	+ 12
56	49·9	704	761	+ 10	—1	+ 15	— 12	+ 3
57	50·1	715	772	+ 21	—1	+ 27	— 1	+ 15
58	51·4	718 :	780	+ 29	—1	+ 33	+ 7	+ 22
59	51·7	697	760	+ 9	—1	+ 13	— 13	+ 2
60	52·6	728	794	+ 43	—1	+ 47	+ 22	+ 36
61	53·4	701	770	+ 19	—1	+ 22	— 2	+ 12
62	53·7	746	816	+ 65	—1	+ 68	+ 44	+ 58
63	53·8	675 :	745	— 6	—1	— 3	— 26	— 12
64	55·4	636	713	— 38	—1	— 37	— 58	— 45
65	55.8	681	759	+ 8	—1	+ 10	— 11	+ 2
66	56·2	715	795	+ 44	—1	+ 45	+ 25	+ 38
67	57·3	647	732	— 19	—1	— 19	— 36	— 25
68	57·5	689 :	775	+ 24	—1	+ 24	+ 7	+ 18
69	57·5	685	771	+ 20	—1	+ 20	+ 3	+ 14
70	60·5	685	787	+ 36	0	+ 33	+ 22	+ 31

Nr.	z	log $\frac{\alpha \text{ Aur.}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·751 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel		
						0·731 L	0·768 M_1	0·749 M_2
71	60·7	0·665:	0·768	+ 17	0	+ 14	+ 4	+ 12
72	61·0	638	743	− 8	−1	− 12	− 21	− 13
73	61·3	725	831	+ 80	0	+ 77	+ 69	+ 76
74	62·0	603	714	− 37	0	− 42	− 48	− 41
75	62·4	592	705	− 46	0	− 51	− 56	− 49
76	62·6	652	767	+ 16	−1	+ 11	+ 6	+ 12
77	63·1	645	763	+ 12	0	+ 6	+ 3	+ 9
78	63·7	684	806	+ 55	0	+ 49	+ 48	+ 52
79	64·3	665	791	+ 40	0	+ 34	+ 35	+ 38
80	64·6	588	716	− 35	0	− 41	− 39	− 37
81	64·7	574	703	− 48	0	− 55	− 52	− 50
82	64·8	614:	744	− 7	0	− 14	− 11	− 9
83	64·8	636	766	+ 15	0	+ 8	+ 11	+ 13
84	65·0	660	792	+ 41	0	+ 33	+ 37	+ 39
85	65·1	552	684	− 67	0	− 74	− 70	− 69
86	65·5	533:	669	− 82	0	− 91	− 85	− 84
87	66·4	663	806	+ 55	0	+ 46	+ 55	+ 54
88	66·5	540	684	− 67	0	− 76	− 66	− 68
89	67·1	660	809	+ 58	0	+ 49	+ 61	+ 58
90	67·5	530	683	− 68	0	− 78	− 64	− 68
91	67·6	581	735	− 16	0	− 26	− 12	− 16
92	67·8	481:	637	−114	0	−125	−109	−114
93	68·2	643	802	+ 51	+1	+ 41	+ 58	+ 53
94	68·5	530	692	− 59	1	− 70	− 51	− 57
95	68·6	553	716	− 35	1	− 46	− 27	− 33
96	68·9	525	691	− 60	1	− 71	− 50	− 58
97	68·9	641	807	+ 56	1	+ 45	+ 66	+ 58
98	69·4	539	711	− 40	1	− 52	− 29	− 38
99	69·6	650	824	+ 73	1	+ 61	+ 85	+ 76
100	71·5	497	694	− 57	1	− 71	− 38	− 52
101	71·6	488	686	− 65	2	− 79	− 45	− 59
102	72·1	485	690	− 61	2	− 76	− 39	− 55
103	73·5	445	671	− 80	2	− 96	− 52	− 72
104	73·8	456	686	− 65	3	− 80	− 34	− 56
105	74·1	524	759	+ 8	3	− 7	+ 40	+ 17
106	74·3	416	655	− 96	2	−112	− 64	− 87
107	74·3	523	762	+ 11	+2	− 5	+ 43	+ 20

Nr.	z	log $\frac{\alpha \text{ Aur.}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·751 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·731 L	0·768 M_1	0·749 M_2
108	74·4	0·466	0·707	— 44	2	— 60	— 12	— 35
109	74·9	438	688	— 63	2	— 80	— 28	— 53
110	75·4	513	772	+ 21	3	+ 5	+ 58	+ 32
111	75·8	456	723	— 28	3	— 45	+ 11	— 17
112	76·5	436	718	— 33	3	— 50	+ 9	— 21
113	76·8	398	687	— 64	3	— 81	— 21	— 52
114	77·3	430	731	— 20	3	— 37	+ 25	— 7
115	78·0	466	785	+ 34	4	+ 18	+ 81	+ 47
116	78·3	480	807	+ 56	4	+ 40	+104	+ 69
117	78·4	386	716	— 35	4	— 51	+ 14	— 22
118	78·6	367	703	— 48	4	— 64	+ 1	— 35
119	78·7	396	735	— 16	4	— 32	+ 33	— 3
120	79·0	378:	726	— 25	4	— 40	+ 24	— 12
121	79·3	299	657	— 94	4	—109	— 45	— 82
122	79·5	334:	699	— 52	4	— 67	— 3	— 41
123	79·9	287	665	— 86	5	— 99	— 36	— 75
124	80·0	349:	731	— 20	4	— 33	+ 29	— 9
125	80·3	371	764	+ 13	4	+ 1	+ 62	+ 23
126	80·5	368	769	+ 18	4	+ 6	+ 66	+ 28
127	80·5	257	658	— 93	4	—105	— 45	— 83
128	80·7	321:	731	— 20	4	— 32	+ 27	— 12
129	80·9	334	752	+ 1	4	— 10	+ 48	+ 9
130	81·1	251	678	— 73	4	— 84	— 28	— 66
131	81·1	326:	753	+ 2	4	— 9	+ 47	+ 9
132	81·3	305	741	— 10	4	— 20	+ 34	— 4
133	81·5	277	722	— 29	4	— 38	+ 14	— 23
134	81·6	215	665	— 86	4	— 95	— 44	— 81
135	81·6	0·302	0 752	+ 1	+4	— 8	+ 43	+ 6
$[p\delta\delta]$				0·2733	—0·0082	0·3629	0·2212	0·2511

α Tauri.

Nr.	z	log $\frac{\alpha \text{ Tauri}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·486 H	Δδ	Abweichung v. Mittel 0·467 L	0·507 M_1	0·482 M_2
1	36·1	0·428	0·453	− 33	−1	− 21	− 56	− 36
2	36·1	406	431	− 55	−1	− 43	− 78	− 58
3	36·2	382	407	− 79	−1	− 67	−102	− 82
4	36·2	476	501	+ 15	−1	+ 27	− 8	+ 12
5	36·3	415	440	− 46	−1	− 34	− 69	− 48
6	36·5	410	436	− 50	−1	− 38	− 73	− 53
7	36·5	450	476	− 10	−1	+ 2	− 33	− 13
8	36·7	548	574	+ 88	−1	+100	+ 65	+ 85
9	36·7	462	488	+ 2	−1	+ 14	− 21	− 1
10	37·6	491	519	+ 33	−1	+ 44	+ 10	+ 30
11	37·6	440	468	− 18	−1	− 7	− 41	− 21
12	37·7	398	426	− 60	−1	− 49	− 83	− 63
13	38·0	412	440	− 46	−1	− 34	− 68	− 49
14	38·2	441	470	− 16	−1	− 5	− 39	− 20
15	38·2	479	508	+ 22	−1	+ 33	− 1	+ 18
16	38·2	507	536	+ 50	−1	+ 61	+ 27	+ 46
17	38·5	512	541	+ 55	−1	+ 66	+ 33	+ 52
18	38·8	434	464	− 22	−1	− 11	− 44	− 26
19	38·9	502	532	+ 46	−1	+ 57	+ 24	+ 43
20	39·6	473	504	+ 18	−1	+ 29	− 3	+ 15
21	39·6	490	521	+ 35	−1	+ 46	+ 14	+ 32
22	39·8	375	407	− 79	−1	− 69	−101	− 83
23	40·3	487	520	+ 34	−1	+ 44	+ 13	+ 30
24	40·5	470	503	+ 17	−1	+ 27	− 4	+ 13
25	41·5	442 :	477	− 9	−1	+ 1	− 29	− 13
26	41·5	482	517	+ 31	−1	+ 41	+ 11	+ 27
27	41·6	468	503	+ 17	−1	+ 27	− 3	+ 13
28	41·9	475	511	+ 25	−1	+ 34	+ 5	+ 21
29	42·8	415	453	− 33	−1	− 24	− 52	− 37
30	42·8	521	559	+ 73	−1	+ 82	+ 54	+ 69
31	43·7	451	491	+ 5	−1	+ 13	− 14	+ 1
32	44·0	500	541	+ 55	−1	+ 63	+ 36	+ 50
33	44·3	462	503	+ 17	−1	+ 25	0	+ 13
34	44·9	463 :	506	+ 20	−1	+ 28	+ 3	+ 15
35	44·9	480	523	+ 37	−1	+ 45	+ 20	+ 32

Nr.	z	log $\frac{\alpha \text{ Tauri}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·486 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·467 L	0·507 M_1	0·482 M_2
36	45·3	0·466	0·510	+ 24	−1	+ 31	+ 7	+ 19
37	45·4	445	489	+ 3	−1	+ 11	− 14	− 1
38	45·9	521	566	+ 80	−1	+ 88	+ 64	+ 76
39	46·3	491	537	+ 51	−1	+ 58	+ 36	+ 47
40	46·3	496	542	+ 56	−1	+ 63	+ 41	+ 52
41	46·4	467 :	514	+ 28	−1	+ 35	+ 12	+ 23
42	46·5	424	471	− 15	−1	− 8	− 31	− 20
43	46·6	399	446	− 40	−1	− 33	− 55	− 44
44	46·7	535	582	+ 96	−1	+103	+ 81	+ 92
45	47·4	450 :	499	+ 13	−1	+ 20	− 1	+ 9
46	47·6	430	480	− 6	−1	0	− 20	− 11
47	47·7	512	562	+ 76	−1	+ 82	+ 62	+ 71
48	48·0	354 :	405	− 81	−1	− 75	− 95	− 86
49	48·6	444	497	+ 11	−1	+ 16	− 2	+ 6
50	49·3	380 :	435	− 51	−1	− 46	− 63	− 56
51	49·6	478	534	+ 48	−1	+ 53	+ 36	+ 43
52	50·0	463	520	+ 34	−1	+ 39	+ 23	+ 29
53	50·3	505	563	+ 77	−1	+ 81	+ 66	+ 72
54	50·7	405	464	− 22	−1	− 18	− 32	− 27
55	51·0	379 :	439	− 47	−1	− 43	− 56	− 52
56	51·4	440	502	+ 16	−1	+ 19	+ 7	+ 11
57	51·8	464	527	+ 41	−1	+ 44	+ 33	+ 36
58	52·5	398	463	− 23	−1	− 20	− 30	− 28
59	52·8	349	415	− 71	−1	− 68	− 77	− 75
60	52·9	530	597	+111	−1	+113	+104	+106
61	53·1	322 :	390	− 96	−1	− 94	−103	−101
62	53·8	375	445	− 41	−1	− 39	− 46	− 45
63	54·2	493	565	+ 79	−1	+ 80	+ 74	+ 74
64	54·4	391	464	− 22	−1	− 21	− 27	− 27
65	55·3	326	402	− 84	−1	− 83	− 86	− 88
66	55·4	421	498	+ 12	−1	+ 12	+ 9	+ 7
67	55·4	389	466	− 20	−1	− 20	− 23	− 25
68	55·5	509	586	+100	−1	+101	+ 98	+ 96
69	56·8	304 :	387	− 99	−1	−100	− 99	−103
70	57·9	488	576	+ 90	−1	+ 88	+ 92	+ 86
71	58·2	433	523	+ 37	−1	+ 35	+ 39	+ 33
72	59·3	311 :	406	− 80	0	− 83	− 76	− 83

Nr.	z	$\log \frac{\alpha \text{ Tauri}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·486 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·467 L	0·507 M_1	0·482 M_2
73	59·4	0·275:	0·371	−115	−1	−118	−111	−119
74	61·1	484	589	+103	0	+ 99	+111	+101
75	61·5	287:	395	− 91	−1	− 96	− 83	− 94
76	62·5	351	465	− 21	0	− 27	− 11	− 23
77	62·6	462	577	+ 91	−1	+ 85	+101	+ 89
78	62·8	295	411	− 75	0	− 81	− 64	− 77
79	63·5	288:	408	− 77	0	− 84	− 65	− 78
80	65·3	327	461	− 25	0	− 34	− 10	− 25
81	65·6	285	421	− 65	0	− 74	− 49	− 64
82	66·1	257:	397	− 89	0	− 98	− 72	− 89
83	66·7	307	452	− 34	+1	− 44	− 16	− 32
84	67·3	374	525	+ 39	1	+ 28	+ 58	+ 41
85	68·3	211	371	−115	1	−126	− 94	−111
86	68·5	299	461	− 25	1	− 37	− 4	− 21
87	69·6	334:	508	+ 22	1	+ 9	+ 44	+ 27
88	69·8	353	529	+ 43	1	+ 30	+ 66	+ 48
89	69·8	306	482	− 4	1	− 17	+ 19	+ 1
90	70·4	235:	418	− 68	1	− 82	− 44	− 62
91	71·6	223	421	− 65	2	− 80	− 40	− 57
92	71·8	273	474	− 12	2	− 27	+ 13	− 5
93	72·5	256	467	− 19	1	− 35	+ 7	− 11
94	72·9	291	507	+ 21	2	+ 5	+ 48	+ 31
95	73·2	232	452	− 34	3	− 49	− 6	− 23
96	73·6	231	458	− 28	2	− 44	− 1	− 18
97	73·9	151	383	−103	3	−120	− 75	− 92
98	74·5	260:	502	+ 16	3	− 1	+ 44	+ 28
99	74·8	224	472	− 14	2	− 31	+ 14	− 2
100	74·8	318	566	+ 80	2	+ 63	+108	+ 92
101	75·0	144	395	− 91	3	−108	− 62	− 78
102	75·8	259:	526	+ 40	3	+ 22	+ 69	+ 53
103	75·9	191	460	− 26	3	− 43	+ 3	− 12
104	76·4	255	535	+ 49	3	+ 31	+ 78	+ 63
105	76·7	187	474	− 12	3	− 30	+ 16	+ 2
106	77·5	222	528	+ 42	3	+ 24	+ 71	+ 57
107	77·6	217	525	+ 39	4	+ 22	+ 68	+ 54
108	77·9	115	431	− 55	+4	− 72	− 26	− 40

Nr.	z	log $\frac{\alpha \text{ Tauri}}{\text{Polaris}}$	corrigirt für Extinction	Abw. v. M. 0·486 H	$\Delta\delta$	Abweichung v. Mittel 0·467 L	0·507 M_1	0·482 M_2
109	78·8	0·106	0·448	— 38	+4	— 54	— 10	— 23
110	78·8	0·178	520	+ 34	+4	+ 18	+ 62	+ 49
111	79·4	0·077	438	— 48	+4	— 64	— 21	— 34
112	79·5	0·096	461	— 25	+4	— 41	+ 1	— 12
113	79·8	0·113	488	+ 2	+4	— 13	+ 28	+ 15
114	80·0	0·161	543	+ 57	+4	+ 43	+ 83	+ 70
115	80·7	0·053	463	— 23	+4	— 36	+ 1	— 13
116	81·1	9·943	370	—116	+4	—128	— 93	—107
117	81·3	0·075	511	+ 25	+4	+ 14	+ 47	+ 33
118	82·2	9·942	423	— 63	+3	— 70	— 44	— 58
119	82·6	0·052	556	+ 70	+3	+ 65	+ 87	+ 73
120	83·3	9·947	496	+ 10	+2	+ 9	+ 24	+ 10
121	83·5	9·876	439	— 47	+2	— 46	— 35	— 47
122	84·4	9·863	500	+ 14	0	+ 22	+ 22	+ 11
123	85·2	9·783	502	+ 16	—3	+ 31	+ 21	+ 13
124	85·5	9·637	391	— 95	—4	— 75	— 89	— 97
125	86·2	9·730	581	+ 95	—8	+124	+102	+ 95
126	87·3	9·378	0·434	— 52	—17	— 4	— 38	— 45
[pδδ]				0·3419	—0·0019	0·3782	0·3475	0·3343

Die unter Benützung von merklich verschiedenen Extinctionswerthen erhaltenen Abweichungen (δ) vom Mittel weisen keinen augenfälligen Unterschied in der Güte der Darstellung der Beobachtungen auf, indem, wenn z. B. die positiven δ in einer Columne grösser sind, als in einer anderen, die in der Nähe befindlichen negativen δ fast genau um denselben Betrag kleiner sind. Die Summe der bei jedem Sterne angegebenen $[p\delta\delta]$ beträgt

H	L	M_1	M_2
1·1923	1·3230	1·1003	1·1875

Hiebei ist zu bedenken, dass die mit M_1 bezeichneten Abweichungen sich auf von Stern zu Stern verschiedene Extinctionswerthe beziehen und daher einem zur Beurtheilung

der Brauchbarkeit der Formeln H und L dienenden Vergleiche der aus ihnen gerechneten Fehlerquadratsumme mit obigem Werthe M_1 für jeden Stern die Reduction dieser Summe auf das Minimum voranzugehen hat, während zur Vergleichung mit dem Werthe M_2 die Gesammtsumme der Fehlerquadrate auf das Minimum herabgedrückt werden muss.

Betrachtet man Y, Z als constant, so ist die Reduction auf das Minimum

$$-\frac{[pA\delta]^2}{[pAA]}, \qquad -\frac{[pB\delta]^2}{[pBB]},$$

während die entsprechenden x, respective w durch

$$-\frac{[pA\delta]}{[pAA]}, \qquad -\frac{[pB\delta]}{[pBB]}$$

bestimmt sind.

Die hauptsächlichsten Daten der Rechnung sind in folgender Tafel gegeben, in welcher die Zahlen der Columnen H, L aus den bei den einzelnen Sternen früher aufgeführten Werthen $[p\delta\delta]$ durch Anbringung der Reduction auf das Minimum erhalten worden sind und sämmtlichen Angaben die Einheit der 4. Decimalstelle zu Grunde liegt.

Tafel II.

	$[pA\delta]$	$[pAA]$	x	Reduct.	$[pB\delta]$	$[pBB]$	w	Reduct.	$[p\delta\delta]$		
									H	L	M_1
α Cygni ..	+3073	2·7854	−1103	−339	+1327	3·4836	− 381	− 51	1892	1782	1779
γ_1 Ursae ..	+ 183	0·6258	− 292	− 5	− 893	0·7827	+1141	− 102	1451	1497	1488
ζ Persei ..	− 419	0·9442	+ 444	− 19	−2004	1·1796	+1699	− 340	2065	2047	2049
α Aurigae.	−2731	1·4464	+1888	−516	−4589	1·8122	+2532	−1162	2217	2467	2212
α Tauri...	−1134	3·3657	+ 337	− 38	−1386	4·1900	+ 331	− 46	3381	3736	3475
Summe...	−1028	9·1675		−917	−7545	11·4481		−1701	1·1006	1·1529	1·1003

Die Werthe von x und w, welche die Gesammtsumme der Fehlerquadrate zu einem Minimum machen, sind

$$x = \frac{0\cdot1028}{9\cdot1675} = 0\cdot0112, \quad w = \frac{0\cdot7545}{11\cdot4481} = 0\cdot0659,$$

woraus man erhält:

Tafel III.

	Reduction für		[$p\delta\delta$]		
	H	*L*	*H*	*L*	M_2
α Cygni......	+72	+326	2303	2159	2422
η Ursae maj...	+ 5	− 84	1461	1515	1529
δ Persei......	− 8	−213	2076	2174	2070
α Aurigae	−60	−526	2673	3103	2511
α Tauri	−21	− 1	3398	3781	3343
Summe	−12	−498	1·1911	1·2732	1·1875

Die angeführten Zahlen lassen erkennen, dass, insoferne nur die Summe der Fehlerquadrate in Betracht kommt, die Beobachtungen durch Formel *H* im Allgemeinen ebensogut dargestellt werden, wie durch die Müller'schen Extinctionstabellen, indem die Differenzen ohnehin sehr gering sind und durch passende Änderung von *Y* und *Z* ein noch günstigeres Resultat erzielt werden könnte. Die Rechnung nach Formel *L* ergibt besonders für die mittlere Extinction nicht unerheblich grössere Residuen. Es wäre jedoch verfrüht, hieraus zu folgern, dass der Anschluss an die Beobachtungen wesentlich schlechter sein muss, indem die Summe der Fehlerquadrate für die Güte der Darstellung nicht allein massgebend ist, da die wahre Fehlervertheilung von der wahrscheinlichen oft beträchtlich abweicht und beim erfahrungsgemäss häufigeren Vorkommen grosser Fehler, durch deren Minderung die Quadratsumme am raschesten fällt, die Reduction auf das Minimum eine ungebührliche Änderung der kleinen Fehler, sowie der Anzahl der Zeichenfolgen nach sich ziehen kann. Wegen der gleichen Wahrscheinlichkeit des Auftretens positiver und negativer Fehler von derselben Grösse soll bei Zusammenfassung einer grösseren

Zahl von Beobachtungen zu einem Normalorte die Summe der Abweichungen auch immer klein bleiben.

Da es mir vornehmlich um die Darstellung der Beobachtungen unter Annahme einer mittleren Extinction zu thun ist, habe ich die sieben letzten Beobachtungen von α Tauri von der weiteren Behandlung ausgeschlossen, nachdem keiner der übrigen Sterne in so grossen Zenithdistanzen beobachtet worden ist. Es verbleiben daher noch 663 Beobachtungen, wovon 95 mit : bezeichnet sind und halbes Gewicht erhalten, so dass die Summe der Gewichte 615·5 beträgt. Ordnet man die Beobachtungen nach Zenithdistanzen, so findet man, dass ziemlich regelmässig gleiche Intervalle um so mehr Beobachtungen umfassen, je grösser die Zenithdistanz ist. Da nun auch die Correction wegen Extinction mit der Zenithdistanz wächst, habe ich die Normalorte (10) so gewählt, dass jeder fast genau dasselbe Gewicht erhielt. In Tafel I ist die Abgrenzung der zu einem Normalorte gehörigen Beobachtungen durch Querstriche ersichtlich gemacht. Mit Ausnahme des 1. und 2. Normalortes, auf welche keine Beobachtung von α Tauri fällt und des 10., der keine von η Urs. maj. enthält, sind sämmtliche Normalorte mit Beobachtungen der fünf Sterne betheilt. Die aus den in den Columnen 5 und 7 angegebenen Abweichungen gebildeten Normalorte sind folgende:

Tafel IV.

Nr.	$[p]$	$\frac{[pz]}{[p]}$	$\frac{[p\delta]}{[p]}$		$\frac{[pA]}{[p]}$	$\frac{[pB]}{[p]}$
			H	L		
I	61·0	10·16	+0·0024	+0·0204	−0·098	−0·109
II	62·0	24·22	−0·0062	+0·0094	−0·093	−0·104
III	61·5	35·98	−0 0039	+0·0081	−0·093	−0·104
IV	62·0	44·09	+0·0074	+0 0157	−0·082	−0·091
V	61·5	51·41	+0·0077	+0·0112	−0·064	−0·071
VI	61·5	60·20	+0·0070	+0·0033	−0 032	−0·035
VII	62·0	66·61	−0·0037	−0·0135	+0·004	+0·004
VIII	61·0	71·84	−0·0066	−0·0216	+0·051	+0·057
IX	61·5	76·23	−0·0055	−0·0227	+0·116	+0·130
X	61·5	80·62	−0·0003	−0·0129	+0·231	+0·259

Die Darstellung dieser Normalorte wird besonders für L wesentlich besser und zum Vergleiche mit den aus den Abweichungen M_1, M_2 gebildeten Mitteln geeigneter, wenn x und w mit Hilfe der angegebenen Werthe von $\frac{[pA]}{[p]}$ und $\frac{[pB]}{[p]}$ so bestimmt werden, dass die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Dieser Fall tritt ein für $x = +0\cdot0155$, $w = +0\cdot1037$; hierauf beziehen sich die mit H und L bezeichneten Angaben der folgenden Tafel, welche für jede Darstellung auch den durchschnittlichen Fehler $\frac{[+p\sqrt{\delta^2}]}{[p]}$ enthält.

Tafel V.

$x = +0\cdot0155; \qquad w = +0\cdot1037.$

Nr.	$\frac{[p\delta]}{[p]}$				$\frac{[+p\sqrt{\delta^2}]}{[p]}$			
	H	L	M_1	M_2	H	L	M_1	M_2
I	+0·0008	+ 91	+114	+ 28	0·0349	370	349	351
II	−0·0076	− 13	− 19	− 84	352	353	299	354
III	−0·0054	− 27	−114	− 81	322	316	305	335
IV	+0·0062	+ 62	− 13	− 18	284	280	262	282
V	+0·0067	+ 38	− 3	+ 13	335	334	327	333
VI	+0·0065	− 6	+ 14	+ 24	360	352	347	353
VII	−0·0036	−132	− 60	− 41	355	363	332	352
VIII	−0·0058	−158	− 28	− 7	353	383	340	347
IX	−0·0037	− 93	+ 36	+ 62	367	377	357	364
X	+0·0033	+135	+ 74	+ 78	427	461	381	420
Quad.-Summe	0·000284	836	380	272				
Mittel					0·0350	359	330	349

Es ist bemerkenswerth, dass die Normalorte durch die von Herrn Müller aufgestellte mittlere Extinctionstabelle (M_2) besser dargestellt werden, als durch die für jeden Stern besonders abgeleiteten Tabellen (M_1), indem hieraus zu entnehmen ist, dass durch letztere trotz der Verringerung der Quadrat-

summe $[p\delta\delta]$, sowie des durchschnittlichen Fehlers einer Beobachtung kein entschieden engerer Anschluss an die Beobachtungen erreicht wird.

Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet sind die Prämissen, aus welchen Herr Müller den Schluss zieht, dass die Extinction von der Farbe der Sterne abhängig sei und von α Cygni gegen α Tauri in der Reihenfolge α Cygni (weisslich), η Urs. maj. (weisslich), δ Persei (schwach gelblich), α Aurigae (gelb), α Tauri (röthlich) wachse, nicht ganz einwandfrei. Nach den in Tafel II angegebenen Werthen von x und w würde das Licht von α Aurigae die grösste Schwächung erfahren. Der Grund dieses abweichenden Verhaltens von α Tauri liegt in der Verschiedenheit der Reductionsmethoden; mit Bezug auf die Summe der Fehlerquadrate werden die Beobachtungen von α Tauri, wie man aus Tafel II und III ersieht, durch die mittlere Extinctionstabelle besser dargestellt als durch die Specialtabelle, welche eben vornehmlich den Beobachtungen bei Zenithdistanzen über 45° angepasst ist und die in den Beobachtungen bei kleineren Zenithdistanzen ausgesprochene, in Wirklichkeit aber unmögliche Zunahme der Helligkeit mit der Zenithdistanz nicht berücksichtigt.

Für alle in Tafel V gegebene Darstellungen der Normalorte verlauft die Fehlercurve in derselben Weise + — + — +, was wohl darauf hindeutet, dass die Abweichungen zum Theil in den Beobachtungen begründet sind. Eine Vergleichung der Darstellungen H und M_2 lässt keinen besonders hervortretenden Unterschied in der Güte derselben erkennen; doch scheinen die unter Anwendung der Formel H sich ergebenden, nahezu gleichen und verhältnissmässig grossen Abweichungen für die Normalorte IV, V, VI darauf hinzuweisen, dass der Abnahme des Absorptionscoëfficienten in nicht ganz entsprechender Weise Rechnung getragen wurde. Die Laplace'sche Formel stellt die ersten sechs Normalorte ebenfalls sehr gut dar; für die folgenden werden jedoch die Abweichungen so gross, dass sie wohl kaum den Beobachtungen zur Last gelegt werden dürfen.

Die zweite Gruppe von Beobachtungen besteht aus photometrischen Vergleichen von Planeten und α Tauri mit einem

künstlichen Sterne; nimmt man an, dass für jede der 28 in Herrn Müller's Tabelle VII aufgeführten Beobachtungsreihen die Intensität der Vergleichsflamme als constant zu betrachten sei, so braucht man nur dieselbe mit J' zu bezeichnen, um die zur Reduction der ersten Gruppe benützten Formeln unverändert beibehalten zu können. Verleiht man sämmtlichen Beobachtungen das gleiche Gewicht, so erhält man mit den Werthen von H_0, beziehungsweise X_0, Y_0, Z_0, die in den Columnen 4 und 7 der Tafel VII angegebenen Werthe von δ. Die Darstellung nach Formel L wird viel besser, wenn man die Quadratsumme von $\delta' = \delta + Bw$ zu einem Minimum macht; dasselbe tritt ein für $w = -0\cdot0819$. Die Werthe von δ' sind in Columne 5 derselben Tafel enthalten. Nach Formel H wird $\delta' = \delta + Ax$ und die Quadratsumme von δ' ein Minimum für $x = -0\cdot0046$. Die hieraus resultirende Änderung von δ ist so geringfügig, dass ich von der Angabe der Werthe δ' Abstand genommen habe.

Bei Zenithdistanzen über 80° besitzt die Function $Y_0(Z_0^{-\vartheta_1} - Z_0^{-\vartheta})$ einen nahezu constanten Werth, wesshalb die Formeln H und L bei entsprechender Bestimmung von x und w zu fast identischen Resultaten führen, wie auch aus den Angaben der Columnen 5 und 7 zu ersehen ist.

Die absorbirende Kraft der Atmosphäre wird durch die geringsten Trübungen nicht unwesentlich beeinflusst und daher selbst für eine bei scheinbar ganz heiterem Himmel erhaltene, einen längeren Zeitraum unfassende Beobachtungsreihe kaum als constant betrachtet werden können, umsoweniger für Beobachtungen, die an verschiedenen Tagen gemacht worden sind. Wegen des flüchtigen Charakters der localen Trübungen lässt sich jedoch der Einflusss derselben auf die einzelnen Beobachtungen einer Reihe nicht in Rechnung ziehen und gleich der störenden Einwirkung unvermeidlicher, geringer Schwankungen der Intensität der Vergleichsflamme von den Beobachtungsfehlern nicht trennen. Etwas anders verhält sich die Sache, wenn es sich um die Reduction verschiedener Reihen handelt. Indem man für jede derselben x, respective w so bestimmt, dass die Quadratsumme der Abweichungen vom arithmetischen Mittel ein Minimum wird, gewinnt man einen Anhaltspunkt zur Beurtheilung der rela-

tiven Güte der verschiedenen Reihen angehörigen Beobachtungen.

Die einander nahezu proportionalen Grössen $\frac{\zeta}{\sin z'}$ und ϑ sind für den mittleren Zustand der Atmosphäre berechnet worden; da bei grossen Zenithdistanzen $\sin z'$ vom Zustande der Atmosphäre so gut wie unabhängig und die wahre Refraction der mittleren proportional ist, so vereinigen sich die Correctionen, welche an $\frac{\zeta}{\sin z'}$ und ϑ wegen der Änderungen von Druck und Temperatur angebracht werden müssten mit jenen, welche in Folge geänderter Absorption an H und X anzubringen sind.

Die Sicherheit der Bestimmung von x und w nimmt natürlich mit der Zahl der hiezu verwendbaren Beobachtungen zu; um nicht zu viele Beobachtungen ausschliessen zu müssen, habe ich auch jene Reihen noch benützt, welche nur vier Beobachtungen enthalten. Bezeichnet man bei dieser für jede Reihe gesondert durchgeführten Reduction die Abweichungen vom Mittel mit δ'', so ist $\delta'' = \delta + Ax$ und es wird für $x = -\frac{[A\delta]}{[AA]}$ die Quadratsumme $[\delta''\delta''] =$ Minimum. Ist ε der mittlere Fehler, p das demselben entsprechende Gewicht und n die Zahl der Beobachtungen einer Reihe, so ist

$$\varepsilon^2 = \frac{[\delta''\delta'']}{n-1}; \qquad p = \frac{\text{Const.}}{\varepsilon^2}.$$

Für $\frac{1}{p}$ gelangten jedoch nur die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4 zur Anwendung. Das dem Werthe x beizumessende Gewicht $P = p[AA]$.

Da die nach Formel L berechneten Werthe von δ'' und ε^2 von den nach Formel H bestimmten nur ganz unbedeutend abweichen, wurden für beide Darstellungen dieselben Werthe von p angenommen. Die Resultate dieser Rechnung sind in folgender Tafel zusammengestellt. Die in der ersten Columne enthaltenen Nummern beziehen sich auf Tafel VII.

Tafel VI.

Nr.	L			H			
	ε^2	w	P	ε^2	$\frac{1}{p}$	x	P
6	0·000764	+ 214	0·157	776	3	+1162	0·129
8	596	— 656	167	606	2	+ 240	135
10	937	—1863	227	914	3	—1123	188
11	520	+ 83	55	486	2	+1056	44
13	457	+1230	37	453	2	+2361	30
17	404	— 105	105	430	2	+ 859	85
18	480	—2130	36	507	2	—1390	29
20	130	—2778	109	130	1	—2079	89
22	172	—1239	208	175	1	— 382	170
23	73	—3224	88	73	1	—2580	72
24	507	— 606	427	503	2	+ 272	352
25	545	(+4844)	56	540	2	(+6320)	46
26	502	—2338	236	490	2	—1615	196
27	200	—1837	72	217	1	—1086	58
28	0·001996	+ 310	0·071	1972	4	+1329	0·058

Die wahrscheinlichsten Werthe von x und w, welche den hier angegebenen Beobachtungsreihen entsprechen, sind:

$$w'' = \frac{[Pw]}{[P]}; \qquad x'' = \frac{[Px]}{[P]}.$$

Da dieselben sich auf einen mittleren Zustand der Atmosphäre beziehen, die Beobachtungen der Reihe 25 aber bei ungewöhnlich stark absorbirender Luft angestellt worden sind, hielt ich es für zweckmässiger, die hieraus abgeleiteten Werthe von w und x zur Mittelbildung nicht zu benützen. Es wird dann

$$w'' = -0\cdot 1154; \qquad x'' = -0\cdot 0319.$$

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass die an denselben Tagen erhaltenen Reihen 10, 11, ferner 17, 18 und 22, 23, welche



Beobachtungen der damals einander sehr nahe stehenden Planeten Mercur und Saturn enthalten, beträchtlich verschiedene Werthe von w, respective x ergeben, was zum Theil auf der ziemlich grossen Unsicherheit der Bestimmung dieser Grössen beruhen mag, zum Theil jedoch kaum anders als durch verschiedene Absorption zu erklären ist. Es ist wohl auch ohnehin sehr wahrscheinlich, dass um die Zeit von Sonnenaufgang oder Untergang bedeutende Änderungen der Absorption vorkommen. Die übrigen an denselben Tagen angestellten Beobachtungen werden durch die für diese Tage abgeleiteten Werthe von w'', x'' besser oder mindestens ebensogut dargestellt, so die Beobachtungen der Reihe 7 durch w''_6, 12, 14 durch w''_{13} und 21 durch w''_{20}.

Columne 8 der nachstehenden Tafel gibt die Werthe von $\delta''' = \delta + Ax''$, welche sich mit denen von $\delta''' = \delta + Bw''$ nahezu decken, wesshalb letztere nicht angegeben wurden. In Columne 6 sind die von Herrn Müller nach seiner Extinctionstabelle berechneten Abweichungen vom Mittel enthalten. Sämmtliche δ sind in Einheiten der 3. Decimalstelle gegeben; bei ihrer Berechnung wurde noch eine weitere Decimalstelle berücksichtigt.

Tafel VII.

Nr.	Stern	z	L		M	H	
			$w=0$	$w=-0{\cdot}0819$		$x=0$	$x=-0{\cdot}0319$
			δ	δ'	δ	δ	δ'''
1	Venus	83·12	− 12	− 17	− 18	− 17	
		81·40	+ 12	+ 17	+ 18	+ 17	
2	Mercur	84·10	+ 60	+ 51	+ 45	+ 50	
		82·43	− 23	− 21	− 21	− 21	
		80·83	− 37	− 29	− 25	− 29	
3	Venus	82·98	− 8	− 15	− 20	− 15	
		81·32	− 28	− 27	− 28	− 27	
		80·10	+ 37	+ 42	+ 47	+ 41	
4	Mercur	85·83	0	− 7	− 6	− 8	
		84·63	0	+ 7	+ 7	+ 8	

Nr.	Stern	z	L		M	H	
			$w=0$	$w=-0·0819$		$x=0$	$x=-0·0319$
			δ	δ'	δ	δ	δ'''
5	Venus	82·23	+ 29	+ 25	+ 21	+ 26	
		79 96	− 29	− 25	− 22	− 26	
6	Mercur	87·85	+ 7	− 40	− 35	− 41	− 58
		85·39	− 26	− 32	− 38	− 33	− 35
		84·31	− 26	− 23	− 28	− 22	− 21
		83·25	− 20	− 9	− 10	− 8	− 4
		82·23	+ 22	+ 38	+ 41	+ 40	+ 46
		80·91	+ 42	+ 64	+ 70	+ 65	+ 72
7	Venus	82·87	− 36	− 40	− 41	− 39	
		81·21	+ 36	+ 40	+ 41	+ 39	
8	Mercur	87·19	+ 45	+ 11	+ 12	+ 8	− 4
		85·82	− 6	− 19	− 24	− 20	− 25
		84·57	− 29	− 29	− 34	− 29	− 29
		83·29	− 6	+ 3	+ 2	+ 4	+ 8
		81·91	+ 25	+ 41	+ 44	+ 43	+ 48
		80·23	− 30	− 7	+ 3	− 7	+ 1
9	Mercur	85·82	0	− 20	− 26	− 22	
		82·22	− 27	− 19	− 17	− 18	
		81·32	+ 28	+ 40	+ 43	+ 40	
10	Mercur	87·99	+103	+ 59	+ 65	+ 59	+ 43
		87·16	+ 66	+ 41	+ 42	+ 38	+ 29
		86·24	+ 54	+ 43	+ 39	+ 41	+ 37
		85·33	− 25	− 25	− 31	− 26	− 25
		84·29	− 79	− 69	− 73	− 68	− 64
		83·20	− 33	− 15	− 16	− 14	− 8
		81·99	− 62	− 39	− 36	− 37	− 28
		80·77	− 24	+ 5	+ 12	+ 6	+ 16
11	Saturn	85·62	+ 14	− 7	− 14	− 9	− 17
		83·77	− 10	− 15	− 19	− 14	− 16
		83·01	− 14	− 14	− 15	− 13	− 13
		82·17	− 27	− 23	− 21	− 22	− 20
		81·18	0	+ 9	+ 12	+ 10	+ 13
		80·26	+ 37	+ 49	+ 57	+ 49	+ 53

Nr.	Stern	z	L		M	H	
			$w=0$ δ	$w=-0·0819$ δ'	δ	$x=0$ δ	$x=-0·0319$ δ'''
12	Mercur	82·30	— 18	— 21	— 21	— 20	
		81·08	+ 18	+ 21	+ 22	+ 21	
13	Mercur	86·48	— 31	— 47	— 46	— 49	— 55
		85·49	— 7	— 11	— 13	— 11	— 13
		84·50	+ 39	+ 45	+ 44	+ 46	+ 48
		83·51	— 1	+ 13	+ 14	+ 14	+ 19
14	Saturn	83·27	— 48	— 55	— 60	— 55	
		81·44	— 2	0	0	0	
		80·45	+ 49	+ 55	+ 59	+ 54	
15	Mercur	86·96	+ 23	+ 10	+ 13	+ 9	
		86·36	+ 32	+ 29	+ 29	+ 29	
		84·68	— 55	— 39	— 41	— 37	
16	Saturn	85·14	+ 29	+ 20	+ 16	+ 19	
		82·77	— 29	— 20	— 16	— 19	
17	Mercur	86·49	— 4	— 30	— 34	— 33	— 42
		85·27	+ 2	— 9	— 15	— 10	— 14
		84·21	— 6	— 7	— 12	— 7	— 7
		82·99	+ 33	+ 40	+ 40	+ 41	+ 44
		81·70	+ 5	+ 18	+ 21	+ 19	+ 24
		80 25	— 30	— 11	— 2	— 11	— 4
18	Saturn	85·26	+ 37	+ 19	+ 11	+ 18	+ 12
		82·81	+ 17	+ 17	+ 16	+ 18	+ 19
		81·74	+ 1	+ 8	+ 9	+ 8	+ 10
		80·45	— 55	— 44	— 38	— 44	— 40
19	Mercur	82·71	— 22	— 25	— 26	— 25	
		81·26	+ 22	+ 25	+ 27	+ 25	
20	Mercur	86·96	+ 71	+ 50	+ 54	+ 48	+ 41
		85·75	— 1	— 4	— 5	— 4	— 5
		84·84	— 8	— 1	— 3	— 1	+ 2
		83·70	— 61	— 45	— 44	— 43	— 38
21	Saturn	85·14	+ 23	+ 15	+ 13	+ 14	
		84·22	— 12	— 12	— 13	— 12	
		83·15	— 11	— 3	0	— 2	

Nr.	Stern	z	L $w=0$ δ	L $w=-0{\cdot}0819$ δ′	M δ	H $x=0$ δ	H $x=-0{\cdot}0319$ δ‴
22	Mercur	86·98	+ 32	+ 5	+ 7	+ 3	— 6
		85·92	+ 21	+ 11	+ 7	+ 9	+ 6
		84·55	+ 1	+ 5	+ 1	+ 5	+ 6
		83·34	— 5	+ 8	+ 8	+ 10	+ 14
		81·97	— 49	— 29	— 24	— 27	— 20
23	Saturn	86·29	+ 62	+ 44	+ 43	+ 42	+ 36
		85·22	+ 29	+ 25	+ 22	+ 24	+ 23
		83·84	— 28	— 21	— 21	— 20	— 17
		82·69	— 63	— 48	— 44	— 47	— 41
24	Jupiter	88·03	+ 29	— 10	— 4	— 9	— 22
		87·58	— 13	— 40	— 37	— 41	— 51
		87·20	+ 4	— 16	— 15	— 18	— 25
		86·89	+ 20	+ 5	+ 4	+ 3	— 1
		86·51	+ 10	+ 2	— 1	+ 1	— 2
		85·98	+ 29	+ 29	+ 24	+ 28	+ 28
		85·29	+ 30	+ 38	+ 32	+ 38	+ 41
		84·45	— 25	— 9	— 14	— 8	— 2
		83·69	— 4	+ 17	+ 14	+ 19	+ 26
		82·85	— 16	+ 10	+ 11	+ 12	+ 22
		80·42	— 64	— 27	— 19	— 26	— 12
25	Venus	85·89	—110	—127	—130	—129	
		85·35	— 62	— 73	— 76	— 74	
		84·60	— 21	— 24	— 27	— 24	
		83·93	+ 54	+ 56	+ 55	+ 56	
		83·34	+ 20	+ 26	+ 27	+ 26	
		82·81	+ 22	+ 31	+ 34	+ 32	
		81·67	+ 97	+112	+117	+112	
26	Venus	87·97	+ 97	+ 59	+ 65	+ 58	+ 45
		86·98	+ 45	+ 27	+ 28	+ 25	+ 19
		85·98	+ 26	+ 24	+ 20	+ 23	+ 22
		84·73	— 4	+ 7	+ 2	+ 8	+ 12
		83·83	— 46	— 28	— 31	— 27	— 20
		81·81	—118	— 89	— 85	— 87	— 76

Nr.	Stern	z	L: $w=0$ δ	L: $w=-0{\cdot}0819$ δ'	M δ	H: $x=0$ δ	H: $x=-0{\cdot}0319$ δ'''
27	Mercur	85·39	+ 26	+ 10	+ 5	+ 9	+ 3
		83·96	+ 21	+ 18	+ 15	+ 18	+ 17
		82·29	— 5	+ 2	+ 5	+ 3	+ 5
		80·87	— 43	— 30	— 24	— 30	— 26
28	α Tauri	87·34	— 43	— 75	— 71	— 77	— 88
		86·16	+ 68	+ 56	+ 54	+ 55	+ 50
		85·21	— 20	— 20	— 24	— 21	— 21
		84·36	— 35	— 28	— 31	— 27	— 24
		83·12	+ 44	+ 60	+ 61	+ 61	— 67
		82·10	— 14	+ 7	+ 12	+ 9	+ 16
[δδ]			0·1791	0·1493	0·1546	0·1494	0·0844

Aus dieser Zusammenstellung sieht man, dass die in den Columnen 5, 6, 7 enthaltenen Angaben als fast gleichwerthig betrachtet werden können. Nachdem 28 Reihen mit 119 Beobachtungen vorliegen, so wird der mittlere Fehler E einer Beobachtung

$$E = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{119-28}},$$

das ist 0·0412 für M und 0·405 für L und H. Durch Ausschluss der Reihe 25 würde $E = 0{\cdot}0364$, respective 0·0359.

Der aus den Abweichungen δ''' sich ergebende Fehler $E = 0{\cdot}0357$. Die den δ''' entsprechenden δ', sowie die in Columne 7 enthaltenen δ ergeben denselben Werth 0·0357 Demungeachtet ist die Darstellung δ''' wesentlich besser, indem die Fehler mit Bezug auf die Zenithdistanzen gleichförmiger vertheilt sind. Ordnet man nämlich die Beobachtungen nach Zenithdistanzen und bildet die Producte $p\delta$ (aus den δ''' entsprechenden δ der Columne 7) und $p\delta'''$, so erhält man:

Tafel VIII.

z	$\frac{1}{p}$	$p\delta$	$p\delta'''$
80·23	2	−3	+1
25	2	−5	−2
26	2	+24	+26
42	2	−13	−6
45	2	−22	−20
77	3	+2	+5
87	1	−30	−26
91	3	+22	+24
81·18	2	+5	+6
70	2	+10	+12
74	2	+4	+5
81	2	−43	−38
91	2	+21	+24
97	1	−27	−20
99	3	−12	−9
82·10	4	+2	+4
17	2	−11	−10
23	3	+13	+15
29	1	+3	+5
69	1	−46	−41
81	2	+9	+9
85	2	+6	+11
99	2	+20	+22
83·01	2	−6	−6
12	4	+15	+17
20	3	−5	−3
25	3	−3	−1
29	2	+2	+4
34	1	+10	+14
51	2	+7	+10
69	2	+9	+13
70	1	−43	−38
77	2	−7	−8
83	2	−13	−10
84	1	−20	−17
96	1	+18	+17
84·21	2	−3	−4
29	3	−23	−21
31	3	−7	−7
36	4	−7	−6

z	$\frac{1}{p}$	$p\delta$	$p\delta'''$
84·45	2	−4	−1
50	2	+23	+24
55	1	+5	+7
57	2	−14	−14
73	2	+4	+6
84	1	0	+2
85·21	4	−5	−5
22	1	+24	+23
26	2	+9	+6
27	2	−5	−7
29	2	+19	+20
33	3	−9	−8
39	3	−11	−12
39	1	+9	+3
49	2	−6	−6
62	2	−5	−8
75	1	−4	−5
82	2	−10	−12
92	1	+9	+6
98	2	+14	+14
98	2	+11	+11
86·16	4	+14	+13
24	3	+14	+12
29	1	+42	+36
48	2	−25	−27
49	2	−16	−21
51	2	0	−1
89	2	+2	−1
96	1	+48	+41
98	1	+3	−6
98	2	+13	+9
87·16	3	+13	+10
19	2	+4	−2
20	2	−9	−12
34	4	−19	−22
58	2	−21	−26
85	3	−14	−19
97	2	+29	+22
99	3	+20	+14
88·03	2	−4	−11

Bildet man hieraus 3 Normalorte (in der Tafel durch Querstriche abgegrenzt), für welche die Summe der Gewichte nahe gleich ist, so wird

	Zahl der Beobachtungen	$[p]$	$[p\delta]$	$[p\delta''']$	$\frac{[pz]}{[p]}$	$\frac{[p\delta]}{[p]}$	$\frac{[p\delta''']}{[p]}$
XI	28	14·50	—0·068	+0·008	81·79	—0·0047	+0·0006
XII	25	14·83	—0·043	—0·016	84·39	—0·0029	—0·0011
XIII . . .	27	15·33	+0·112	+0·012	86·57	+0·0073	+0·0008

Die mit Berücksichtigung der Gewichte gebildeten Mittel aus den Abweichungen δ''' sind für diese Normalorte von Null so wenig verschieden, dass die Darstellung der Beobachtungen durch Formel H unter der Annahme $x = -0{\cdot}0319$ als vollkommen ausreichend zu betrachten ist. Für $x = 0$ wird die Darstellung erheblich schlechter, indem die Abweichungen $[p\delta]$ für wachsende Zenithdistanzen einen ganz merklichen Gang vom Negativen ins Positive aufweisen. Die Werthe $[p\delta']$ zeigen eine noch grössere Verschiedenheit, da sie für dieselben Normalorte $= -0{\cdot}078$, $-0{\cdot}052$, $+0{\cdot}133$ werden, während die aus $w = -0{\cdot}1154$ nach Formel L abgeleiteten δ''' fast ebenso kleine (nur um wenige Einheiten der letzten Decimalstelle verschiedene) Mittelwerthe ergeben, wie die in Tafel VII angegebenen δ'''.

Es unterliegt nach all dem keinem Zweifel, dass die als zweite Gruppe bezeichneten Beobachtungen im Grossen und Ganzen unter günstigeren atmosphärischen Verhältnissen angestellt wurden, als die zur ersten Gruppe gehörigen Beobachtungen. Denn bezeichnet man die Werthe von x und w, welche die Quadratsumme der Fehler der einzelnen Beobachtungen der ersten Gruppe zu einem Minimum machen mit x_1, w_1, jene, welche die beste Darstellung der Normalorte I—X geben mit $x'_1 w'_1$, ferner diejenigen Werthe, welche die Quadratsumme der Fehler sämmtlicher Beobachtungen der zweiten Gruppe zu einem Minimum machen mit $x_2 w_2$ und jene, welche die Beobachtungen der in Tafel VI aufgeführten Reihen (mit Ausschluss von Nr. 25) unter Berücksichtigung der wahrscheinlichen Gewichte am besten darstellen mit $x'_2 w'_2$, so wurde hiefür gefunden

$$x_1 = +0\cdot0112, \qquad w_1 = +0\cdot0659$$
$$x_1' = +0\cdot0155, \qquad w_1' = +0\cdot1037$$
$$x_2 = -0\cdot0046, \qquad w_2 = -0\cdot0819$$
$$x_2' = -0\cdot0319, \qquad w_2' = -0\cdot1154.$$

Die Werthe von $x_1 x_1'$, respective $w_1 w_1'$ sollten nahezu gleich sein, da bei der Bildung der Normalorte I—X nur 7 Beobachtungen von α Tauri ausgeschlossen wurden. Nun ist die Differenz $x_1'—x_1$ in der That sehr klein, während w_1' von w_1 beträchtlich verschieden ist. Es ist auch nicht wahrscheinlich, dass die mittlere Absorption für die zwei Gruppen von Beobachtungen so verschieden gewesen ist, wie nach obigen Werthen von w angenommen werden müsste. Denn wenn auch die Planetenbeobachtungen nur bei ganz heiterem Himmel angestellt worden sind, so braucht deshalb der Transmissionscoëfficient der Luft nicht immer relativ sehr gross gewesen zu sein, indem die scheinbare Klarheit des Himmels keineswegs einen besonderen Grad der Durchsichtigkeit der Luft verbürgt. Es deuten auch die in Tafel VI enthaltenen Werthe von x und w darauf hin, dass an manchen Tagen sehr bedeutende Absorption stattgefunden hat. Daher scheinen mir die Werthe von x welche eine viel geringere Änderung der mittleren Absorption ergeben, als die von w, auch Anspruch auf grösseres Vertrauen zu besitzen. Bedenkt man ferner, dass die erste Gruppe von Beobachtungen durch Formel H in jeder Hinsicht besser dargestellt wird als durch Formel L, so wird, insoweit letztere für monochromatisches Licht als richtig zu betrachten ist, kaum in Abrede gestellt werden können, dass eine Abnahme des (mittleren) Absorptionscoëfficienten beim Durchtritt des Sternlichtes durch unsere Atmosphäre sich in den Beobachtungen noch hinreichend deutlich ausspricht. Es ergibt sich daher aus den Potsdamer Beobachtungen allein, und zwar selbst bei getrennter Behandlung der beiden Gruppen, ungefähr dasselbe Resultat, zu welchem Herr Müller durch Vergleichung der für Potsdam und den Säntisgipfel gefundenen Extinctionswerthe gelangt ist, nämlich[1] »dass die ersten Schichten im

[1] Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam Nr. 27, S. 43.

Allgemeinen eine etwas stärkere Absorption ausüben, als diejenigen in der Nähe des Horizontes«. Es liegt wohl in der Natur der Sache diese Erscheinung zunächt dem Einflusse der selectiven Absorption zuzuschreiben.

Reducirt man beide Gruppen von Beobachtungen unter Annahme einer einheitlichen mittleren Absorption nach den Formeln H und L, so tritt der Unterschied in der Darstellung der Normalorte noch viel schärfer hervor. Die Werthe X_0, Y_0, Z_0 stellen dieselben noch so befriedigend dar, dass ihre Anwendung in meiner Eingangs citirten Abhandlung hinreichend gerechtfertigt erscheint. Ein etwas besseres Resultat erhält man, wenn man annimmt

$$\log X = 1\cdot7047;\ \log Y = 9\cdot2104;\ \log\log Z = 2\cdot1000;$$

Columne 5 der Tafel XIII gibt die Correctionen, welche man an die mit den Werthen von X_0, Y_0, Z_0 berechneten Extinctionsbeträge anzubringen hat, um jene für X, Y, Z zu erhalten. Die denselben entsprechenden Abweichungen vom Mittel erhält man für die in Tafel I aufgeführten Beobachtungen durch Addition der in den Columnen 5, 6 enthaltenen δ und $\Delta\delta$. Die in Columne 6 bei jedem Stern an letzter Stelle stehende Zahl gibt die Reduction der Fehlerquadratsumme. Den zu den Normalorten XI—XIII vereinigten, mit den neuen Extinctionswerthen reducirten 80 Beobachtungen wurde dasselbe Gewicht verliehen, wie den δ'''.

Die Quadratsumme der nach Formel L berechneten, auf die Gewichtseinheit bezogenen Abweichungen wird für die 13 als gleichwerthig betrachteten Normalorte ein Minimum, wenn man annimmt $w = +0\cdot0152$. Die Resultate der Rechnung sind in folgender Tafel übersichtlich zusammengestellt.

Die Verbesserung der Darstellung beim Übergange von den ursprünglichen Werthen der Constanten zu den neuen Werthen derselben ist sowohl für Formel H, als auch L nicht so bedeutend, dass hieraus mit einiger Sicherheit zu entscheiden wäre, welches von den Werthsystemen im Allgemeinen besser entspricht. Die Frage ist eigentlich nur mit Bezug auf Formel H von einigem Interesse, nachdem die Darstellungen nach Formel L als ungenügend zu bezeichnen sind.

Tafel IX.

Nr.	$\frac{[pz]}{[p]}$	$\frac{[p\delta]}{[p]}$			
		X_0, Y_0, Z_0	$X, Y, Z,$	$w = 0$	$w = +0\cdot0152$
I	10°16	+0·0024	+ 14	+ 204	+ 188
II	24·22	—0·0062	— 72	+ 94	+ 78
III	35·98	—0·0039	— 49	+ 81	+ 65
IV	44·09	+0·0074	+ 64	+ 157	+ 143
V	51·41	+0·0077	+ 67	+ 112	+ 101
VI	60·20	+0·0070	+ 65	+ 33	+ 28
VII	66·61	—0·0037	— 33	— 135	— 134
VIII	71·84	—0·0066	— 49	— 216	— 207
IX	76·23	—0·0055	— 23	— 227	— 207
X	80·62	—0·0003	+ 35	— 129	— 90
XI	81·79	—0·0047	+ 3	— 206	— 233
XII	84·39	—0·0029	0	— 84	— 93
XIII	86·57	+0·0073	— 3	+ 276	+ 311
Quadratsumme ...		0·000394	259	3539	3483

Es erschien mir von Wichtigkeit, auch die photometrischen Beobachtungen, welche Herr Seidel[1] in München angestellt hatte, einer Neuberechnung zu unterziehen, um darüber Aufschluss zu erhalten, ob der immerhin nennenswerthe Unterschied zwischen den von den Herren Müller und Seidel angegebenen Extinctionswerthen durch die Beobachtungen bedingt sei oder auch durch die Unsicherheit der angewandten Reductionsmethode erklärt werden könne. Herr Seidel bestimmte das Helligkeitsverhältniss je zweier Sterne mittelst eines Steinheil'schen Prismenphotometers, wodurch die von

[1] Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse und über die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Abhandlungen der math.-physik. Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. VI, 1852.

den Objectivhälften erzeugten Lichtflächen miteinander verglichen werden können, welche man von Sternen statt der leuchtenden Punkte erhält, wenn das Ocular des Fernrohres gegen die gewöhnliche Stellung nach aussen oder innen verschoben wird. Ich werde mich hier nur mit jenen Beobachtungen befassen, aus welchen Herr Seidel seine Extinctionstabelle abgeleitet hat, und die den Beobachtungen verliehenen Gewichte, sowie das zur Bestimmung der Helligkeit der einzelnen Sterne angewendete Verfahren unverändert beibehalten. Zur Reduction wurden die Extinctionswerthe benützt, welche den Constanten

$$\log X = 1\cdot 7047, \quad \log Y = 9\cdot 2104, \quad \log\log Z = 2\cdot 1000$$

entsprechen. Für zwei Sterne, welche bei ihrer Vergleichung die Zenithdistanzen z', z'' besessen haben, ist die an den Logarithmus des beobachteten Helligkeisverhältnisses anzubringende Correction gleich der Differenz der für diese Zenithdistanzen geltenden Extinctionsbeträge.

Die ganze Rechnung wurde mit Berücksichtigung von 4 Decimalstellen ausgeführt; die auf drei Stellen abgekürzten Resultate sind in folgender Tafel enthalten. Columne 1 gibt die Originalnummer der Beobachtung, 2 die Namen der verglichenen Sterne, 3 die wahre Zenithdistanz des ersten, 4 die des zweiten Sternes, 5 den Logarithmus des beobachteten Helligkeitsverhältnisses, 6 den wegen Extinction corrigirten Logarithmus dieses Verhältnisses. Bei der Bildung der in derselben Columne stehenden Mittel erhielten die mit : bezeichneten Beobachtungen das Gewicht $^1/_2$, die übrigen das Gewicht 1. Columne 7 gibt die Abweichungen von dem durch die spätere Ausgleichsrechnung bestimmten Logarithmus des Helligkeitsverhältnisses der verglichenen Sterne, 8 die von Herrn Seidel angegebenen, nach analogem Verfahren erhaltenen Abweichungen δ.

Da die Angaben der Columne 6 sich auf Combinationen von Sternen beziehen, in welchen fast jeder Stern mehrmals vorkommt, so müssen die aus den einzelnen Combinationen erhaltenen Helligkeitsverhältnisse noch dahin abgeändert werden, dass sie für gleiche Sterne auch gleiche Helligkeit geben.

Tafel X.

Nr.	Verglichene Sterne	Wahre Zenithdistanz		Logarithmus des beob. Hell.-Verh.	corrigirt für Extinction	δ	
						H	S
3	Capella — Wega	61°3	44°5	9·850	9·916	+ 1	+ 14
13		51·8	55·5	9·928	9·914	0	— 5
15		56·2	50·6	9·912	9·933	+ 19	+ 22
20		54·8	52·1	9·944	9·954	+ 40	+ 40
21		56·0	50·9	9·893	9·913	— 1	+ 1
25		46·5	60·1	9·967	9·914	0	— 15
28		44·0	71·3	0·054	9·897 :	— 17	— 45
29		32·1	73·6	0·303	0·091 :	+177	+153
43		49·1	81·2	0·276	9·896 :	— 18	— 40
45		49·2	81·0	0·406	0·032 :	+117	+100
52		82·1	11·9	9·443	9·919 :	+ 4	+ 41
54		80·8	14·2	9·579	9 996 :	+ 81	+ 82
56		73·7	27·1	9·581	9·800 :	—114	— 97
59		74·7	25·4	9·661	9·900 :	— 15	+ 3
60		80·2	15·3	9·541	9·934 :	+ 20	+ 21
64		76·3	22·7	9·701	9·973 :	+ 59	+ 74
70		75·5	24·0	9·690	9·944 :	+ 30	+ 48
73		50·8	56·6	9·878	9·855	— 59	— 65
74		56·6	50·1	9·897	9·922	+ 7	+ 10
78		50·0	57·3	9·886	9·858	— 56	— 64
80		28·8	76·1	0·098	9·835 :	— 79	—101
	Mittel				9·919		
50	Arcturus — Wega	56·5	10·0	9·855	9·935	+ 4	0
51	»	51·3	13·3	9·851	9·909	— 22	— 28
53	»	72·7	20·5	9·746	9·954 :	+ 23	+ 41
	Mittel				9·929		

Nr.	Verglichene Sterne	Wahre Zenithdistanz		Logarithmus des beob. Hell.-Verh.	corrigirt für Extinction	δ	
						H	S
49	Arcturus–Capella	52·4	51·6	9·996	9·998	— 19	— 14
69	»	75·7	78·1	0·120	0·062 :	+ 45	+ 53
	Mittel				0·020		
93	Spica—Wega	59·0	50·0	9·611	9·648 :	— 33	— 33
95	»	62·3	39·5	9·582	9·665	— 17	— 10
	Mittel				9·659		
96	Spica—Arcturus	64·5	33·0	9·651	9·760	+ 10	+ 17
94	Regulus—Wega	62·2	47·1	9·365	9·429 :	— 70	— 65
48	Regulus–Capella	35·4	48·7	9·636	9·607	+ 22	+ 15
92	Regulus—Spica	64·0	60·1	9·806	9·831	+ 13	+ 17
97	Antares—Spica	74·4	73·1	9·776	9·798 :	— 32	— 40
100	Antares—Arcturus	74·2	39·8	9·401	9·611 :	+ 32	+ 40
57	Attair—Wega	45·2	32·5	9·619	9·643	— 57	— 54
104	»	40·4	21·7	9·688	9·712 :	+ 13	+ 10
105	»	42·4	27·2	9·676	9·700	0	— 1
	Mittel				9·679		
98	Attair—Capella	69·0	82·8	0·193	9·841 :	+ 56	+ 46
101	Attair—Arcturus	46·1	43·1	9·745	9·753	— 15	— 11
103	»	39·7	71·7	9·912	9·741 :	— 27	— 48
	Mittel				9·749		
71	Deneb—Wega	6·0	29·0	9·532	9·518 :	+ 30	+ 41
79	»	37·0	59·7	9·554	9·483	— 5	— 11
107	»	24·6	47·9	9·568	9·528	+ 40	+ 52
	Mittel				9·508		

Nr.	Verglichene Sterne	Wahre Zenithdistanz		Logarithmus des beob. Hell.-Verh.	corrigirt für Extinction	δ	
						H	*S*
99	Deneb—Attair	50·1	65·5	9·862	9·783	— 6	— 28
102	»	12·8	39·9	9·738	9·709:	— 79	— 70
106	»	16·6	50·3	9·837	9·784	— 5	+ 1
	Mittel				9·768		
90	Pollux—Capella	70·1	76·0	9·642	9·548	+ 20	+ 7
91	Pollux—Spica	73·4	59·3	9·610	9·741	— 20	— 8
32	Sirius—Capella	75·7	14·4	0·489	0·755	+ 32	+ 26
34	»	73·3	10·7	0·647	0·870	+147	+140
35	»	65·0	11·0	0·871	1·002:	+278	+267
37	»	64·5	13·7	0·588	0·713	— 10	— 22
38	»	74·9	43·5	0·419	0·633	— 90	— 84
39	»	74·9	43·5	0·465	0·679	— 45	— 38
41	»	74·3	42·6	0·435	0·640	— 84	— 76
44	»	73·8	42·0	0·484	0·682	— 41	— 35
47	»	74·1	42·3	0·478	0·680	— 44	— 38
83	»	77·7	17·3	0·411	0·722	— 2	— 8
	Mittel				0·724		
36	Procyon—Capella	44·3	14·9	0·043	0·080:	+130	+119
40	»	52·7	48·0	9·980	9·996:	+ 46	+ 48
46	»	57·6	53·4	9·851	9·869	— 81	— 77
	Mittel				9·954		
75	Aldebaran—Cap.	57·9	45·6	9·584	9·628	— 7	— 6
87	Aldebar.—Procyon	54·6	43·1	9·657	9·692	+ 7	+ 6

Die Anordnung der Vergleichungen in Tafel X ist so getroffen, dass mit Ausnahme von Wega die an zweiter Stelle stehenden Sterne früher an erster Stelle vorkommen; nimmt man daher die Helligkeit von Wega als Einheit, so erhält man der Reihe nach die Helligkeit aller Sterne mit Bezug auf diese Einheit. Indem man für die Helligkeit eines Sternes, wenn derselbe mehrmals an erster Stelle vorkommt, das arithmetische Mittel aus den für jede Combination gefundenen Werthen derselben annimmt und den Einfluss, welchen die Beobachtungsfehler auf diese Bestimmung der Helligkeitslogarithmen nehmen mit c, A... bezeichnet, so wird:

Logarithmus der Helligkeit von Capella . . . . $9\cdot919+c$
» » » » Arcturus . . . . $9\cdot934+A$
» » » » Spica . . . . $9\cdot677+S$
» » » » Regulus . . . . $9\cdot488+r$
» » » » Antares . . . . $9\cdot509+\alpha$
» » » » Attair . . . . $9\cdot707+a$
» » » » Deneb . . . . $9\cdot492+d$
» » » » Pollux . . . . $9\cdot443+p$
» » » » Sirius . . . . $0\cdot643+s$
» » » » Procyon . . . . $9\cdot868+P$
» » » » Aldebaran . . . . $9\cdot551+A'$

Die Bedingungsgleichungen zur Ableitung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten sind:

		Gewicht			Gewicht
1.	$c=0$	15·0	12.	$a-c-52=0$	0·5
2.	$A+5=0$	2·5	13.	$a-A+25=0$	1·5
3.	$A-c-5=0$	1·5	14.	$d-16=0$	2·5
4.	$S+18=0$	1·5	15.	$d-a+16=0$	2·5
5.	$S-A-17=0$	1·0	16.	$p-c-25=0$	1·0
6.	$r+59=0$	0·5	17.	$p-S+25=0$	1·0
7.	$r-c+38=0$	1·0	18.	$s-c=0$	9·5
8.	$r-S-20=0$	1·0	19.	$P-c-5=0$	2·0
9.	$\alpha-S+35=0$	0·5	20.	$A'-c+4=0$	1·0
10.	$\alpha-A-35=0$	0·5	21.	$A'-P-9=0$	1·0
11.	$a+28=0$	2·5			

Da Sirius nur mit Capella verglichen wurde, so ist $s = c$; ebenso würden die Gleichungen 19, 20 bei Weglassung von 21 keine weiteren Daten zur Bestimmung von c liefern. Nachdem nun letztere Gleichung nur durch eine einzige Beobachtung vermittelt wird, kann man sich damit begnügen, zur Bestimmung von P, A' aus den 3 letzten Gleichungen den Werth von c zu benützen, welcher den ersten 17 Gleichungen entspricht und nebst den Werthen der 7 übrigen Unbekannten durch Auflösung der Normalgleichungen erhalten wird, zu denen man durch Differenziation der Summe der mit den Gewichten multiplicirten Quadrate der Bedingungsgleichungen gelangt. Das Resultat, ausgedrückt in Einheiten der 3. Decimalstelle, ist: $c = -5$, $A = -3$, $S = +4$, $r = +11$, $\alpha = +1$, $a = -8$, $d = -4$, $p = -1$, $s = -5$, $P = -4$, $A' = -2$.

Die Abweichungen δ in Columne 7 der Tafel X beziehen sich auf die durch Anbringung dieser Correctionen veränderten Werthe der Helligkeitslogarithmen der verglichenen Sterne. Da die Abweichungen gleich sind dem Unterschiede der einzelnen Werthe von Mittelwerthen, so versteht es sich von selbst, dass die positiven und negativen Vorzeichen in nahezu gleicher Anzahl auftreten. Wenn die angenommenen Extinctionswerthe der mittleren Extinction für die Beobachtungstage entsprechen, müssten die durch den Unterschied der wahren und mittleren Extinction hervorgerufenen Fehler dasselbe Verhalten zeigen. Die Correction des Helligkeitsverhältnisses zweier Sterne wegen Extinction hängt vornehmlich von der grösseren Zenithdistanz ab, und das umsomehr, je grösser der Unterschied der Zenithdistanzen ist. Eine vermehrte (verminderte) Absorption wird daher eine negative (positive) Abweichung zur Folge haben, wenn der Stern mit der grösseren Zenithdistanz in den Nenner des Verhältnisses gebracht wird. Insoferne man die in Tafel X gegebenen Abweichungen durch Absorptionsunterschiede erklären will, braucht man nur für jene Vergleichungen, bei welchen der in grösserer Zenithdistanz beobachtete Stern an erster Stelle steht, das Vorzeichen der Abweichungen zu ändern, um in demselben den Einfluss vermehrter oder verminderter Absorption hervortreten zu lassen. Wenn auch die Abweichungen mit Beobachtungs-

fehlern behaftet sind, so würde doch bei wesentlich fehlerhafter Annahme der mittleren Extinction ein bemerkenswerther Unterschied zwischen der Zahl der positiven und negativen δ sich herausstellen. Dies ist aber nicht der Fall, wie man aus folgender Zusammenstellung ersieht, in welcher für beide Darstellungen die Fehler ihrer Grösse nach geordnet sind und die Zeichen mit Bezug auf die Darstellung in Tafel X in der Weise geändert wurden, dass sie den Helligkeitsvergleichungen entsprechen, wenn der Stern mit der grösseren Zenithdistanz seinen Platz im Nenner des Verhältnisses angewiesen erhält.

Tafel XI.

δ		δ		δ		δ	
H	*S*	*H*	*S*	*H*	*S*	*H*	*S*
0	0	−13	+14	+30	+40	− 59	+ 65
0	+ 1	−13	−14	−30	−40	− 59	− 65
0	+ 1	+15	+15	+32	−40	+ 70	− 70
+ 1	− 1	+15	−15	−32	−40	− 79	− 74
− 1	− 3	+17	−17	−32	+41	− 79	+ 76
+ 2	− 5	−17	−17	+33	−41	+ 81	+ 77
− 4	+ 6	−18	−21	+40	−41	− 81	− 82
− 4	− 6	+19	+22	−40	−45	+ 84	+ 84
− 5	+ 7	−19	−22	+41	+46	+ 90	+ 97
− 5	+ 8	+20	−26	+44	−48	+114	+100
− 6	+ 8	+20	+28	+45	−48	+117	−101
+ 7	+10	−20	−28	+45	−48	−131	−119
− 7	−10	+22	+33	−46	+52	−147	−140
− 7	−10	+22	+35	+56	+53	+177	+153
+10	+11	−23	+38	−56	+54	−278	−267
−10	−11	−27	+38	+57	−64		

	H	*S*
Zahl der positiven δ	29	29
δ = 0	3	1
Zahl der negativen δ	31	33
Summe der positiven δ	1·326	1·213
Summe der negativen δ	1·348	1·561
Quadratsumme der δ	0·2611	0·2485
In der Mitte gelegener Fehler	0·027	0·038

Was die Vertheilung der Vorzeichen anbelangt, sind beide Darstellungen von gleicher Güte; im Ganzen jedoch ist die Darstellung *H*, trotzdem sie einen grösseren Werth von $[\delta\delta]$ gibt, entschieden besser, nachdem die Fehler vorwiegend kleiner sind und auch deren Summe der Null viel näher kommt, als in der Darstellung *S*. Dieselbe beruht auf einer empirischen Extinctionstabelle, welche naturgemäss der mittleren Absorption für die Beobachtungstage Rechnung trägt; diese mittlere Absorption kann aber von der für München überhaupt geltenden nur wenig verschieden sein, da die Zahl der Beobachtungstage $= 37$ ist. Nachdem nun die mit den Werthen von *X, Y, Z* berechnete Extinctionstabelle, sowohl die Potsdamer-, als auch die Münchener-Beobachtungen in ganz befriedigender Weise darstellt, kann man daraus den Schluss ziehen, dass die mittlere Absorption für beide Orte ungefähr gleich ist.

Herr Seidel hat an einem Tage die Vergleichungen von Arcturus mit Wega so lange fortgesetzt, bis ersterer Stern in die unmittelbare Nähe des Horizontes gelangte und hieraus die »Tabelle der Extinctionen in sehr grossen Zenithdistanzen« abgeleitet, welche ich unter Beifügung der mit den Constanten *X, Y, Z* berechneten Extinctionswerthe abgekürzt hier folgen lasse:

Tafel XII.

z	log Reduction	
	S	*H*
85°5	0·654	0·751
86·0	0·741	0·815
86·5	0·845	0·890
87·0	0 968	0·979
87·5	1·094	1·084
88·0	1·223	1·211
88·5	1·362	1·360
89·0	1·512	1·542
89·5	1·661	1·764

Der Unterschied zwischen beiden Darstellungen ist mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit der Beobachtungen und den bedeutenden Einfluss, welchen eine von der mittleren etwas verschiedene Absorption hierauf nimmt, nicht von Belang.

Mit Bezug auf die Verwendbarkeit der Laplace'schen Formel äussert sich Herr Seidel nach Anführung der erhaltenen Resultate, wie folgt: »Ich schliesse hieraus, dass die Laplace'sche Theorie für Zenithdistanzen, welche über 80° steigen, nicht ausreichend ist, dass sie aber in grösseren Höhen den Beobachtungen ziemlich gut genügt. Nachdem auch die Potsdamer Beobachtungen des Herrn Müller zu demselben Ergebnisse führen, gewinnt die Annahme einer merklichen Abnahme des Absorptionscoëfficienten in Folge Einflusses der selectiven Absorption noch an Wahrscheinlichkeit.

Die Beobachtungen, welche Herr Müller auf dem Gipfel des Säntis angestellt hat, lassen unter Voraussetzung einer einheitlichen für alle Sterne gleichen mittleren Absorption eine Abnahme des Absorptionscoëfficienten nicht erkennen und werden sowohl mit Bezug auf die Summe der Fehlerquadrate, als auch die Vertheilung der Fehler auf die verschiedenen Zenithdistanzen durch die Laplace'sche Formel in vollkommen zufriedenstellender Weise dargestellt und zwar entschieden besser als durch die mit den Werthen von X, Y, Z und den für eine Seehöhe von 2500 *m* geltenden ϑ berechnete Extinctionstabelle. Führt man die Reduction für jeden Stern gesondert durch, so erhält man für α Aurigae, α Lyrae, α Tauri, δ Persei, β Trianguli, 41 Arietis ein günstigeres Resultat durch Anwendung der Formel H, für α Arietis, β Aurigae, β Arietis, ζ Persei, ε Persei, η Aurigae ein besseres Ergebniss durch Anwendung der Formel L, während für γ Draconis, welcher nur bis zu einer Zenithdistanz von 69° beobachtet worden ist, beide Formeln zu demselben Resultate führen. Die Absorption ist nach einer eigens hierüben angestellten Untersuchung sowohl für die einzelnen Sterne als auch für die einzelnen Beobachtungstage, deren Zahl mit Ausschluss von zweien, an welchen nur je eine Beobachtung gemacht worden ist, nicht mehr als 9 beträgt, ziemlich verschieden, so dass für eine mittlere Absorption die Beobachtungen wohl grössere Abweichungen zeigen müssen, welche, da 9 Sterne nur an 4, 3 Sterne sogar nur an 3 Abenden gemessen worden sind, sich nicht mehr so regelmässig compensiren werden; doch kann hierin der Grund nicht liegen, dass bei Zusammenfassung aller Beobachtungen durch die Annahme

eines constanten Absorptionscoëfficienten ein besseres Resultat erzielt wird. Die Sterne, für welche die Minima der Fehlerquadratsumme sich beim Übergange von Formel *H* auf *L* am meisten ändern, sind α Aurigae und ζ Persei. Es ist bemerkenswerth, dass die Beobachtungen derselben an (4, resp. 5) Tagen angestellt worden sind, welche kein gemeinsames Datum besitzen. Während die Beobachtungen von α Aurigae durch Formel *H* viel besser dargestellt werden, als durch Formel *L*, müsste für ζ Persei zur Erreichung eines ähnlichen Resultates ein absolut genommen etwas grösserer und zwar negativer Werth von *Y* in die Formel *H* eingesetzt werden, wodurch eine Vergrösserung der Absorption in den unteren Schichten der Atmosphäre angezeigt wird. Die »Bemerkungen« zu den photometrischen Beobachtungen enthalten auch des öfteren und speciell für die Tage, an welchen ζ Persei beobachtet worden ist, Angaben, welche Nebelbildung theils direct ausdrücken, theils darauf schliessen lassen. Es ist auch ohnehin wahrscheinlich, dass im Hochgebirge und besonders in den Abendstunden häufig Condensation von Wasserdampf eintritt, welche photometrische Messungen bereits erheblich beeinflussen würde, aber erst in einem weitergeschrittenen Stadium zur eigentlichen Nebelbildung führt. Durch solche leichte Trübungen kann die trockener Luft entsprechende Verminderung der Absorption in den unteren Schichten oft mehr als aufgehoben werden und für eine grosse Beobachtungsreihe die mittlere Absorption fast gleichförmig zu wirken scheinen. Nachdem es, von der Wirkung des Wasserdampfes abgesehen, viel wahrscheinlicher ist, dass die untersten Luftschichten in der Umgebung von Städten wie München und Potsdam die durch die selective Absorption bedingte Verminderung der durchschnittlichen Absorption nicht voll zur Geltung kommen lassen und eine solche sich dennoch in den Beobachtungen klar ausspricht, glaube ich aus dem angeführten Grunde in dem gegensätzlichen Verhalten der auf dem Säntisgipfel angestellten Beobachtungen, soferne dieselben für sich allein betrachtet werden, kein vollwichtiges Argument für die Zulänglichkeit der Annahme einer gleichförmigen Absorption erblicken zu können.

Tafel XIII.

Mittlere Extinctionstabelle.

Wahre Zenithdistanz	log Reduction				log ϑ
	nach Seidel	nach Müller	nach Formel H		
			X_0, Y_0, Z_0	X, Y, Z	
0°					7·112
5			0·000	0	113
6			0·001	0	114
7			0·001	0	115
8			0·001	0	116
9			0·001	0	117
10		0·000	0·002	0	118
11		0·001	0·002	0	120
12		0·001	0·002	0	121
13	0·000	0·001	0·003	0	123
14	0·001	0·001	0·003	0	125
15	0·001	0·002	0·004	0	127
16	0·001	0·002	0·004	0	129
17	0·001	0·002	0·005	0	131
18	0·002	0·003	0·006	0	133
19	0·003	0·003	0·006	0	136
20	0·003	0·004	0·007	0	139
21	0·003	0·004	0·008	0	141
22	0·003	0·005	0·008	0	144
23	0·004	0·005	0·009	0	147
24	0·004	0·006	0·010	0	151
25	0·005	0·007	0·011	0	154
26	0·005	0·008	0·012	0	158
27	0·006	0·008	0·013	0	162
28	0·006	0·009	0·014	0	166
29	0·007	0·010	0·015	0	170
30	0·007	0·011	0·016	0	174
31	0·008	0·012	0·018	0	178
32	0·009	0·013	0·019	0	183
33	0·010	0·014	0·020	0	188
34	0·011	0·016	0·022	0	193
35	0·012	0·017	0·023	0	198
36	0·013	0·018	0·025	0	203
37	0·014	0·020	0·027	— 1	209
38	0·015	0·021	0·028	0	215

Wahre Zenithdistanz	log Reduction				log ϑ
	nach Seidel	nach Müller	nach Formel H		
			X_0, Y_0, Z_0	X, Y, Z	
39°	0·016	0·023	0·030	0	7·221
40	0·017	0·024	0·032	0	227
41	0·019	0·026	0·034	0	233
42	0·021	0·028	0·036	0	240
43	0·023	0·030	0·038	0	247
44	0·026	0·032	0·041	0	254
45	0·028	0·035	0·043	0	262
46	0·031	0·037	0·046	0	269
47	0·034	0·040	0·048	0	277
48	0·038	0·042	0·051	0	285
49	0·041	0·045	0·054	0	294
50	0·045	0·048	0·057	0	303
51	0·049	0·051	0·060	0	312
52	0·053	0·055	0·064	0	321
53	0·057	0·059	0·067	0	331
54	0·062	0·063	0·071	0	341
55	0·067	0·067	0·075	0	352
56	0·072	0·071	0·079	+ 1	363
57	0·077	0·076	0·084	0	374
58	0·083	0·081	0·089	0	386
59	0·090	0·086	0·094	0	398
60	0·097	0·092	0·099	+ 1	411
61	0·104	0·098	0·105	0	424
62	0·112	0·105	0·111	+ 1	438
63	0·121	0·112	0·117	+ 1	452
64	0·130	0·119	0·124	+ 1	467
65	0·140	0·128	0·132	+ 1	483
66	0·150	0·136	0·140	+ 1	499
67	0·160	0·146	0·148	+ 2	516
68	0·170	0·156	0·157	+ 2	534
69	0·180	0·168	0·168	+ 2	553
70	0·191	0·180	0·179	+ 2	573
71	0·204	0·193	0·190	+ 3	594
72	0·218	0·208	0·204	+ 2	616
73	0·233	0·223	0·218	+ 3	639
74	0·249	0·241	0·234	+ 3	664
75	0·268	0·260	0·251	+ 4	690
76	0·288	0·281	0·271	+ 4	718

Wahre Zenithdistanz	log Reduction nach Seidel	nach Müller	nach Formel H X_0, Y_0, Z_0	X, Y, Z	log ϑ
77	0·309	0·304	0·294	+ 4	7·748
78	0·333	0·330	0·319	+ 5	781
79	0·359	0·359	0·348	+ 5	816
80	0·388	0 391	0·382	+ 5	854
81	0·428	0·428	0·422	+ 5	895
82	0·484	0·472	0·470	+ 5	941
83	0·549	0·526	0·529	+ 4	7·991
84	0 616	0·596	0·602	+ 2	8·047
85	0·684	0·689	0·696	— 1	8·110
86	0·754	0·816	0·821	— 6	8·182
87		0·993	0·992	—13	8·265
88		1·241	1·236	—25	8·362

Über die Entstehung der Röntgen'schen Strahlen und ihre photographische Wirkung

von

Prof. **J. Puluj** in Prag.

(Mit 1 Tafel und 5 Textfiguren.)

In der vorläufigen Mittheilung des Herrn Röntgen[1] über die von ihm entdeckten unsichtbaren Strahlen, welche mit ihrer photographischen Wirkung in weitesten Kreisen das lebhafteste Interesse erregen, wird bemerkt, dass nach seinen Versuchen jene Stelle der Wand der Entladungsröhre, welche von den sichtbaren Kathodenstrahlen getroffen wird und am stärksten »fluorescirt«, als Hauptausgangspunkt der nach allen Richtungen sich ausbreitenden neuen Strahlen zu betrachten sei. Diese Annahme wird auf die Beobachtung gestützt, dass, wenn die sichtbaren Kathodenstrahlen innerhalb des Entladungsapparates durch einen Magnet abgelenkt werden, auch die neuen unsichtbaren Strahlen ausserhalb des Apparates von einer anderen Stelle, und zwar wieder von dem Endpunkte der sichtbaren Kathodenstrahlen ausgehen. Ausserdem findet die Erzeugung dieser Strahlen, nach Angabe des Herrn Röntgen, nicht nur in Glas statt, sondern, wie von ihm an einem mit 2 *mm* starkem Aluminiumblech abgeschlossenen Apparat beobachtet werden konnte, auch in diesem Metall.

Um die Richtigkeit der Annahme des Herrn Röntgen über den Ort der Entstehung der neuen Strahlen experimentell zu prüfen, benützte ich die grosse Divergenz, mit der diese

---

[1] Eine neue Art von Strahlen, von Dr. W. Röntgen. Separatabdruck aus den Sitzungsberichten der Würzburger physik.-medic. Gesellschaft, 1895, S. 8.

Strahlen die Apparate verlassen, und suchte den Ausgangspunkt derselben auf graphischem Wege aus der Grösse des Schattens zu bestimmen, welcher von einem 11 *mm* dicken und 20 *mm* hohen Eisenring von 56 *mm* innerem und 79·2 *mm* äusserem Durchmesser auf der photographischen Platte erhalten wurde. Zu diesem Zwecke diente eine Entladungsröhre von der in Fig. 1 dargestellten Form, welche symmetrisch zu dem

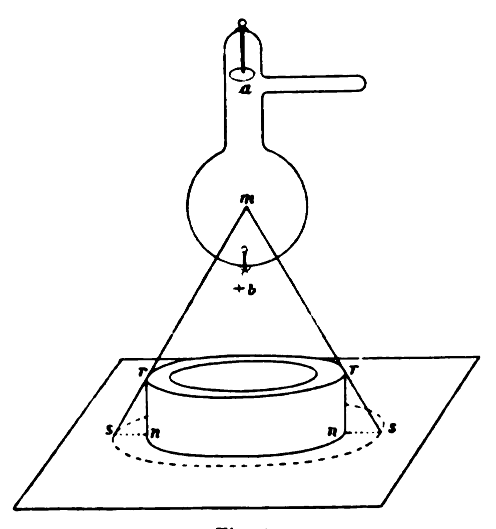


Fig. 1.

Metallringe *rr*, in einem bestimmten Abstande von demselben aufgestellt wurde. Die Kugel der Entladungsröhre hatte einen Durchmesser von 82 *mm* und der Abstand der Kathode *a* von der Anode *b* betrug 160 *mm*. Die Anode *b* wurde absichtlich gegenüber der Kathode angebracht, weil bei dem hohen Verdünnungsgrade, wie derselbe hier erforderlich ist, die sichtbaren Kathodenstrahlen entgegen der Annahme von Crookes fast ausschliesslich nur in der Richtung nach der Anode gehen[1] und, wie man durch einen Versuch leicht constatiren kann, auf der von der Anode abgewendeten Seite der Kathode fast keine Röntgen'schen Strahlen entstehen.

[1] Strahlende Elektrodenmaterie und der sogenannte vierte Aggregatzustand. C. Gerold's Sohn, Wien 1883, S. 22.

Ist die Annahme des Herrn Röntgen über den Ausgangspunkt der neuen Strahlen richtig, so werden in meiner Lampe dieselben nicht an der Glaswand, sondern am phosphorescirenden Schirme entstehen und senkrecht den Schirm verlassen. Es war ferner im Voraus zu erwarten, dass die unsichtbare Strahlung in diesem Falle eine bedeutend stärkere sein wird als bei gewöhnlichen Röhren, bei denen nur die Glaswände verhältnissmässig schwach phosphoresciren.

Die Versuche haben diese Erwartungen bestätigt. Wurde die Lampe mit einem cylindrischen Mantel aus Cartonpapier zugedeckt und senkrecht zur Ebene des phosphorescirenden Glimmerschirmes ein mit Platin-Bariumcyanür angestrichener Papierschirm gehalten, so zeigte die starke Fluorescenzwirkung der unsichtbaren Strahlen ganz deutlich nicht bloss den Ort der Entstehung derselben, sondern auch die Richtung ihrer Fortpflanzung an. Man sah deutlich einen etwas dunkleren schiefen Streifen, entsprechend der Lage des Glimmerschirmes und rechts und links von demselben die hellen Fluorescenzstreifen, welche in Fig. 4 angedeutet sind.

Wurde der Fluorescenzschirm vertical über der Kathode gehalten, so war die Fluorescenzwirkung nur schwach, dagegen sehr stark, wenn der fluorescirende Schirm parallel zum Glimmerschirm gehalten wurde.

Als hierauf die Vertheilung der Intensität der unsichtbaren Strahlen mittelst grosser photographischer Platten näher untersucht wurde, schien es, dass die Strahlen vom Glimmerschirm auf der der Kathode zugewendeten Seite so ausgehen, als ob dieselben eine regelmässige Reflexion am Glimmerschirme erfahren würden, es fehlte jedoch die Zeit, um die Strahlen in dieser Beziehung eingehender zu untersuchen.

Die Lampe Fig. 4 gibt bei normaler Beanspruchung eine solche Fülle unsichtbarer Strahlen, dass schon eine Expositionsdauer von zwei Secunden genügt, um von Gegenständen deutliche Bilder auf photographischen Platten hervorzurufen. Will man jedoch von denselben sehr genaue Details erhalten, so muss die Expositionsdauer wesentlich grösser gewählt werden, immerhin ist aber dieselbe ungefähr viermal kleiner als bei gewöhnlichen Entladungsapparaten.

Die Lampe gibt ferner nahezu parallele Strahlen, und man erhält selbst von ausgedehnten und erhabenen Gegenständen verhältnissmässig scharfe Transparent- und nicht Schattenbilder, wie bisher fast allgemein angenommen wurde. Nur homogene und gleich dicke Platten geben reine Schattenbilder.

Neue Formen der phosphorescirenden Lampe.

Obwohl die phosphorescirende Lampe neue Strahlen von grosser Intensität gibt und für photographische Zwecke sich besser eignet als alle mir bekannten Entladungsröhren, so

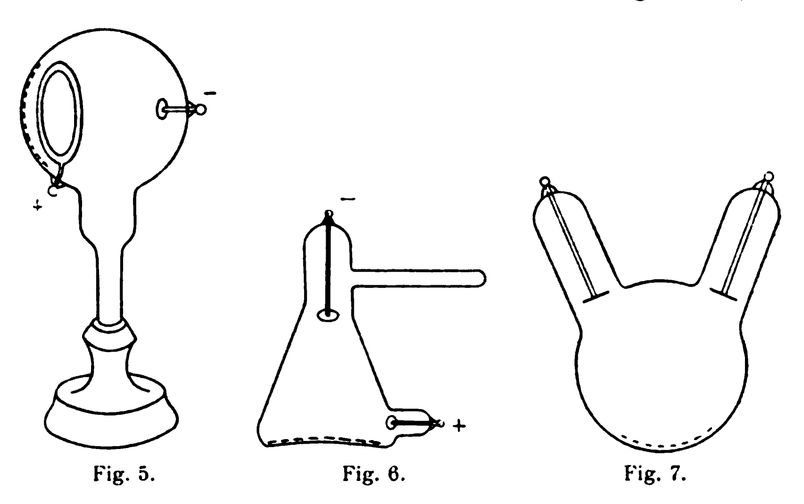


Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.

habe ich zur Erzielung einer gleichmässigeren Vertheilung der unsichtbaren Strahlung meiner Lampe noch neue Formen gegeben, welche in Fig. 5 und 6 dargestellt sind.

Die drahtförmige Anode liegt symmetrisch zur Kathode und ist seitlich eingeschmolzen. Die der Anode gegenüberliegende Glaswand ist mit Schwefelcalcium angestrichen. Ausserdem enthält die Kugel Schwefelcalcium in Pulverform, um durch Schütteln des Apparates neue Partikeln in den Weg der sichtbaren Kathodenstrahlen zu bringen, da die leuchtenden Schirme und Glaswände, wenn sie den Kathodenstrahlen längere Zeit ausgesetzt werden, sich schwärzen und weniger lebhaft leuchten.

Die Lampen Fig. 5 und 6 dienen für pulsirende Gleichströme. In Fig. 7 ist noch eine Lampe dargestellt, welche für

pulsirende Wechselströme bestimmt ist, aber auch für pulsirende Gleichströme verwendet werden kann.

Um pulsirende Wechselströme mit dem Ruhmkorff'schen Apparate zu erzeugen, ist es nur nöthig, im Secundärkreise desselben die Lampe und eine Leydener Flasche hinter einander zu schalten. Die Elektroden der Lampe wirken dann alternirend als Kathoden und senden ihre Strahlen in die Kugel, welche im Inneren ebenfalls mit einer Leuchtfarbe angestrichen ist.

Photographische Aufnahmen mit neuen Strahlen.

Bei den ersten photographischen Aufnahmen verwendete ich Entladungsapparate, von denen der eine in diesen Berichten ebenfalls beschrieben ist. Der Apparat war ähnlich dem in Fig. 1 dargestellten, nur war die Anode seitwärts eingeschmolzen und an ihrer Stelle ein Stück Pektolyth befestigt, der im Schatten eines Glimmerschirmes zum Leuchten gebracht wurde, obwohl er von den geradlinig sich fortpflanzenden Kathodenstrahlen nicht erreicht werden konnte.[1]

Der zweite Apparat war kugelförmig mit zwei ungefähr je 10 *cm* langen Ansatzröhren, die an ihren Enden mit scheibenförmigen Elektroden versehen waren. Die Röhren waren auf der Kugel um 90° gegen einander versetzt, so dass die Kathodenstrahlen die Kugel in der einen oder anderen darauf senkrechten Richtung durchsetzen konnten. Senkrecht zu den beiden Richtungen waren in der Glaskugel zwei verschieden geformte Schirme aus dünnem Aluminiumblech angebracht. Diese Röhre gab vorzügliche Resultate, und die Expositionsdauer variirte bei den einzelnen Aufnahmen, je nach der Grösse des Gegenstandes und der verlangten Deutlichkeit des Bildes, von $^1/_4$—2 Stunden.

Von vielen Aufnahmen, die in meinem Laboratorium ausgeführt wurden, sei hier die Hand eines elfjährigen Mädchens erwähnt, welche am 18. Jänner gelang und im Vergleiche zu der bekannt gewordenen Reproduction der von Herrn Röntgen abphotographirten Hand schon sehr wesentliche Fortschritte

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 1881, Bd. LXXXIII, Fig. 2.

zeigte. Auf dem Bilde waren nicht bloss die Fingerknochen, sondern auch die Mittelhandknochen, die Epiphysen und der obere Theil des Radius und Ulna sehr deutlich zu sehen.

Da schon die ersten Nachrichten über die wunderbare photographische Wirkung der neuen Strahlen die Vermuthung nahe legten, dass die chirurgische Operationstechnik von der Photographie des Unsichtbaren wird Nutzen ziehen können, so liess ich mir angelegen sein, die Grenzen näher zu bestimmen, innerhalb welcher solche Anwendungen in der Chirurgie gemacht werden können.

Ich photographirte eine tuberculose Hand[1], einen in Heilung begriffenen gebrochenen Arm eines 13-jährigen Knaben[2], ein erschossenes Meerschweinchen, die Hand mit Revolverkugel eines Herrn P. aus Köln, den Kopf eines jungen Mannes, in welchem seit einigen Jahren eine 6 *mm* Revolverkugel steckt, wobei der Besitzer sich ganz wohl befindet, einen mit Schrott angeschossenen Fussschenkel und ein neugeborenes, todtes Kind. Ausserdem photographirte ich, ausser verschiedenen Thieren und Gegenständen, Hände eines vier- und zweijährigen Kindes, in welchen letzteren Fällen bei Anwendung der Lampe (Fig. 4) eine Expositionsdauer von 7—8 Minuten genügte, um deutliche und schöne Bilder zu erhalten. Bei Kindern wurden die Hände über der in Handschuhleder eingewickelten, photographischen Platte mittelst dünner Leinwandstreifen, welche für die neuen Strahlen ganz durchlässig sind, und Reissnägel an die Tischplatte befestigt.

Die tuberculose Hand zeigte eine Verkürzung der Phalanx des Zeigefingers, in Folge dessen derselbe kürzer war, als der kleine Finger, und die morsch gewordenen Knochentheile waren in der Schattirung verschieden von dem gesunden Knochen. Bei der Hand mit gebrochenen Vorderarmknochen war deutlich zu sehen, dass bei Ulna der Callus sich bereits gebildet hat, während beim Radius ein Stück desselben fehlte, der während der Eiterung der Wunde herauskam und entfernt wurde.

---

[1] Die Patientin wurde von Herrn Prof. Pick beigestellt.

[2] Der Patient befindet sich gegenwärtig auf der Klinik des Herrn Prof. Dr. Wölfler und wurde von demselben beigestellt.

In der Hand mit der Revolverkugel sitzt die letztere genau in der Mitte am oberen Ende des Mittelhandknochens und dürfte in denselben sich eingebohrt haben und mit Callus überwachsen sein.

Die Revolverkugel im Kopfe konnte trotz anderthalbstündiger Expositionsdauer nicht gefunden werden. Zwischen der photographischen Platte und dem Kopfe war noch eine Controllkugel angebracht, aber auch diese erschien am Bilde nicht, welcher Umstand dafür spricht, dass die Strahlen von solcher Intensität, wie sie mit den uns zur Verfügung stehenden Apparaten erzeugt werden, den Kopf eines erwachsenen[1] Menschen nicht mehr durchdringen können. Es muss aber bemerkt werden, dass bei dieser Aufnahme nicht die in Fig. 4 dargestellte, sondern eine andere, bedeutend schwächere Lampe verwendet wurde.

Ebenso konnten auch die Schrottkörner im Fussschenkel nicht abphotographirt werden, wie ich vermuthe, weil die alte Lampe Strahlen von verhältnissmässig kleiner Intensität und zu grosser Divergenz lieferte. Der letztere Umstand hatte zur Folge, dass kleine Körper, wie Schrottkörner, nur dann scharf abgebildet werden, wenn dieselben ganz in der Nähe der photographischen Platte liegen; in einem bestimmten grösseren Abstande von derselben werden kleine Körper nicht abgebildet. Eine Stecknadel zwischen der photographischen Platte und der Handfläche erscheint auf dem Bilde ganz scharf, dagegen verschwindet dieselbe, wenn sie beim Photographiren auf den Arm gelegt wird. Es wird sich daher in Zukunft empfehlen, so lange man mit divergirenden Strahlen arbeiten wird, beim Suchen von Projectilen im menschlichen Körper, die photographische Platte auf jene Seite des letzteren zu geben, auf welcher das Projectil der Platte näher zu liegen kommt.

Anderseits wird man bei zwei oder mehreren Aufnahmen, die in verschiedenen Richtungen ausgeführt werden, aus der grösseren Deutlichkeit und Schärfe der Umrisse des fremden Körpers auf seine grössere Nähe zur Platte schliessen dürfen.

---

[1] Bei späteren Aufnahmen von kleinen Kindern gelang es selbst kleine Körper, wie Stecknadeln, durch den Kopf und den Brustkorb abzuphotographiren.

Mit parallelen Strahlen wird man dagegen zweifellos auch so kleine Fremdkörper, wie eine Stecknadel, in jedem Abstand von der Platte deutlich abbilden können.

Beim erschossenen Meerschweinchen sind die Schrottkörner, wegen geringer Dicke der Weichtheile mit einer Deutlichkeit abgebildet, welche nichts zu wünschen übrig lässt.

Das todte Kind wurde zwar auch noch mit einem alten Entladungsapparate abphotographirt, aber nichtsdestoweniger ist die Darstellung der Ausdehnung der Ossification an den Extremitäten, nach Äusserung des Herrn Prof. Chiari, geradezu eine vorzügliche. Man sieht aber auch genug deutlich die ganze Wirbelsäule bis zum Kopfe, der nur zum Theil auf die Platte zu liegen kam, und die Rippen des Brustkorbes, in welchem das Herz und die Leber auch noch durch eine stärkere Schattirung angedeutet sind.

Art der Entstehung der neuen Strahlen.

Die oben festgestellte Thatsache, dass Körper, welche unter der Wirkung der sichtbaren Kathodenstrahlen stärker phosphoresciren, auch intensivere Röntgen'sche Strahlen aussenden, gestattet schon jetzt bezüglich der Art ihrer Entstehung eine Ansicht auszusprechen.

Es ist zwar die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass, trotz der oben beschriebenen Beobachtungen, die neuen Strahlen, sowie die sichtbaren Kathodenstrahlen, doch von der Kathode ausgehen und wohl in stark verdünnten Gasen innerhalb der Glasröhre, aber nicht ausserhalb derselben, in gewöhnlicher Luft durch Magnete abgelenkt werden, es scheint mir aber die Annahme viel wahrscheinlicher zu sein, dass hier eine Umwandlung der sichtbaren Kathodenstrahlen in eine unsichtbare Strahlung durch Vermittlung von materiellen Körpern erfolgt.

Im Sinne der in diesen Berichten 1881 und 1882 veröffentlichten Theorie über »strahlende Elektrodenmaterie« stelle ich mir diese Umwandlung der Kathodenstrahlen in folgender Weise vor.

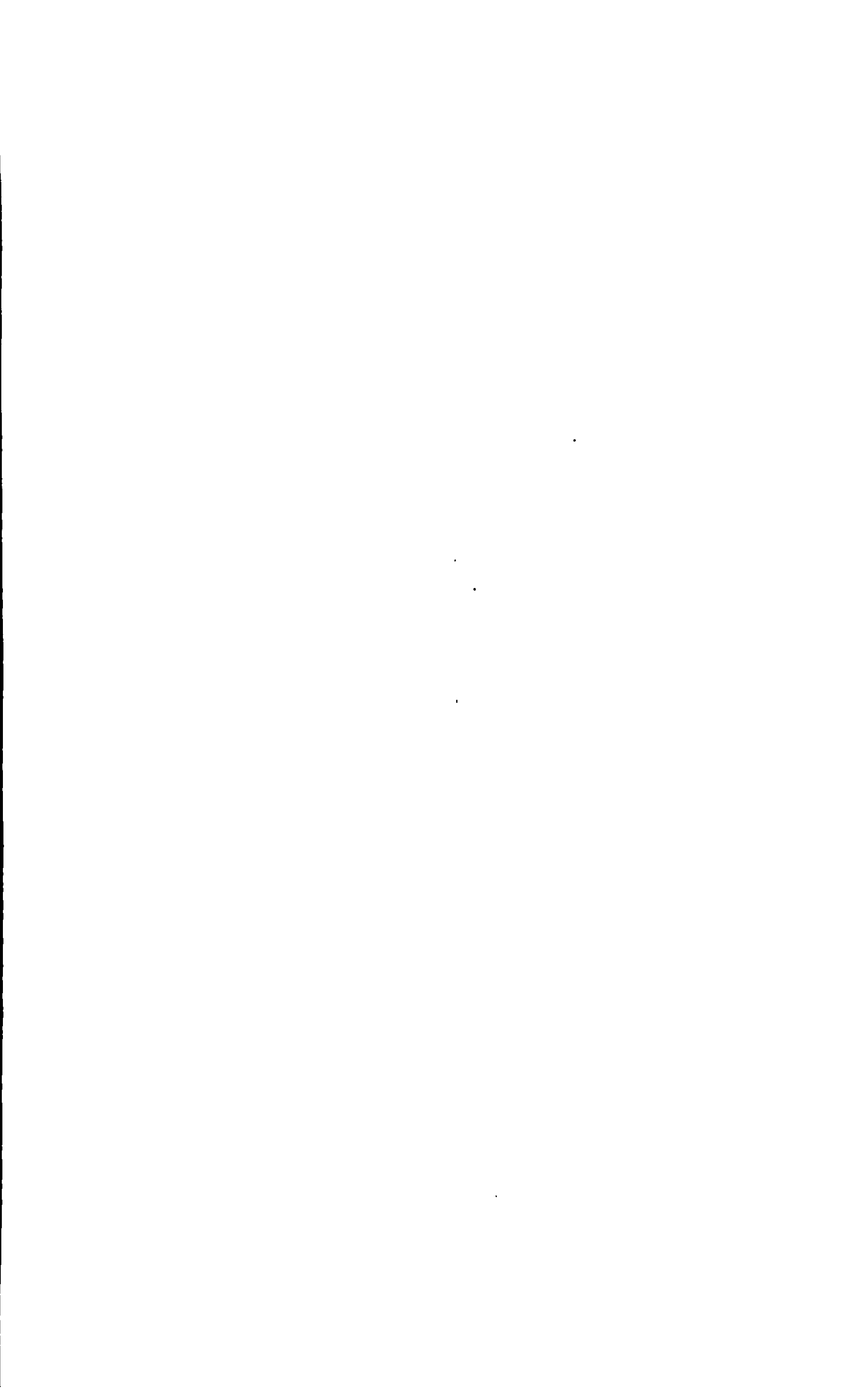
Von der Kathode werden durch den hochgespannten Strom materielle Theilchen (Elektroden- und Gastheilchen) losgerissen und senkrecht zur Oberfläche der Kathode fortgeschleudert.

Die Theilchen sind mit negativer statischer Elektricität geladen, führen diese convectiv fort und vermitteln die Stromleitung zwischen beiden Elektroden und den Glaswänden. Treffen diese materiellen, negativ elektrischen Theilchen die Glaswände oder andere feste Körper, so wird ausser der Erschütterung der körperlichen Moleküle auch ein Ausgleich ihrer elektrischen Ladungen erfolgen, welcher Ausgleich ohne Erschütterung der Ätherhüllen der Moleküle nicht vor sich gehen kann. Jede getroffene Stelle der Glaswand oder eines Schirmes wird zum Ausgangspunkte von Ätherwellen, ähnlich wie eine Saite oder eine Platte, vom Luftstrom continuirlich bestrichen, nach allen Richtungen Schallwellen von verschiedener Schwingungsdauer aussenden.

In Folge der in den Raum austretenden Ätherwellen leuchtet ein mit Schwefelcalcium angestrichener Schirm mit dem dieser Substanz eigenen Lichte. Ausser diesen sichtbaren Strahlen der Phosphorescenz entstehen aber noch unsichtbare Strahlen mit anderer Schwingungsdauer, und das sind die vom Herrn Röntgen entdeckten unsichtbaren Strahlen, die auch möglicherweise nicht transversal, wie das Phosphorescenzlicht, sondern longitudinal schwingen könnten, obwohl bisher noch kein zwingender Grund für diese Annahme vorliegt.

Es ist auch a priori zu erwarten, dass Körper, welche durch Kathodenstrahlen leichter zur Phosphorescenz angeregt werden, auch eine intensivere unsichtbare Strahlung geben werden.

Zum Schluss sei hier noch die Beobachtung mitgetheilt, dass evacuirte Röhren ohne Elektroden, Glühlampen, Radiometer und andere Vacuumapparate in den Weg der Röntgenschen Strahlen gebracht, im dunklen Zimmer Entladungserscheinungen zeigen und desto heller leuchten, je näher dieselben an den Apparat gebracht werden. Bei Anwendung des Apparates (Fig. 1) hört das Leuchten der elektrodenlosen Röhre sofort auf, wenn *b* zur Kathode gemacht wird, welcher Umstand dafür zu sprechen scheint, dass die elektrische Entladung in der Vacuumröhre nicht durch den Ruhmkorff'schen Apparat hervorgerufen wird.



J. Puluj: Entstehung der Röntgen'schen Strahlen.

Fig. 2.

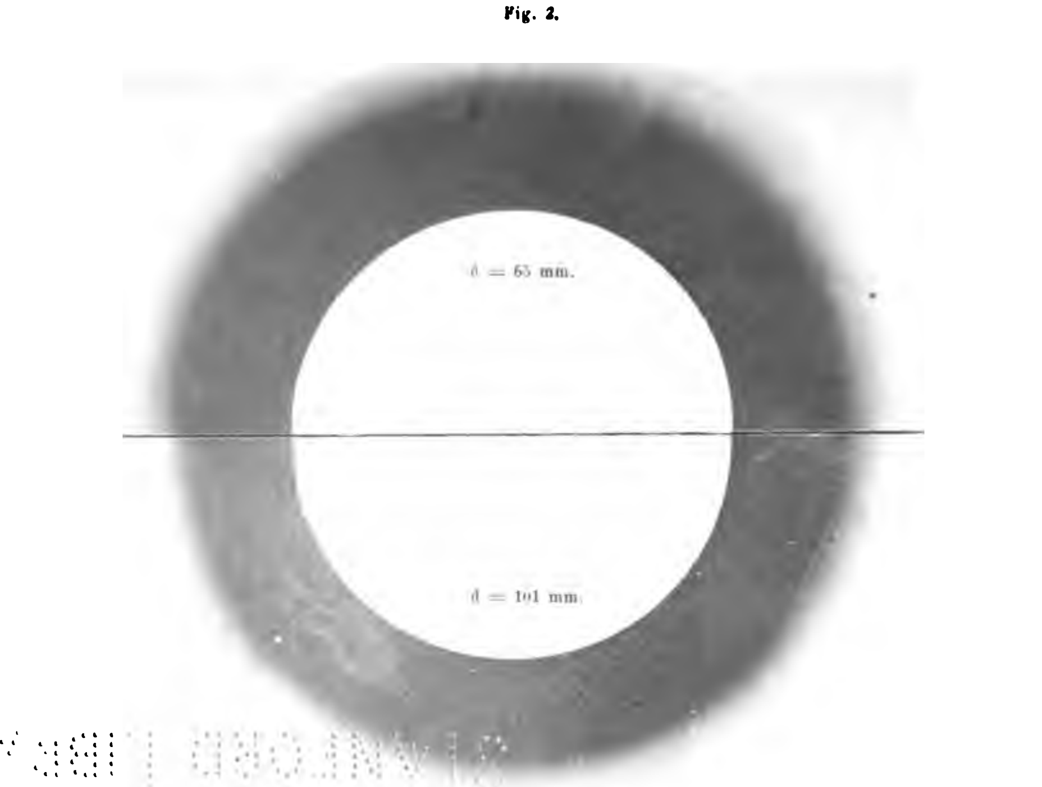


Fig. 3.

Lichtdruck v. M. Jaffé, Wien.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. III. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



VII. SITZUNG VOM 5. MÄRZ 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 104, Abth. I, Heft IX (November 1895), ferner das Heft I (Jänner 1896) des 17. Bandes der Monatshefte für Chemie.

Herr Prof. Dr. J. Puluj in Prag übersendet einen Nachtrag zu seiner in der Sitzung vom 13. Februar l. J. vorgelegten Abhandlung: »Über die Entstehung der Röntgen'schen Strahlen und ihre photographische Wirkung«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung: »*Paraphytoptus*, eine neue Phytoptiden-Gattung.«

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über die analytische Form der concreten statistischen Massenerscheinungen«, von Dr. Ernst Blaschke, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.
2. »Berechnung des Umfanges der Ellipse«, von Herrn Theodor Schmidt, Ingenieur in Wien.

Das w. M. Herr Prof. Friedrich Brauer überreicht einen Bericht von Dr. Rudolf Sturany über die Mollusken I (Prosobranchier und Opisthobranchier; Scaphopoden; Lamellibranchier), welche anlässlich der österreichischen Tiefsee-Expeditionen S. M. Schiffes »Pola« 1890—1894 gedredscht wurden.

In Fig. 1 sind zur leichteren Orientirung auch die Umrisse der Lampe in der Weise sichtbar gemacht, dass dieselben in natürlicher Grösse auf der Originalplatte mit Tusche aufgezeichnet und nachher die Platte photographisch verkleinert wurde.

Auf den ersten Blick erkennt man aus Fig. 1, dass die neuen Strahlen nicht an der Glaswand und auch nicht an der scheibenförmigen Kathode *k* innerhalb der Lampe, sondern, wie dies oben in der Abhandlung angenommen wurde, am phosphorescirenden Schirme entstehen, welcher letztere innerhalb der Lampe durch einen dünnen, weissen Streifen gekennzeichnet ist. Dieses Schattenbild des Glimmerschirmes ist ausserhalb der Lampe etwas breiter und auf der Seite der phosphorescirenden Schichte etwas schärfer begrenzt als nach der entgegengesetzten Seite des Schirmes.

Die neuen Strahlen entstehen offenbar auf der mit phosphorescirender Substanz angestrichenen Seite des Glimmerschirmes, setzen aber denselben fast ungeschwächt durch und werden auf beiden Seiten des Schirmes fortgepflanzt. In der Mitte des Glimmerschirmes werden die Strahlen senkrecht zur Oberfläche desselben nahezu in paralleler Richtung ausgehen, wesshalb diese Lampe schärfere photographische Bilder liefert als sonstige Entladungsröhren. Am Rande des Schirmes divergiren die Strahlen, wie aus allen Figuren mehr weniger zu ersehen ist, ziemlich stark.

Es muss noch bemerkt werden, dass die Fig. 2 und 3 einen grösseren Unterschied in der Intensität der unsichtbaren Strahlung zeigen, als dies nach Fig. 1 zu erwarten war, weil die Versuchsbedingungen bei beiden Aufnahmen wahrscheinlich doch nicht die gleichen waren.

In Fig. 1 ist bei *b* ein kleiner, schwarzer Fleck zu sehen, welcher desshalb entstand, weil kleine Stückchen Schwefelcalcium an der Glaswand hafteten und die unsichtbaren Strahlen aussendeten.

Auffallend ist in derselben Figur der verhältnissmässig grosse und intensiv schwarze Fleck an der Eintrittstelle der Kathode *k* der Lampe, den man auf den ersten Blick versucht wäre, als Beweis dafür gelten zu lassen, dass die neuen

Strahlen auch ausserhalb des Glasgefässes entstehen können. — Wäre diese Annahme richtig, so könnte weiter gefolgert werden, dass die neuen Strahlen auch ohne Kathodenlampen entstehen könnten.

Um dies festzustellen, wurde ein Versuch auf folgende Weise angestellt. Auf eine als Anode verwendete Metallplatte wurde eine in Handschuhleder eingewickelte photographische Platte gelegt und oberhalb derselben eine gegen die Platten senkrecht gerichtete metallische Spitze, die als Kathode benützt wurde, in einer solchen Entfernung aufgestellt, dass beim Einschalten des hochgespannten Stromes sogenannte stille Entladungen entstanden.

In dieser Weise wurde nach einer Expositionsdauer von 5 Minuten das in Fig. 5 in natürlicher Grösse reproducirte positive Bild erhalten, welches an einer Stelle dendritische Verzweigungen, ähnlich denen der Lichtenberg'schen Figuren, zeigt.

Um eine grössere strahlende Fläche zu bekommen, wurde statt der Spitze als Kathode eine Glimmerscheibe verwendet, in deren Mitte der Zuleitungsdraht mittelst Siegellack angekittet war. Die Versuche lieferten nach einer Expositionsdauer von etwa 10 Minuten die in Fig. 6, 7 und 8 reproducirten Bilder.

Bei zwei Versuchen wurden auf die photographische Platte kleine metallische Gegenstände gelegt, in der Erwartung, dass dieselben auf der Platte abphotographirt werden. Die in Fig. 9 und 10 reproducirten Bilder zeigen jedoch keine Spur von einem Schattenbilde, welcher Umstand dafür spricht, dass bei den angeführten Versuchen und wahrscheinlich auch bei dem in Fig. 1 reproducirten Bilde die Schwärzung der photographischen Platte an der Eintrittstelle der Kathode *k* nicht durch die Röntgen'schen Strahlen, sondern auf elektrolytischem Wege, entstand, indem die Emulse der photographischen Platte durch den Strom der stillen elektrischen Entladung zersetzt wurde.







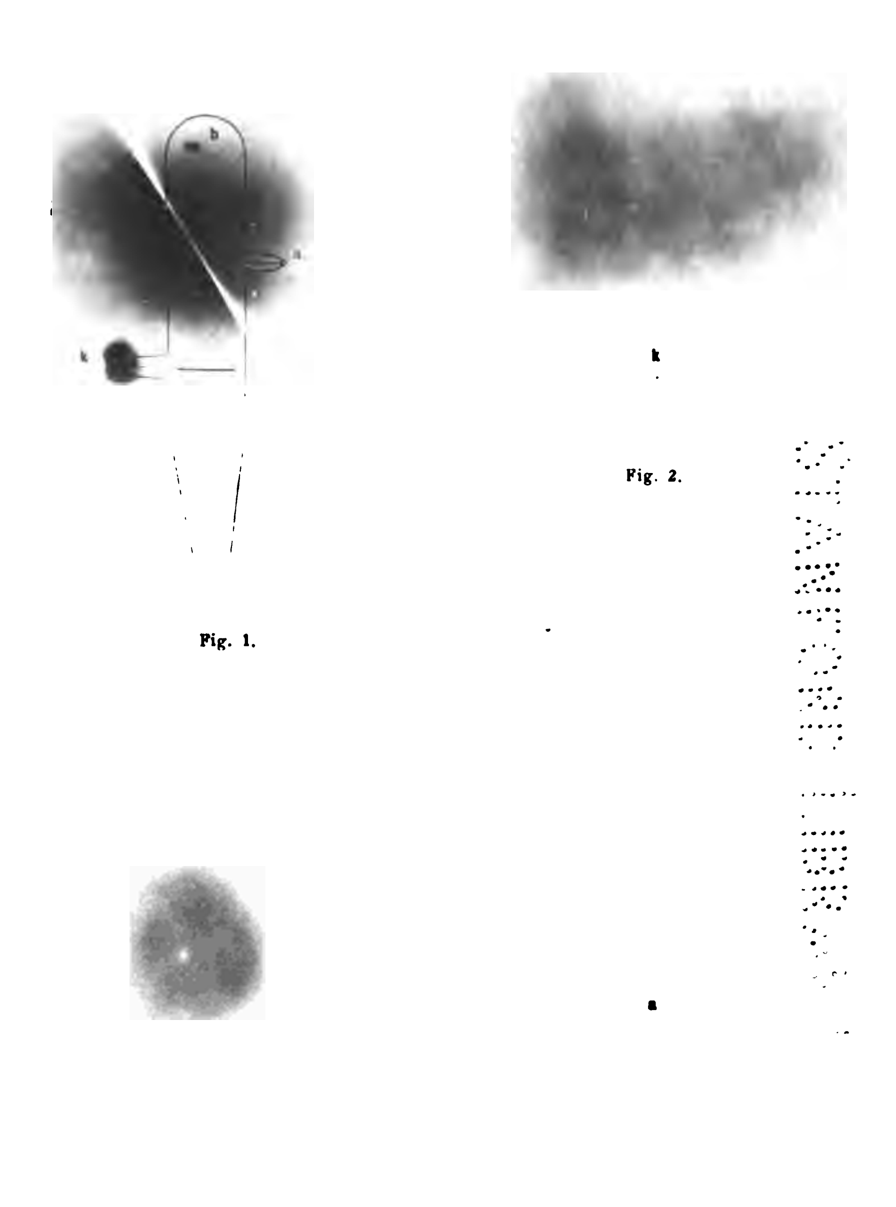


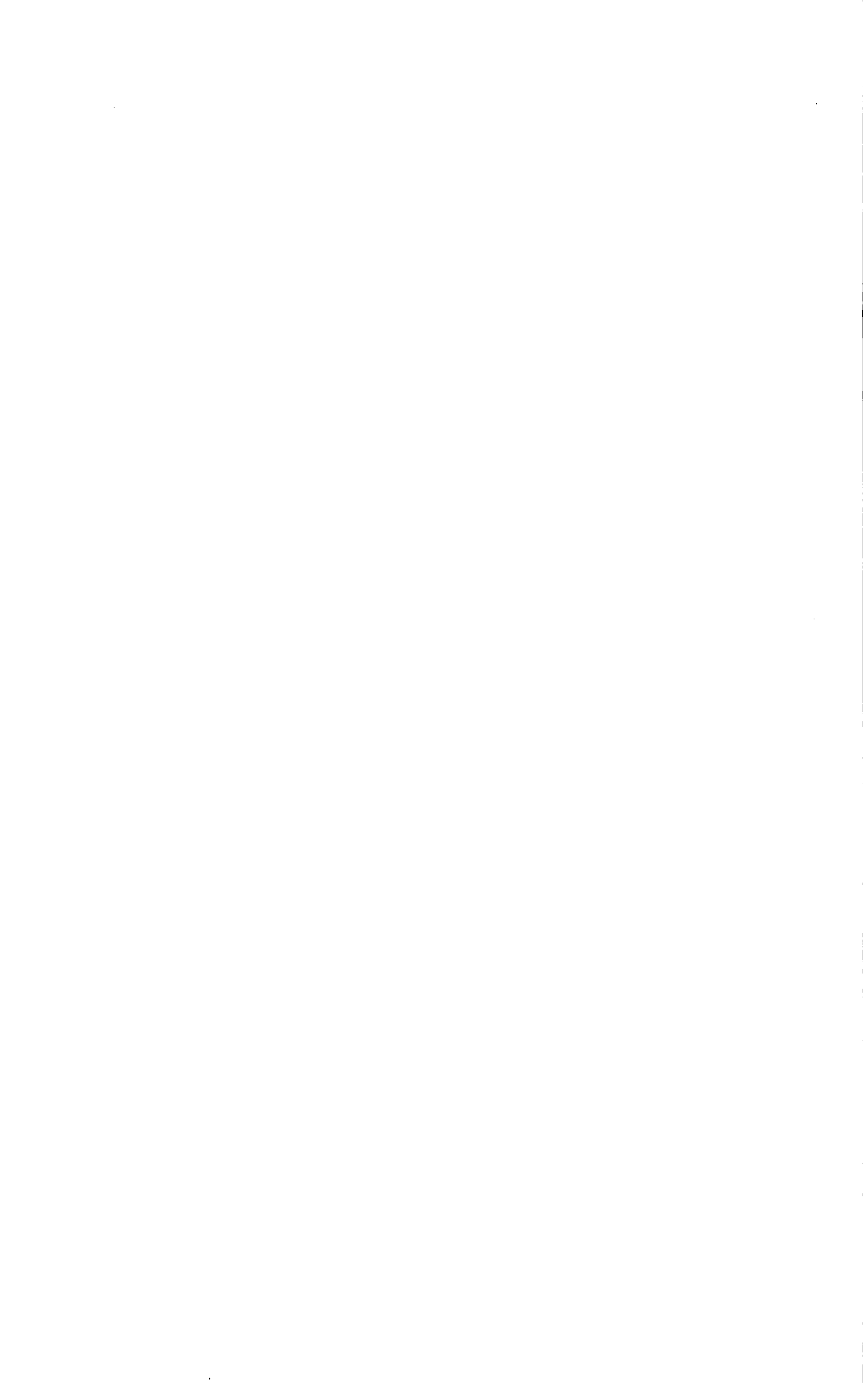
Fig. 1.

Fig. 2.

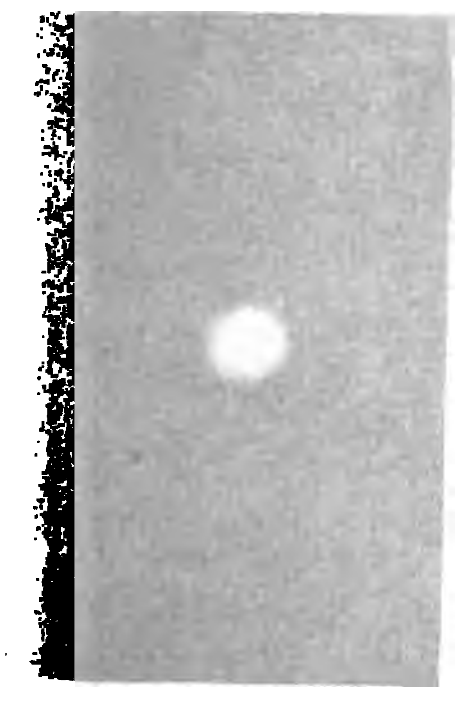
Fig. 4.

Fig. 3.

Lichtdruck v. M. Jaffé, Wien.









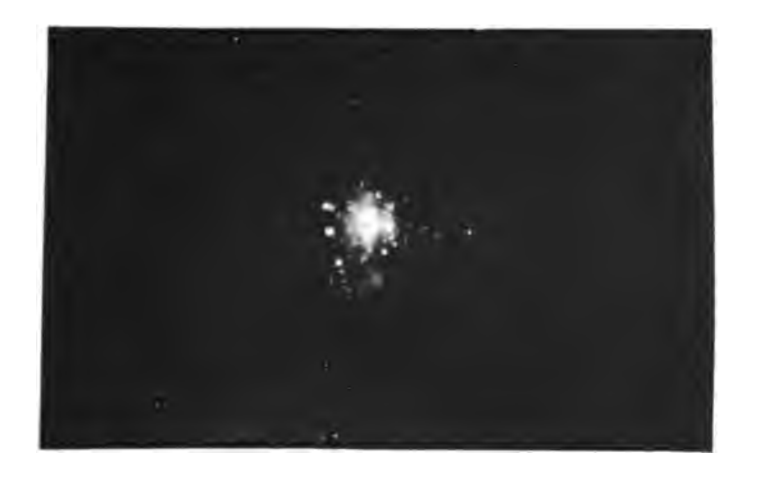


Fig. 5.

Fig. 7.

Fig. 8

Lichtdruck v. M. Jaffé, Wien.

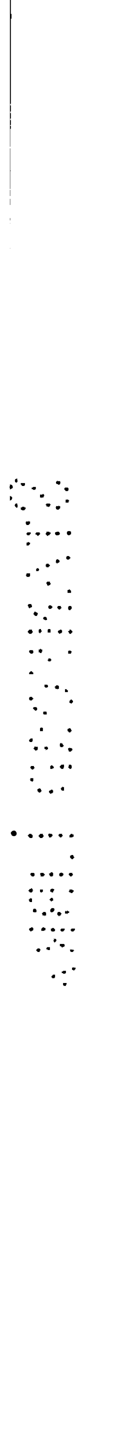




Fig. 9.



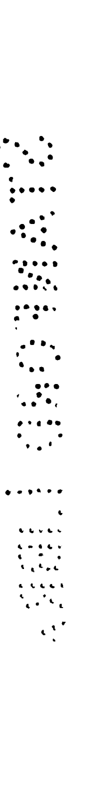


Fig. 10.



Fig. 6.

Lichtdruck v. M. Jaffé, Wien.



VIII. SITZUNG VOM 12. MÄRZ 1896.

Das c. M. Herr Prof. G. Goldschmiedt übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von Prof. Dr. Karl Brunner, betitelt: »Eine Indoliumbase und ihr Indolinon«.

Herr Hugo Zukal in Wien übersendet eine III. Abhandlung (Schluss) seiner Arbeit: »Morphologische und biologische Untersuchungen über die Flechten«.

Der Secretär bringt den wesentlichen Inhalt einer brieflichen Mittheilung zur Kenntniss, welche von dem wissenschaftlichen Leiter der Expedition S. M. Schiffes »Pola« im Rothen Meere, Herrn Hofrath Director F. Steindachner, w. M., aus Suez eingelangt ist.

IX. SITZUNG VOM 19. MÄRZ 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 104, Abth. I, Heft X (December 1895).

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt als Fortsetzung seiner Mondarbeiten zehn weitere photographische Mondvergrösserungen nach den neuesten Aufnahmen der Lick-Sternwarte.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien übersendet eine in Gemeinschaft mit Herrn stud. phil. E. Haschek ausgeführte Arbeit: »Über die ultravioletten Funkenspectren der Elemente« (II. Mittheilung).

Das c. M. Herr Prof. Zd. H. Skraup übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Institut der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. Hugo Schrötter: »Beiträge zur Kenntniss der Albumosen» (III. Mittheilung).

Herr Prof. Dr. Ph. Knoll übersendet eine Abhandlung: »Über die Blutkörperchen bei wechselwarmen Wirbelthieren«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium von Herrn Ludwig Braun: »Über die Einwirkung von Isobutyraldehyd auf Malon- und Cyanessigsäure«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

1. »Über eine Isomerie beim Acetylaurin«, von Dr. J. Herzig.
2. »Über den Abbau einiger Säureamide«, von H. Weidel und E. Roithner.

Herr Adalbert Prey, stud. philos. in Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über Gestalt und Lage der Milchstrasse«

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. IV. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

X. SITZUNG VOM 16. APRIL 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 104, Abth. II. a, Heft IX—X (November bis December 1895) und Abth. II. b, Heft IX—X (November—December 1895), womit nun der Druck dieses Bandes in allen Abtheilungen vollendet ist. Ferner ist erschienen: Bd. 105, Abth. I—II (Jänner—Februar 1896).

Das Comité für die Stiftung einer Erinnerungs-Medaille zur siebzigsten Geburtstagsfeier Julius Thomsen's in Kopenhagen übermittelt der kaiserlichen Akademie ein Exemplar dieser Medaille in Bronze.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, dankt für die ihm zum Abschlusse seines Unternehmens, auf Grund der Negative von Mondphotographien der Lick-Sternwarte einen Mondatlas herzustellen, von der kaiserlichen Akademie gewährte Subvention.

Das w. M. Herr Prof. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Dreitheiliger Halbschatten-Polarisator«.

Das c. M. Prof. Dr. R. v. Wettstein übersendet eine im botanischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit von stud. med. G. W. Maly: »Untersuchungen über Verwachsungen und Spaltungen von Blumenblättern«.

Der Secretär legt eine Abhandlung des Herrn J. Sobotka, Supplent an der k. k. Staatsrealschule im IV. Bezirke Wien, vor, betitelt: »Einige Constructionen der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen«.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Prof. am k. k. Elisabeth-Gymnasium im V. Bezirke in Wien, übersendet eine vorläufige Mittheilung über »Neue Gallmilben« (13. Fortsetzung).

Herr Prof. Max Rosenfeld an der k. k. Staatsrealschule in Teschen übersendet folgende Mittheilung: »Über die Abkürzung der Expositionszeit bei der Erzeugung von Photographien mit Röntgen-Strahlen«.

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Julius A. Reich, Chemiker in Wien, vor, welches die Aufschrift führt: »Beschreibung der Darstellung einer Reihe neuer Verbindungen nach einem neuen Verfahren«.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Kerner v. Marilaun überreicht eine Abhandlung vom stud. phil. August Ginzberger in Wien: »Über einige *Lathyrus*-Arten aus der Section *Eulathyrus* und ihre geographische Verbreitung«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang legt eine Abhandlung des Prof. Müller-Erzbach in Bremen vor, mit dem Titel: »Neue Versuche über die Fernwirkung der Adsorptionskraft und ihre Abnahme bei zunehmender Dicke der adsorbirten Schichten«.

Herr Hofrath v. Lang übergibt ferner eine für die Sitzungsberichte bestimmte Fortsetzung seiner »Versuche über Interferenz elektrischer Wellen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien von Herrn Johann Heilpern ausgeführte Arbeit: »Über das sogenannte Carbothiacetonin«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit von Herrn Georg Gregor aus dem Universitätslaboratorium in Czernowitz: »Zur Constitution der Monoäthyl-β-Resorcylsäure«.

Herr Dr. Hans Meyer, Assistent bei der Lehrkanzel für analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien überreicht eine Arbeit: »Über Anemonin« (I. Mittheilung).

Interferenzversuch mit elektrischen Wellen

(II. Mittheilung)

von

Viktor von Lang,

w. M. k. Akad.

I.

Der in der ersten Mittheilung[1] beschriebene Interferenzapparat gestattete auch die Bestimmung der Brechungsquotienten fester Körper für elektrische Wellen. Er eignet sich aber wegen des runden Querschnittes der horizontal liegenden Röhren nicht gut zur Untersuchung von Flüssigkeiten. Ich habe nun einen neuen Apparat gebaut, bei welchem die beiden Theilwellen Röhren von quadratischem Querschnitte durchlaufen, und welcher im Gegensatze zu dem ersten Apparat nur aus Metall verfertigt ist.

Wie in der ersten Mittheilung sollen die beiden ausziehbaren U-förmigen Röhren mit E und F bezeichnet werden, die Röhren aber, aus welchen die Schenkel der beiden U-Röhren herausgezogen werden können, sollen entsprechend E_1, E_2 und F_1, F_2 heissen. Bei der ersten Form des neuen Apparates waren die Röhren E_1 und F_1, sowie E_2 und F_2 aus einem Stück und bildeten so zwei 500 *mm* lange Canäle, die an den Enden durch die Röhren E und F verbunden waren, in ihren Mitten aber Röhren C und H für den Eintritt und Austritt der elektrischen Wellen trugen. Mit dieser Anordnung konnten jedoch keine befriedigenden Resultate erhalten werden und eine Interferenz war damit nicht überzeugend nachzuweisen. Die Sache wurde

[1] Wr. Sitzungsber., Bd. 104, II. a. (1895), S. 980. Wied. Annalen Bd. 57, S. 430.

erst besser, als ich an den Kreuzungsstellen der Röhren E_1CF_1 und $E_2H_2F_2$ würfelförmige Räume D, G einsetzte, wie dies im ursprünglichen Apparate zufällig von vornherein schon so gemacht worden war. Nach dieser Verbesserung war aber auch kein wesentlicher Unterschied zwischen dem alten und neuen Apparat zu bemerken.

Über die Dimensionen des neuen Apparates bemerke ich zuerst, dass der innere Querschnitt der U-Röhren E und F, welche, sowie die Röhren E_1, E_2, F_1, F_2 aus 0·3 *mm* starkem Zinkblech gebildet sind, 49·5 mm^2 beträgt. Dieser Querschnitt wurde aber durch Zinkrahmen bis auf 40·5 mm^2 abgeblendet, um zu hindern, dass zwischen den in diese Röhren eingefügten festen Körpern oder Flüssigkeitstrogen und den Röhrenwänden Antheile der elektrischen Wellen hindurch gehen. Zu dem Zwecke sind an den vier Seiten der Rahmen Bleche angelöthet, welche gegen die Röhrenwände federn.

Die beiden Würfel sind aus 1·6 *mm* starkem Zinkblech, haben eine innere Seitenlänge von 97 *mm* und stehen mit ihren Mittelpunkten um 160 *mm* von einander ab.

Als sehr zweckmässig erwies sich wieder die Anwendung eines metallenen Diaphragmas, welches die elektrische Welle vor ihrer Zweitheilung passiren muss. Es liessen sich jedoch auch Stellungen der einzelnen Apparattheile gegeneinander auffinden, wo mit voller Öffnung, aber jedenfalls weniger gut gearbeitet werden konnte.

Die Röhrenleitung C vom Diaphragma bis zum Würfel D hat einen runden Querschnitt und ist durch ein ausziehbares Rohr von 52·7 *mm* Durchmesser gebildet, das in einem mit dem Würfel D verbundenen Rohrstutzen von 55·5 *mm* inneren Durchmesser steckt. Die Verbindung des Würfels G mit dem Cohererkasten J, die zur Fortleitung der wiedervereinigten Wellen dient, hat ebenfalls runden Querschnitt, aber einen etwas grösseren Durchmesser (58·5 *mm*), als hier die Verbindung über den Rohrstutzen des Würfels erfolgte, nicht wie in Fig. 1 der ersten Mittheilung.

Bei den meisten der nachfolgenden Versuche betrug die Entfernung von der Mitte des Würfels D bis zum Diaphragma 300 *mm*, von da bis zu den Erregerkugeln (A, A') 280 *mm*

Die runde Öffnung des Diaphragmas hatte 23 *mm* Durchmesser. Die ziemlich einflusslose Entfernung der Coherer's von der Mitte des zweiten Würfels *G* betrug 880 *mm*.

Als Erreger wurden die Kugeln von 24·4 *mm* Durchmesser benützt, dieselben standen im Petroleum um 0·65 *mm* von einander ab, ausserhalb aber um 9·5 *mm* von den Entladerkugeln (*B*, *B'*), welche einen Durchmesser von 38 *mm* haben. Die Erregung der Funken geschah wieder durch die 20 plattige Töpler'sche Influenzmaschine. Ich überzeugte mich aber, dass die Versuche auch mit verhältnissmässig kleinen Inductionsapparaten ausgeführt werden können.

Werden die U-Röhren bis zu den angelötheten Anschlägen hineingeschoben, so stehen sie in die Würfel hinein, da ihre Schenkel 223 *mm*, die Röhren E_1 . . . nur 200 *mm* lang sind. Aus diesem Grunde wurde ein- für allemal die Röhre *F* etwas herausgezogen und zwar gleich um 35 *mm*, um so auch die erste Verstärkung genau beobachten zu können. Es ergab sich, dass das Maximum der Verstärkung bei leerem Apparate dann eintritt, wenn das U-Rohr *E* um 35·4 *mm* herausgezogen ist.

Für die Wellenlänge der elektrischen Wellen wurde bei der angegebenen Anordnung der Werth 85·2 *mm* gefunden, gegenüber dem Werthe 82 *mm*, welcher mit dem früheren Apparate erhalten worden war. Die Versuche wurden aber damals nicht so oft wiederholt, da mit den Erregerkugeln von 24·4 *mm* Durchmesser keine weiteren Versuche ausgeführt worden waren. Vielleicht liegt aber die Ursache doch in den geänderten Dimensionen des neuen Apparates, auf welche Vermuthung leicht der früher angegebene räthselhafte Einfluss der Würfel *D*, *G* führt.

Möglicherweise, doch nicht wahrscheinlich ist auch die verschiedene Länge der Erregerfunken von Einfluss auf die Wellenlänge. Die Wellenlänge ist aber, wie ich mich überzeugt habe, unabhängig von der Länge der Stäbe, an denen die Entladerkugeln *B, B'* befestigt sind, und welche in eine Gerade fallen. Eine Verlängerung dieser Stäbe von 95 *mm* auf 295 *mm* durch angesetzte Röhren gab keinen Unterschied für die Wellenlänge.

Nach dem Vorhergehenden treten also für den blos Luft enthaltenden Apparat, wenn die eine U-Röhre auf 35·0 *mm* gestellt ist, die Verstärkungen (mit Sternchen bezeichnet) und Schwächungen der beiden Theilwellen ein für die folgenden Stellungen der anderen U-Röhre:

$$T_m = 35\cdot4^* \quad 56\cdot7 \quad 78\cdot0^* \quad 99\cdot3 \quad 120\cdot6^*.$$

Der angegebenen Wellenlänge entspricht eine Schwingungszahl $N = 3520\cdot 10^6$.

II.

Isotrope Körper. Die festen Körper, die ich mit dem neuen Apparate untersuchte, hatten jetzt die Gestalt rechtwinkeliger Parallelepipede, so dass sie den Querschnitt der U-Röhren möglichst ausfüllten. Sie wurden in den linken Schenkel der E-Röhre gegeben und dann die Beobachtungen wie früher ausgeführt. Es wurde nämlich diese Röhre von der Stellung $T = 20$ angefangen succesive um je 5 *mm* herausgezogen und dann die Bestrahlung vorgenommen. Nur die Ermittelung der Lage der Maxima und Minima der vereinigten Welle aus den Beobachtungen geschah meist auf etwas kürzere Weise.

Zuerst wurden allerdings wieder die Stellungen T des U-Rohres und die zugehörigen Galvanometer-Ausschläge S_2 als Abscissen und Ordinaten auf Millimeterpapier aufgetragen, dann aber wurden an die so bestimmten Punkte Schablonen von Wellenlinien angelegt, die auf gleichem Papier mit der bekannten Wellenlänge (85·2 *mm*) und mit verschiedenen gleichen oder abnehmenden Amplituden construirt und ausgeschnitten worden waren. Es handelte sich nun darum, die Schablone auszuwählen, welche sich am besten den Beobachtungspunkten anschliesst und dann die Lage eines Maximums oder Minimums der Schablone auf dem Millimeterpapier abzulesen. Diese Zahl abgezogen von der betreffenden der früher für T_m gegebenen Zahlen, gibt sogleich die Verschiebung der Röhre E, welche nach Einschaltung des Körpers nöthig ist, um für die beiden Theilwellen wieder den ursprünglichen Wegunterschied herzustellen.

Im Nachfolgenden wollen wir die Dimension des untersuchten Körpers, längs welcher die eine elektrische Theilwelle denselben durchläuft, immer als Dicke bezeichnen, wenn sie auch grösser als die dazu senkrechte Dimension ist.

Paraffin. Eine Versuchsreihe mit einem 62 *mm* dicken Parallelepepid gab den Brechungsquotienten $n = 1 \cdot 71$; der alte Apparat hatte Werthe von $1 \cdot 65 - 1 \cdot 73$ gegeben.

Hartgummi. Untersucht wurden drei Platten. Die erste, 4·8 *mm* dick, gab als Mittel dreier Beobachtungsreihen $n = 2 \cdot 21$, die zweite Platte, 7·8 *mm* dick, gab aus zwei Reihen $n = 2 \cdot 24$, und die dritte, 13·5 *mm* dicke Platte als Mittel zweier Beobachtungsreihen $n = 2 \cdot 00$. Die letzte Platte wurde später beiderseits abgeschmirgelt, um die Politur an den beiden Endflächen zu entfernen. Die Dicke wurde hiedurch nicht bemerklich geändert, für den Brechungsquotient wurde aber nahezu derselbe Werth 1·98 wie früher gefunden.

Setzen wir im Mittel $n = 2 \cdot 15$, so wird die Diëlektricitätsconstante desselben $D.\, E. = n^2 = 3 \cdot 5$. Die von Anderen[1] gefundenen Werthe schwanken zwischen 2·08 und 3·48.

Steinsalz. Die erste der beiden untersuchten Platten war 11·4 *mm* dick und gab als Mittel von vier Beobachtungsreihen $n = 3 \cdot 07$, die zweite Platte, 34·1 *mm* dick, gab aus drei Reihen $n = 3 \cdot 02$.

Setzen wir $n = 3 \cdot 05$, so wird $D.\, E. = 9 \cdot 3$. Die neuesten Versuche von Thwing[2] geben hiefür 5·81, während nach Curie $D.\, E. = 5 \cdot 85$, nach Hopkinson 18 ist.

Spiegelglas. Mit einer 5·7 *mm* dicken Platte wurden zwei Beobachtungsreihen ausgeführt und im Mittel $n = 3 \cdot 42$ gefunden. Dementsprechend ist $D.\, E. = 11 \cdot 7$, während die bisherigen Beobachtungen zwischen 5·8 und 7·57 schwanken.

III.

Flüssigkeiten. Die Gefässe, in denen die Flüssigkeiten untersucht wurden, hatten natürlich auch die Gestalt recht-

[1] Siehe A. Winkelmann, Handbuch der Physik, 3. Bd., 1. Abthg. (1893), S. 72 u. ff.

[2] Ch. B. Thwing, Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 14 (1894), S. 300.

winkeliger Parallelepipede; sie waren oben offen und aus $^1/_4$ *mm* starkem Carton hergestellt. Hiebei wurden die drei aus einem Stück Carton gebogenen Seitenwände länger gelassen als der eigentliche Trog, damit die beiden Stirnflächen durch drei nach aussen stehende Lappen angeleimt werden konnten. Um den Trog flüssigkeitsdicht zu machen, wurde er inwendig je nach der Natur der zu untersuchenden Flüssigkeit mit Tischlerleim oder mit Paraffin überzogen.

Der gefüllte Trog wurde wieder in den linken Schenkel der U-Röhre E gebracht, indem zuerst der früher erwähnte Rahmen wie bei allen Beobachtungen eingesetzt worden war. Um die Wirkung des Troges selbst nicht in Rechnung ziehen zu müssen, wurde auch symmetrisch in die andere U-Röhre F ein gleicher, aber leerer Trog nebst dem Metallrahmen eingefügt. Die Untersuchung der zwei nächstfolgenden Flüssigkeiten bot auch keine Schwierigkeiten.

Terpentinöl. Es wurde mit drei verschiedenen Trogen operirt und beziehungsweise 3, 2 und 2 Beobachtungsreihen angestellt. Die erhaltenen Resultate sind

Trogdicke $= 25 \cdot 5$ *mm* $\quad n = 1 \cdot 71$
» $\quad = 31 \cdot 0 \quad n = 1 \cdot 74$
» $\quad = 32 \cdot 5 \quad n = 1 \cdot 76$

Im Mittel ist also $n = 1 \cdot 74$ und $D. E. = 3 \cdot 0$, Thwing gibt hiefür $2 \cdot 28$, während die älteren Beobachtungen zwischen $2 \cdot 187$ und $2 \cdot 27$ schwanken.

Benzol. Gewöhnliches Benzol gab in einem Troge von 38 *mm* Dicke untersucht als Mittel zweier Beobachtungsreihen $n = 2 \cdot 09$. Dagegen gab eine Probe, die als »reinstes Benzol« bezogen war, in einem Troge von $25 \cdot 5$ *mm* Dicke als Mittel dreier Beobachtungsreihen $1 \cdot 86$ und in einem $69 \cdot 5$ *mm* dicken Troge allerdings nur aus einer Beobachtungsreihe $n = 1 \cdot 83$. Nehmen wir das Mittel der beiden letzten Bestimmungen $n = 1 \cdot 85$, so wird $D. E. = 3 \cdot 4$.

Dasselbe »reinste« Benzol war schon früher in Professor F. Exner's Laboratorium auf seine $D. E.$ nach einer statischen Methode untersucht worden und hiefür bei einer Temperatur von 23° C. $D. E. = 2 \cdot 115$ gefunden worden.

Für Benzol gelten ausserdem folgende Bestimmungen mit Wechselzahlen

N sehr klein	$D. E. = 2\cdot251$	Nernst[1]
$N = 400.10^6$	$D. E. = 2\cdot262$	Drude.[2]

Glycerin. Hier war die Bestimmung des Brechungsquotienten schon schwieriger und es gelang nur bei bedeutender Reduction der Trogdicke Interferenzen der beiden Theilwellen nachzuweisen. Bei den folgenden zwei Beobachtungen, jede das Mittel aus zwei Reihen, konnten jedoch noch zwei Verstärkungen mit Sicherheit nachgewiesen werden. Es wurde gefunden

Trogdicke	$= 3\cdot1\,mm$	$n = 3\cdot84$
»	$= 5\cdot4$	$n = 3\cdot67$

Das Mittel dieser Zahlen, $n = 3\cdot74$, gibt die $D.E. = 14\cdot0$. Es ist dies der einzige Fall, wo ich eine kleinere $D. E.$ fand als frühere Beobachter, aber gerade für Glycerin findet nach Drude anormale Dispersion der elektrischen Wellen statt, welche Erscheinung von Drude noch für Aethyl- und Amylalkohol und für Essigsäure nachgewiesen wurde. Nach der von Drude gegebenen Tafel hat man für Glycerin

$10^{-6}.N =$	$D.E. =$	
25	$56\cdot2$	Thwing
150	$39\cdot1$	Drude
400	$25\cdot4$	»
3520	$14\cdot1$	Lang.

Wasser. Der Brechungsquotient des Wassers für elektrische Wellen ist nach der hier gegebenen Methode nicht mehr mit Sicherheit zu bestimmen. Wenn die Wasserschichte etwas bedeutender ist, so geht von der betreffenden Theilwelle nichts mehr hindurch. Mit einem Troge von nur $2\cdot5\,mm$ Dicke konnten allerdings zwei Schwächungen und die dazwischen liegende Verstärkung ganz unzweifelhaft nachgewiesen werden, allein die exacte Lage des Maximums war, obwohl zwei Beobachtungsreihen ausgeführt worden waren, nicht genau zu

[1] W. Nernst, Zeitschrift für phys. Chemie, Bd. 14 (1894), S. 622.

[2] P. Drude, Abh. der mathem.-physischen Classe der k. sächs. Ges. der Wiss., Bd. 29 (1896), S. 1.

bestimmen, was bei der geringen Dicke des Troges natürlich gleich beträchtliche Abweichungen verursacht. Es wurde beiläufig eine Verschiebung von 10·5 *mm* beobachtet, was einem Brechungsquotienten $n = 9 \cdot 4$ entspricht.

Mit einem zweiten Troge von 3·1 *mm* Dicke wurde nur eine Schwächung und Verstärkung constatirt. Die Verschiebung betrug allerdings mehr als in dem vorhergehenden Versuche, konnte aber auch nicht mit Sicherheit bestimmt werden. Die Versuche mit Wasser wurden in Folge dessen auch nicht fortgesetzt.

IV.

Doppelbrechung des Holzes. Die durch den leeren Interferenz-Apparat hindurchgegangenen zwei Theilwellen sind vollkommen polarisirt, was leicht mit einem Metallgitter nachgewiesen werden kann, das vor das Diaphragma gestellt wird. Hiezu wurde ein Gitter benützt aus Kupferdrähten, die 0·7 *mm* dick waren und mit ihren Axen um 6·4 *mm* abstanden. In verticaler Stellung hat dieses Gitter gar keinen Einfluss, dagegen vernichtet es in horizontaler Lage vollkommen die Wirkung des Erregers auf den Coherer.

Jedesfalls sind schon die vom Erreger ausgesandten Wellen in demselben Sinne polarisirt, wie sie es vollständiger beim Durchgange durch den Apparat werden. Allein das angegebene Gitter genügt nicht, wenn wir nach Hinwegnahme des eigentlichen Interferenz-Apparates die ursprüngliche Polarisation nachweisen wollen. Dieses Gitter stört in keiner Lage die Wirkung des Erregers auf den Coherer. Auch zwei gleiche Gitter, die gekreuzt sind, zeigen keinen Einfluss. Der Nachweis dieser Polarisation gelang erst mit einem Gitter, das aus halben Stricknadeln von 0·7 *mm* Dicke im Abstande von 3·1 *mm* angefertigt worden war. Dabei musste dieses Gitter aber vollkommen elektricitätsdicht mit dem Kasten *J*, welcher den Coherer enthält, verbunden sein. Zu dem Zwecke war es auf ein Stück Pappe von 145 mm^2 befestigt, welches wieder an ein Rohr von Pappe geleimt war. Dieses Rohr passte sehr streng in das vordere Rohr des Kasten *J*, und war natürlich so wie das quadratische Stück Pappe mit Stanniol überzogen.

Gab man in das Papprohr hinter dem Gitter ausserdem noch ein Diaphragma, so konnte man deutlich die verschiedene Wirkung des Erregers bei horizontaler und verticaler Lage des Gitters beobachten. Mit einem Diaphragma von 20 *mm* Durchmesser ging bei horizontaler Stellung fast gar nichts mehr hindurch, während bei verticaler Stellung des Gitters die Wirkung auf den Erreger eine sehr kräftige war.

Die Polarisation der ursprünglichen Welle ist offenbar auch die Ursache, dass der beschriebene Interferenzversuch nicht gelingt, wenn der eigentliche Interferenz-Apparat um eine horizontale Axe so gedreht wird, dass die beiden U-Röhren vertical stehen. Das Experiment wurde schon mit dem ursprünglichen Apparate ausgeführt.

Fichtenholz. Das angewandte Parallelepiped war 30·6 *mm* dick und aus einem grösseren Stück Fichtenholzes geschnitten, wobei seine Axe senkrecht auf den Längsfasern des Holzes stand. Dieses Parallelepiped wurde nun in die U-Röhre *E* gebracht, und zwar einmal so, dass die Fasern vertical, dann so, dass die Fasern horizontal standen. Für diese zwei Lagen wurde gefunden

Fasern vertical......... $n = 1·97$
» horizontal ...... $n' = 1·63$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen ist also wie schon Mack[1] und Righi beobachteten, verschieden, je nachdem sie parallel oder senkrecht zu den Fasern des Holzes schwingen. Der Unterschied der beiden Brechungsquotienten wurde noch direct bestimmt, indem auch in das andere U-Rohr *F* ein nahezu identisches Holzparallelepiped (31·0 *mm* dick) eingesetzt wurde, aber so, dass die Fasern die entgegengesetzte Stellung wie im ersten Holzstücke hatten. Nachdem hierauf die Lage der Verstärkungen und Schwächungen bestimmt worden war, wurden in beiden Röhren die Parallelepipede um 90° gedreht und wieder die Interferenz der beiden Welle beobachtet. Es ergab sich, dass die Maxima und Minima gegen früher um 12 *mm* verschoben sind, welcher Betrag der doppelten

[1] Mack, Wied. Anm., Bd. 54 (1895), S. 342.

Differenz der beiden Brechungsquotienten entspricht. Setzt man die Dicke beider Parallelepipede gleich (im Mittel 30·8 *mm*), so erhält man also für die Differenz der Brechungsquotienten nahezu wie früher 12/30·8 = 0·39.

Die angegebenen absoluten Werthe der Brechungsquotienten des Holzes haben sehr wenig Bedeutung, da sie ungeheuer von dem Feuchtigkeitszustande des Holzes abhängen. Diess zeigte sich bei verschiedenen Parallelepipeden, die ebenfalls aus demselben grösseren Stücke Holz, aber parallel zu den Fasern geschnitten worden waren. So gab ein 29·5 *mm* dickes Stück $n = 1·96$, während für ein nur 19·6 *mm* dickes Stück, welches offenbar schon mehr ausgetrocknet war, $n = 1·67$, gefunden wurde. Dieses Stück gab nämlich, nachdem es drei Stunden im Wasser gelegen, wodurch sein Gewicht von 20·7 *g* auf 24·8 *g* stieg, $n = 2·27$, während es wieder bis auf 20·0 *g* getrocknet, einen Brechungsquotienten $n = 1·62$ hatte.

Neue Versuche über die Fernwirkung der Adsorptionskraft und ihre Abnahme bei zunehmender Dicke der adsorbirten Schichten

von

W. Müller-Erzbach.

Die Adsorption kann unter Umständen erfolgen, welche deutlich beweisen, dass die molecularen Kraftstrahlen durch eine dem adsorbirenden Körper aufliegende Schicht eines fremden Stoffes hindurch sich noch wirksam zeigen können. Mit zunehmender Dicke der trennenden und die Bewegung fortpflanzenden Schicht verlieren sie dabei mehr und mehr von ihrer Energie, bis dieselbe schliesslich nicht mehr zu erkennen ist. Durch Anwendung geeigneter Stoffe gelang es, diesen Vorgang genau und überraschend deutlich in der angegebenen Weise zu beobachten, so dass dadurch ein unbedingter Beweis für die Fernwirkung einer Molecularkraft gewonnen wurde.

Die bezüglichen Versuche sind vorwiegend mit Eisenoxyd ausgeführt, welches durch schwaches Erhitzen seiner Verbindung mit Wasser gewonnen war. Dasselbe zeigt dem Dampfe von Schwefelkohlenstoff gegenüber ein ausserordentlich starkes Adsorptionsvermögen und kann bei Temperaturen von 8° bis etwa 14° über 35 Procent seines eigenen Gewichts von jenem Dampfe aufnehmen. Der Schwefelkohlenstoff haftet nachher an der Oberfläche des Eisenoxyds und scheidet sich in Form von dicken Tropfen[1] ab, wenn man das mit ihm beladene Oxyd in Wasser wirft. Als trennende Schicht war ein Stoff ausfindig

[1] Verhandl. phys. Ges. Berlin, 1885, S. 32.

zu machen, der sich einerseits an das Eisenoxyd leicht anlegt und anderseits zu Schwefelkohlenstoff sich indifferent erweist. Er muss die Bewegung der molecularen Energie übertragen, ohne für sich allein eine solche Energie zu dem ihn berührenden Gase zu besitzen. Die gewünschten Eigenschaften fand ich im Wasser und ebenso im Glycerin. Beide benetzen Eisenoxyd, während sie Schwefelkohlenstoff nicht absorbiren und überhaupt nicht verändern.

Das Eisenoxyd wurde in kurzen Probirgläsern von 70 *mm* Länge und 22 *mm* innerer Weite innerhalb einer Standflasche mit einer Atmosphäre von Luft und Schwefelkohlenstoffdampf in Berührung gebracht. Sein Gewicht war in Parallelversuchen fast ganz gleich und wechselte überhaupt in den Grenzen von 1·75 und 2·3 *g*. Ohne Behinderung durch einen aufliegenden Stoff, also bei directer Berührung, nahmen 1·752 *g* des, wie bemerkt, schwach erhitzten Oxyds in dem Probirglase in 40 Minuten bei 16°4 64 *mg* Schwefelkohlenstoff auf. Nach 24 Stunden waren es bei etwas sinkender Temperatur 21·8 Procent und wieder 48 Stunden später über 30 Procent geworden. Als in einem anderen Falle die Temperatur nur 8° bis 10° betrug, zeigte das Eisenoxyd nach 24 Stunden schon eine Gewichtszunahme von annähernd 30 Procent. Beim völligen Ausschluss von Wasserdampf war die Zunahme in einem Falle etwas grösser, in einem anderen kaum verändert. Durch einstündiges stärkeres Erhitzen des Oxyds wurde die Adhäsion des Schwefelkohlenstoffs bedeutend abgeschwächt, so dass sich am ersten Tage nur 13 Procent und im Ganzen nicht über $23^1/_2$ Procent desselben auf dem Eisenoxyd niederschlugen. Der letztere Versuch wurde auf 42 Tage ausgedehnt, doch konnte nach dem zehnten Tage keine grössere Gewichtsveränderung mehr bemerkt werden. Kleinere Veränderungen zeigen sich andauernd nach den Schwankungen der Temperatur.

Wurde das Eisenoxyd mit 9·1 Procent seines Gewichtes Wasser in einer Reibschale innig verrieben, so war seine Adsorptionskraft unverkennbar abgeschwächt, denn es nahm jetzt bei Temperaturen zwischen 13° und 14° in 21 Stunden nur 10·1 Procent an Schwefelkohlenstoff auf. Durch weiteres Verreiben mit Wasser bis zu 14·2 Procent wurde die Aufnahme

von Schwefelkohlenstoff in 21 Stunden unter ganz gleichen Umständen auf 5·9 Procent vom Gewicht des ursprünglichen Eisenoxyds vermindert. Als ich aber den Procentsatz des beigemengten Wassers auf 39·7 gesteigert hatte, so dass beim Verreiben ein dunkelbraunes Pulver entstand, war die Eigenschaft des Eisenoxyds, Schwefelkohlenstoff zu binden, völlig verschwunden und das Gewicht des Probirglases blieb in der Atmosphäre jenes Dampfes stundenlang unverändert. Eine gleich nach dem Herausnehmen vorhandene Zunahme von einigen Milligrammen rührte von dem in der Röhre in gasförmigem Zustande befindlichen Schwefelkohlenstoff her und war durch Einblasen von Luft sofort zu beseitigen. Durch Verdunsten des beigemengten Wassers konnte das Eisenoxyd leicht an einzelnen Stellen ganz entblösst werden, so dass hier die unmittelbare Berührung des Schwefelkohlenstoffs ermöglicht wurde. Und in der That nahm ein solches Gemenge von 31·7 Procent Wasser aus einer schwefelkohlenstoffhaltigen Atmosphäre in 6 Stunden einige Milligramme auf. Von neuem derselben Atmosphäre stundenlang ausgesetzt zeigte es fast genau die frühere Gewichtszunahme, aber der an der Luft schnell verdunstende Schwefelkohlenstoff liess jetzt in dem Probirglase einen gegen den anfänglichen um 9 *mg* leichteren Rückstand zurück. Durch die längere Einwirkung war also etwas Wasser (0·57 Procent) durch Schwefelkohlenstoff verdrängt und es waren von diesem im Ganzen 1·4 Procent vom Gewichte des Eisenoxyds adsorbirt. Nachdem das Wasser noch etwas weiter bis zu 26·9 Procent des Oxyds verdunstet war, wurde es durch längeres Reiben wieder möglichst gleichmässig vertheilt, und thatsächlich bedeckte es das Eisenoxyd nachher so vollständig, dass dasselbe zwei Stunden lang in der Atmosphäre des Schwefelkohlenstoffs keine Veränderung erlitt. Erwägt man demgegenüber, dass dasselbe Eisenoxyd unbedeckt in den ersten 40 Minuten 64 *mg* Schwefelkohlenstoff aufnimmt, so bleibt kein Zweifel darüber, dass seine Adsorptionskraft über die ihm aufliegende Schicht von 26·9 Procent Wasser hinaus nicht mehr wirksam ist. Bei 14·2 Procent Wasser war sie noch ganz erheblich, aber engere Grenzen für ihre Wirkungsweite durch das Wasser hindurch sind bisher

nicht festgestellt, und so ist auch die sich anschliessende weitere Frage nicht näher beantwortet, wie der Radius der Wirkungssphäre durch die Wasserbedeckung im Vergleiche zu der Bedeckung durch Schwefelkohlenstoff sich ändert. Nach dem Verhältnisse der specifischen Gewichte hätte man ohne Berücksichtigung der Contraction auf dem Eisenoxyd für 26·9 Procent Wasser 33·6 Procent Schwefelkohlenstoff als diejenige Menge anzusehen, welche das Oxyd in gleicher Höhe bedeckt. Von vornherein erscheint es mir wahrscheinlich, dass die Kraftstrahlen beim Eintritt in ein neues Medium je nach dessen Natur an Energie verlieren, aber bis jetzt habe ich Genaueres darüber nicht festgestellt.

Alle Versuche, das Eisenoxyd mit Schichten von Chlorkalium, Salpeter, Jodkalium oder Chlorcalcium zu bedecken und dadurch unwirksam zu machen, blieben erfolglos. Die dazu benutzten wässerigen Lösungen der Salze wurden auf dem Oxyd vorsichtig verdampft, so dass alles Wasser entfernt war; aber die Flüssigkeitshaut wird dabei jedenfalls zuletzt zerrissen und eine vollständige Bedeckung des Oxyds verhindert.

So erschien die Menge des später adsorbirten Schwefelkohlenstoffs zwar vermindert, aber trotz hoher Procentsätze an vorhandenen Salzen blieb sie stets noch ziemlich beträchtlich. Erst wenn durch Condensation das trockene Gemenge befeuchtet oder von der Lösung nicht alles Wasser verdunstet wurde, dann erschien sofort die Adhäsion des Schwefelkohlenstoffs bedeutend vermindert. So nahm Eisenoxyd mit 20·4 Procent Wasser und 15·1 Procent Jodkalium in 19 Stunden nur 12 *mg* oder 0·54 Procent Schwefelkohlenstoff auf und in ähnlicher Weise erwiesen sich 13 Procent Wasser mit 18·2 Procent Chlorcalcium bereits stark hinderlich.

Schwer flüchtiges Petroleum oder Mandelöl, welche an sich den Schwefelkohlenstoffdampf auflösen, behielten diese Eigenschaft auch in dünnen Schichten über Eisenoxyd und veranlassten in kurzer Zeit sehr bedeutende Ablagerungen des Dampfes. Dagegen erwies sich wieder Glycerin als geeignet, das Oxyd vom Schwefelkohlenstoff zu trennen, weil es für sich durch denselben keinerlei Veränderungen erleidet. Es wurde

wie das Wasser durch längeres Verreiben möglichst gleichmässig über das schwach erhitzte Eisenoxyd ausgebreitet und zeigte dann das folgende Verhalten.

Procente an Glycerin	Temperatur (annähernd)	Versuchsdauer.	Die sich folgenden Gewichtszunahmen nach Procenten vom Gewichte des Eisenoxyds	Im Ganzen aufgenommen
14·8	15°5	4·1 Stunden	4·7 (84 *mg*)	
16·4	14°—15°4	19 »	10·1	
21·7	14°4—16°1	2 1/3 »	1·17	
	—	49 » (nachher)	10·4	11·6
	—	21 » »	2·6	14·2
	14°2—16°0	50 » »	3·2	17·4
	12°8—14°2	48 » »	1·4	18·8
25·2	14°8	40 Minuten	0·9	
30·9	14°—16°8	20 Stunden	0	
		1 Tag	0	
		4 Tage	0	

In dem vorletzten Falle hatte das Gewicht des Eisenoxyds nach dem Entfernen des gasförmigen Schwefelkohlenstoffs aus dem Probirglase um 2 *mg* zugenommen und dieses Mehrgewicht fand ich auch bei der Beendigung des Versuches. Vielleicht war etwas Schwefelkohlenstoff durch Diffussion eingedrungen oder das Glycerin hatte Wasserdampf aus der Luft aufgenommen, es ist nicht weiter aufgeklärt.

Das eine Resultat ergibt sich aber mit der grössten Bestimmtheit, die Strahlen der Adsorptionskraft sind durch Glycerinschichten ebenso wie durch Wasserschichten von geringer Dicke hindurch bis zu einer gewissen Grenze noch wirksam und ihre Energie wächst, wenn die Dicke der trennenden Schicht abnimmt. Die Fernwirkung dieser Molecularkraft ist damit unmittelbar nachgewiesen.

Engere Grenzen für die Beseitigung der Adhäsion an das Eisenoxyd als eine Glycerinschicht von 25·2 oder von 30·9 Procent sind nicht festgestellt, obgleich die Vergleichung der

Schichthöhen noch dadurch ein besonderes Interesse gewinnt, dass Glycerin mit Schwefelkohlenstoff fast dasselbe specifische Gewicht besitzt. Dagegen habe ich einige Versuche mit dem stärker erhitzten Eisenoxyd von schwächerer Adsorptionskraft angestellt und es zeigte sich auf das deutlichste, dass auf diesem geringere Procentsätze von Glycerin ungleich stärker abschwächten als vorher. Ein nur 20 Minuten lang bis zur vollen Rothgluth erhitztes Eisenoxyd nahm bei ähnlichen Temperaturen, wie sie oben angegeben sind, unter einer Glycerindecke von 21·9 Procent in drei Tagen 3·2 Procent, in den folgenden beiden Tagen weitere 1·8 Procent Schwefelkohlenstoff und dann nichts mehr auf. War das Eisenoxyd aber $1^1/_4$ Stunden lang bei voller Rothgluth erhalten, so genügten schon 16·0 Procent Glycerin, um jede Aufnahme von Schwefelkohlenstoff zu verhindern, während eine dünnere Glycerinschicht wieder eine mässige Adsorption zuliess. Durch einen Überschuss an Glycerin unwirksames Eisenoxyd mit freiem Oxyd verrieben, adsorbirt normal die dem neuen Procentsatz entsprechende Menge an Schwefelkohlenstoff. Die Fernwirkung der Molecularkraft zeigt sich also in allen Versuchen mit Glycerin wie mit Wasser vollkommen deutlich, doch sind die ersteren dadurch vorzuziehen, dass beim Glycerin auch bei längerer Versuchsdauer eine Störung durch Verdunsten ausgeschlossen bleibt.

Für die Wirkungsweite der Adsorptionskraft hatte ich früher[1] in zwei einzelnen Fällen als untere Grenzen 1500 und 1700 $\mu\mu$ abgeleitet. In ähnlicher Weise hatte ich aus der Abschätzung des Maximalwerthes für die Oberfläche der pulverisirten Holzkohle und aus dem Gewichte des von derselben adsorbirten Schwefelkohlenstoffs 1600 $\mu\mu$ als Grenzwerth für den Radius der Wirkungssphäre gefunden,[2] und ich muss diese Zahl auf 2800 $\mu\mu$ erhöhen, wenn ich die später beobachteten noch stärkeren Adsorptionen mit berücksichtigen will. Nachdem es aber gelungen war, die Wirkung der Adhäsionskraft über ein fremdes Medium hinaus zu verfolgen,

---

[1] Verhandl. phys. Ges. Berlin, 1885, Nr. 1.

[2] Naturforscherverс. Wien, 1894, S. 72.

lag die Frage nahe, ob sich die Dicke der Trennungsschicht nicht unmittelbar bestimmen liess, und nach anderen vergeblichen Versuchen ist es zuletzt möglich geworden, wenigstens annähernd eine solche Bestimmung für das dem Eisenoxyd aufliegende Glycerin auszuführen.

Während Flüssigkeiten auf anderen Flüssigkeiten sich zu äusserst dünnen Schichten ausbreiten können, Overbeck[1] beobachtete eine Ölschicht von 53 $\mu\mu$ auf dem Wasser, so erscheint ihre Ausbreitung an der Oberfläche von festen Körpern ungleich schwieriger. Eine mattgeschliffene Glasplatte, die mit Glycerin überzogen und dann wiederholt mit Papier derart abgerieben wurde, dass noch eben der Zusammenhang an der Glycerinschicht kenntlich blieb, war nach ihrer Gewichtszunahme in einer durchschnittlichen Höhe von 4200 $\mu\mu$ mit Glycerin bedeckt. Bei der glattgeschliffenen Glasplatte dagegen war bei weniger als der halben Höhe der Glycerinschicht die völlige und ununterbrochene Bedeckung des Glases noch deutlich zu sehen.

Auf die 4780 mm^2 grosse Oberfläche einer solchen mattgeschliffenen Glasplatte wurde nun das mit 27·8 Procent Glycerin innig verriebene Eisenoxyd mittelst eines breiten Messers aufgedrückt und unter mässigem Druck hin- und hergestrichen. So ging etwas Glycerin zum Glase über und es wurde das Bestreichen bis zur anscheinend gleichmässigen Bedeckung des Glases fortgesetzt. Der Rückstand des pulverförmigen Oxyds liess sich leicht abwerfen und die Oberfläche des Glases wurde dann mit dem Messer und nachheriges kurzes Abreiben mit Briefpapier geglättet. Das Glas wog jetzt 32·866 g und war um 0·278 g schwerer geworden. Die Zunahme bestand aus Glycerin und demselben anhaftenden Eisenoxyd. Die Menge des letzteren war zunächst zu ermitteln. Dazu wurde die Glasplatte mit nach oben gekehrter Oxydschicht auf eine Unterlage in eine geräumige mit Wasser gefüllte Porzellanschale so eingestellt, dass sie ringsum von Wasser umgeben war. Nach 24 Stunden hielt sie das Eisenoxyd noch ziemlich fest, sie wurde getrocknet und gewogen, von neuem in Wasser gebracht,

---

[1] Wied. Ann. 35, 1888, S. 398.

bis zum Sieden des Wassers erwärmt und wieder gewogen. Die beiden letzten Wägungen ergaben nicht ein Milligramm Unterschied, also war schon durch die Einwirkung des kalten Wassers alles Glycerin aufgelöst. Die Glasplatte wog mit dem Eisenoxyd 32·804 *g*, also waren 0·216 *g* Eisenoxyd vorhanden und 0·062 *g* Glycerin verschwunden. Die 216 *mg* Eisenoxyd waren vorher bei 27·8 Procent mit 47 *mg* Glycerin bedeckt; hätten sie es ganz behalten, was nicht wahrscheinlich ist, so hätte die Glasplatte dem übrigen Eisenoxyd doch mindestens 15 *mg* Glycerin entzogen.

Ein zweiter Versuch, in welchem die Glasplatte mit einer grösseren Menge von 27·8 Procent glycerinhaltigem Eisenoxyd bestrichen wurde, ergab kein wesentlich abweichendes Resultat. Wurde jedoch das Oxyd über eine verhältnissmässig viel grössere Glasplatte gestrichen, so zeigte sich zwar stets mehr Glycerin, als dem auf der Glasplatte zurückbleibenden Eisenoxyd angehörte, aber das so berechnete freie Glycerin bildete eine ungleich dünnere Schicht auf dem Glase als vorher. Das Glycerin haftet durch Adhäsion am Eisenoxyd wie am Glase, die Adhäsion nimmt mit zunehmendem Abstande schnell ab und wird in geringer Entfernung für beide Körper sich wenig unterscheiden. Wenn das Glas dem Eisenoxyd Glycerin entzieht, so gilt das natürlich nur für die vom Oxyd weiter abstehenden Schichten; auch durch längeres Reiben kleiner Oxydmengen auf grösseren Glasflächen gelingt es nie, das Glycerin ganz auf das Glas zu übertragen. Im Gegentheil gibt mit Glycerin ganz dünn bestrichenes Glas stets einen Theil davon an reines Eisenoxyd ab, es handelt sich demnach nur um die Übertragungen der oberen Schichten und das in dem vorliegenden Versuche durch das Glas weggenommene Glycerin kann dort unmöglich ebenso hoch aufliegen, wie ursprünglich auf dem Eisenoxyd. Die Dicke der Glycerinschicht auf dem Glase führt also nur auf die untere Grenze ihrer Dicke auf dem Eisenoxyd, und da diese bei dem gewählten Procentsatz an Glycerin zugleich ungefähr die Grenze der Wirkungssphäre der durchdringenden Adsorption bezeichnet, so erhält man in der Höhe der auf das Glas übergegangenen Glycerinschicht die untere Grenze für den Halbmesser jener Wirkungssphäre. Auf

der Glasfläche von 4780 *mm*^{2} lagen aber, wie oben angegeben, mindestens 15 *mg* oder 12 *mm*^{3} an freiem Glycerin, so dass die Dicke der Schicht 0·0025 *mm* oder 2500 $\mu\mu$ beträgt. Eine ungleiche Vertheilung oder die Unebenheit des angewandten mattgeschliffenen Glases hatte vielleicht an einzelnen Stellen die Ablagerung einer noch etwas dickeren Glycerinschicht veranlasst. Überhaupt ist von einem solchen Versuche unzweifelhaft ein genaues Resultat nicht zu erwarten, aber alle Erwägungen sprechen für die Wahrscheinlichkeit des angegebenen als eines Minimalwerthes. Dass die Molecularkraft der Adsorption in dem Abstande von mindestens 2500 $\mu\mu$ noch wirksam ist, ergibt sich also ohne irgend bedenkliche Voraussetzungen aus einfachen und leicht zu übersehenden Thatsachen.

Für den früher erwähnten Procentsatz 30·9 an Glycerin, bei welchem schon gar keine Adsorption von Schwefelkohlenstoff mehr stattfindet, erhielt ich auf der Glasplatte in mehreren Versuchen theils dünnere, theils dickere Glycerinschichten und als dickste eine von 2900 $\mu\mu$, was mit der vorhergehenden Beobachtung gut übereinstimmt. Auch die älteren auf andere Weise von mir gefundenen Werthe erweisen sich den neuen gegenüber als von gleicher Ordnung; mehr ist nicht zu betonen und mehr war nicht zu erwarten.

Obgleich ich in zwei früheren Abhandlungen vom Jahre 1886[1] und 1889[2] auf Grund meiner Versuche bereits die Behauptung aufgestellt hatte, dass die Anziehungsenergie fester Körper auf verschiedene Schichten adsorbirter Dämpfe nach der zweiten Potenz der Abstände abnimmt, so erschien es mir doch bei der grossen Bedeutung des Gesetzes wichtig genug, dasselbe noch in weiteren Versuchsreihen und in neuer Versuchsanordnung weiter zu prüfen. Die Resultate sind nachstehend mitgetheilt. Das Verhältniss unter den Abständen der Schichten ist dabei nur nach der zweiten der in früheren Untersuchungen benutzten Methoden dadurch bestimmt, dass wegen der überwiegend grossen Grundflächen die Dicke der Schichten

---

[1] Wied. Ann. 28, S. 684.

[2] Diese Sitzungsber., 98. Bd., 21. Februar.

dem Procentgehalt an adsorbirten Dampf proportional angesehen wird. Die Stärke der Adhäsion wurde ebenfalls wie früher durch die Temperaturdifferenz gemessen, um welche man eine Flüssigkeit abkühlen muss, damit sie dieselbe Spannung annimmt, welche man an dem adsorbirten Dampfe beobachtet.

Die Dampfspannung wurde zunächst wieder aus der relativen Verdampfungsgeschwindigkeit abgeleitet, später aber durch statischen Druck gemessen. Für beide Messungen sind vorzugsweise die bekannten Zahlenwerthe und Formeln von Regnault[1] benutzt. Sie wurden vielfach in engeren Grenzen durch graphische Interpolation ergänzt. Dieses Verfahren ist ja früheren Bedenken gegenüber noch neuerdings wieder bei den genauen Messungen Kahlbaum's und v. Wirkner's[2] bewährt gefunden.

Für Vierfach-Chlorkohlenstoff benutzte ich demnach die nachstehenden Druckwerthe.

35°	162·7 *mm*	18°	76·4 *mm*
34	155·8	17	72·9
33	149·3	16	69·6
32	143·1	15	66·4
31	137·1	14	63·2
30	131·4	13	60·2
29	125·8	12	57·3
28	120·5	11	54·6
27	115·3	10	52·0
26	110·4	9	49·5
25	105·6	8	47·1
24	100·9	7	44·8
23	96·4	6	42·6
22	92·1	5	40·5
21	87·9	4	38·5
20	83·9	3	36·6
19	80·1	2	34·8

[1] Mém. de l'académie, 1862, 26, 335 etc.

[2] Dampfspannkraftsmessungen, Dissertation von C. G. Wirkner v. Torda, 1894.

1°	33·0 *mm*	—15°	13·6 *mm*
0	31·3	—16	12·8
— 1	29·6	—17	12·0
— 2	28·1	—18	11·3
— 3	26·6	—19	10·6
— 4	25·2	—20	10·0
— 5	23·9	—21	9·4
— 6	22·6	—22	8·8
— 7	21·4	—23	8·3
— 8	20·3	—24	7·8
— 9	19·2	—25	7·4
—10	18·1	—26	7·0
—11	17·1	—30	5·63
—12	16·2	—45	1·84
—13	15·3	—50	1·30
—14	14·4		

Für Schwefelkohlenstoff galten die folgenden Zahlen:

35°	520·9 *mm*	12°	216·0 *mm*
30	435·6	11	207·0
29	419·8	10	198·5
28	404·5	9	190·5
27	389·7	8	182·7
26	375·4	7	175·0
25	361·5	6	167·4
24	348·1	5	160·0
23	335·1	4	153·2
22	322·5	3	146·6
21	310·3	2	140·2
20	298·5	1	134·0
19	287·0	0	128·1
18	275·8	— 1	122·3
17	265·0	— 2	116·8
16	254·6	— 3	111·9
15	244·6	— 4	107·0
14	234·8	— 5	102·1
13	225·2	— 6	97·3

— 7°	92·6 *mm*	—42°	12·6 *mm*
— 8	88·0	—43	11·8
— 9	83·7	—44	11·0
—10	79·5	—45	10·2
—11	75·5	—46	9·5
—12	71·7	—47	8·9
—13	68·1	—48	8·3
—14	64·7	—49	7·7
—15	61·4	—50	7·2
—16	58·3	—51	6·7
—17 [1]	55·3	—52	6·2
—18	52·5	—53	5·7
—19	49·9	—54	5·3
—20	47·3	—55	4·9
—21	44·8	—56	4·5
—22	42·3	—57	4·1
—23	39·9	—58	3·8
—24	37·8	—59	3·5
—25	35·8	—60	3·2
—26	33·8	—61	3·0
—27	31·9	—62	2·8
—28	30·1	—63	2·6
—29	28·5	—64	2·4
—30	27·0	—65	2·2
—31	25·5	—66	2·0
—32	24·1	—67	1·8
—33	22·7	—68	1·7
—34	21·3	—69	1·6
—35	20·0	—70	1·5
—36	18·8	—71	1·4
—37	17·6	—72	1·3
—38	16·5	—73	1·2
—39	15·4	—74	1·12
—40	14·4	—75	1·06
—41	13·5	—80	0·88

[1] Alle Werthe unter —16° sind ohne weitere Bestätigung durch Beobachtungen nur nach der Formel bestimmt und desshalb weniger zuverlässig.

Über den Dampfdruck des Benzols hat zwar v. Wirkner a. a. O. vielfach controlirte Beobachtungen mitgetheilt, aber sie erstrecken sich nur auf Temperaturen über 0°, desshalb musste ich auch in diesem Falle die ganze Reihe nach einer Formel berechnen und wählte dazu jetzt die von C. Antoine[1] angegebene

$$\log p = A\left(D - \frac{1000}{\theta}\right),$$

in welcher $A = 1 \cdot 1650$, $D = 5 \cdot 8524$ und $\theta = t + 216$.

An einzelnen Stellen habe ich dann nach v. Wirkner, nach Ramsay und Joung und nach Fischer[2] corrigirt.

A. Versuche mit dynamischer Druckmessung.

Benzol. Die Versuche mit Benzol wurden zuerst so ausgeführt, dass der Zutritt von atmosphärischer Feuchtigkeit während der Verdunstung des Benzols möglichst verhindert wurde. $2 \cdot 528\,g$ von entwässertem Eisenoxyd nahmen in einem durch Schwefelsäure trocken gehaltenen Raume den Benzoldampf auf und wurden zur Verdunstung in einen tiefen, oben theilweise geöffneten Glascylinder von $5\,l$ Inhalt gebracht. Der Glascylinder war am Boden mit concentrirter Schwefelsäure bedeckt und an den Seiten davon benetzt, so dass der Versuchsraum hinreichend trocken blieb und das Eisenoxyd schliesslich sein ursprüngliches Gewicht genau wieder angab. Das zur Vergleichung des Gewichtsverlustes dienende und bis zur Marke mit reinem Benzol angefüllte Kölbchen befand sich in der Nähe des Glascylinders, so dass die Verdunstung des freien Benzols und des adsorbirten Dampfes bei derselben Temperatur erfolgte. Die Versuchsdauer für die Bestimmung des relativen Dampfdrucks ist in den ersten Fällen und wo es zur Beurtheilung wesentlich erschien, hinzugefügt. Hat man beispielsweise für die Durchschnittstemperatur von 19°7 den relativen Dampfdruck 0·16 gefunden, so ergibt sich daraus der absolute Druck von $(74 \cdot 8)(0 \cdot 16) = 12 \cdot 0\,mm$, welcher der

[1] Compt. rend. 107, 778 v. J. 1888.
[2] Wied. Ann. 28, 429, 1886.

— 7° ....
— 8 ....
— 9 ....
—10 ....
—11 ....
—12 ....
—13 ....
—14 ....
—15 ....
—16 ....
—17 [1] ....
—18 ....
—19 ....
—20 ....
—21 ....
—22 ....
—23 ....
—24 ....
—25 ....
—26 ....
—27 ....
—28 ....
—29 ....
—30 ....
—31 ....
—32 ....
—33 ....
—34 ....
—35 ....
—36 ....
—37 ....
—38 ....
—39 ....
—40 ....
—41 ....

Die Adsorptionsanziehung erscheint etwas schwächer als bei dem wasserfreien Eisenoxyd, aber die Exponenten nähern sich doch der Zahl 2.

2·149 *g* wasserhaltiger Thonerde zeigten nach dem analogen Versuche genau das ursprüngliche Gewicht.

Procent-gehalt	Temperatur	Relativer Dampfdruck	Wärme-einheiten	Exponenten
1·63	18°1	0·86	3·0	—
1·3	17·0	0·765	5·3	2·5
0·96	16·9	0·66	8·0	1·9
0·91	17·5	0·59	10·2	2·1

Die Exponenten liegen wieder näher bei 2, was nach den unter *B* mitgetheilten Beobachtungen zum Theil jedenfalls durch die grössere gegenseitige Nähe der auf ihren Dampfdruck untersuchten Benzolschichten veranlasst wird.

Vierfach-Chlorkohlenstoff. Bei den Adsorptionen von Vierfach-Chlorkohlenstoff durch Thonerde oder Eisenoxyd ist es mir trotz mehrfacher Versuche nicht möglich geworden, übereinstimmende Resultate zu erhalten. Ob das von der geringen Anziehungsenergie oder ob es von anderen Umständen abhängt, weiss ich bis jetzt nicht zu entscheiden. Fein pulverisirte und ausgeglühte Tannenkohle, die ebenfalls nicht viel von dem Dampfe aufnimmt, gab trotzdem bei geringer Entfernung der adsorbirten Schichten von einander gute Resultate.

Procent-gehalt	Versuchs-dauer in Stunden	Tempera-tur	Relativer Dampfdruck	Wärme-einheiten	Ex-ponenten
0·86	1	20°1	0·275	25·6	—
0·77	2·1	18·9	0·19	32·1	2·0
0·69	1	20·7	0·13	38·9	1·85
0·63	2·3	19·0	0·08	46·5	2·0
0·53	15·5	20·0	0·02	66	1·96

Die Verdunstung von der Oberfläche der Kohle erfolgte in den oben beschriebenen Glascylinder in Gegenwart von concentrirter Schwefelsäure, doch war der starken Anziehung der Kohle gegenüber nicht alles Wasser zurückzuhalten, denn ihr Gewicht von 1·401 *g* war am Ende des Versuches um 4 *mg* grösser. Der Versuch ist daher als ganz einwandfrei nicht anzusehen.

Schwefelkohlenstoff. Mehrere Versuche mit stark erhitztem Eisenoxyd von schwächerer Adsorptionskraft ergaben in kleineren Beobachtungsreihen Werthe der Exponenten, die in keinem Falle um mehr als 0·4 von 2 abwichen. Pulverisirte Holzkohle adsorbirt den Schwefelkohlenstoff so lebhaft, dass sie sich merklich erwärmt, wenn man ihn tropfenweise hinzugibt. Der auf diese Weise oder auch dampfförmig aufgenommene Schwefelkohlenstoff zeigt sich zum Theil so fest gebunden, dass er durch Verdunsten bei gewöhnlicher Temperatur überhaupt nicht entfernt werden kann. Vollständig geschah es nicht einmal durch stundenlanges Erhitzen bis über 100°, und erst durch schwache Rothgluth wurde schnell das ursprüngliche Gewicht der Kohle bis auf eine geringe Abweichung wieder hergestellt. Der letzte Rest des Schwefelkohlenstoffs entweicht dabei nicht unzersetzt, denn es treten beträchtliche Mengen an Schwefelwasserstoff auf. Der Procentsatz an solchem fester gebundenen und beim Verdunsten bei gewöhnlicher Temperatur ziemlich constant zurückgehaltenen Schwefelkohlenstoff war nicht einmal für Tannenkohle derselben Herstellung übereinstimmend, und er schwankte nach sechs verschiedenen Beobachtungen zwischen 0·113 und 0·132 vom Gewichte der Kohle. Ich habe nun wegen der vollständigen Analogie mit den früheren Versuchen die Kohle mit dem fester gebundenen Schwefelkohlenstoff als adsorbirenden Körper angesehen und den durch Verdunsten bei gewöhnlicher Temperatur sich wieder abscheidenden Schwefelkohlenstoff nach Procenten des ersteren in Anrechnung gebracht.

Von den ausgeführten Versuchsreihen sind zwei nachstehend mitgetheilt; die erste mit dem grössten 13·2, die zweite mit dem kleinsten Procentsatz 11·3 an fester gebundenem Schwefelkohlenstoff.

Das Anfangsgewicht der Kohle mit diesem Zusatz betrug im ersten Falle 1·595 *g*.

Procent-gehalt	Versuchs-dauer in Stunden	Tempera-tur°	Relativer Dampf-druck	Wärme-einheiten	Exponenten	
7·12	1·25	21°7	0·48	17·8	—	2·8
6·4	1	21·8	0·35	24·8	3·1	2·4
6·2	1	22·0	0·32	26·8	2·9	2·4
6·02	1	22·0	0·28	29·5	3·0	1·7
5·8	1	22·1	0·26	31·4	2·8	—
5·24	3·8	22·1	0·17	39·2	2·6	2·2
4·84	2·3	22·0	0·143	42·5	2·2	1·7
4·25	15·2	21·8	0·065	54·2	2·2	1·8
3·8	6	21·6	0·047	61·4	2·0	1·6
3·7	4	22·1	0·041	63·3	1·9	1·6
2·73	14	34°0 (annähernd)	0·009	89·5	1·8	1·4
2·38	14 Tage	19°0	0·004	92·7	1·5	1·2

Der Durchschnitt der vom Anfang aus berechneten Exponenten beträgt 2·36, von der Mitte aus erhält man 1·9. Die Verdunstung fand in trockener Luft statt. In der anderen Versuchsreihe betrug das Gewicht der Kohle und von 11·3% Schwefelkohlenstoff zusammen 2·216 *g*. Die Kohle war weniger fein pulverisirt.

Procent-gehalt	Versuchs-dauer in Stunden	Tempera-tur	Relativer Dampf-druck	Wärme-einheiten	Exponenten
7·0	3·8	21°8	0·35	24·8	—
6·5	0·8	21·6	0·30	27·7	1·5
5·7	14·2	21·2	0·13	43·8	2·8
5·0	5·1	20·8	0·075	53·6	2·3
4·7	5	21·3	0·057	57·9	2·3
3·29	24 Tage	19·0	0·007	85·0	1·7

Als Durchschnitt der Exponenten ergibt sich 2·2.

B. Versuche mit statischer Druckmessung.

In diesen Versuchen ist nur die Adsorption von Schwefelkohlenstoff durch schwach erhitztes Eisenoxyd oder durch pulverisirte Holzkohle beobachtet: Weil die Gegenwart von Feuchtigkeit beim Eisenoxyd wie bei der Thonerde die Gesetzmässigkeit in der Verdunstung des Schwefelkohlenstoffs nach den früheren Beobachtungen nicht geändert hatte, weil ausserdem ein vollständiges Fernhalten aller Feuchtigkeit von dem Eisenoxyd und erst recht von der Kohle mindestens sehr schwierig erschien, so sind alle Versuche unter voller Sättigung der Atmosphäre mit Wasserdampf ausgeführt.

Eine umgebogene graduirte Glasröhre enthielt in dem geschlossenen kürzeren Schenkel das Eisenoxyd und die Kohle, während der offene längere Schenkel durch Wasser abgesperrt war. Zu Anfang des Versuches stand das Wasser im Schenkel so hoch über der äusseren Oberfläche desselben, dass eine Vergrösserung des inneren Luftvolumens um fast ein Drittel des ursprünglichen möglich war, ohne dass die abgesperrte Luft austreten konnte. In dem offenen Schenkel der Glasröhre befanden sich hoch über dem Wasser durch ein Drahtnetz oder durch einen losen Verschluss von Baumwolle festgehalten, in Millimeter getheilte enge Röhren, welche mit Schwefelkohlenstoff gefüllt waren, so enge Öffnungen hatten, dass sie an einem Tage an die Luft bei 13° je 8 oder 12 *mg* verdunsten liessen. Der Länge eines Millimeters an der äusseren Theilung der Röhre entsprachen etwas mehr als 2 *mg* Inhalt, so dass jedes Milligramm des verdunsteten Schwefelkohlenstoffs abgelesen werden konnte. Diese zuletzt erst getroffene Einrichtung hat den grossen Vorzug, dass beim Einbringen von Schwefelkohlenstoff durch Miteindringen von Luft in den abgesperrten Raum keine Fehler entstehen. Das innere Gasgemenge bleibt ungestört und man braucht nur zeitweise den Stand des Wassers und des Barometers sowie die Temperatur abzulesen. Da nach einem besonderen Versuch 21 *mg* Schwefelkohlenstoff, die in einer weiteren Röhre in den abgesperrten Raum gebracht waren, von dem bis zu der Grenze meiner Messungen mit Schwefelkohlenstoff gesättigten Eisenoxyd in zwei Stunden

adsorbirt wurden, so konnte ein nennenswerther Rest von nicht aufgenommenem Dampf durch das in 24 Stunden erfolgende Verdunsten selbst von 12 *mg* Schwefelkohlenstoff bei meinen Ablesungen nicht vorhanden sein. Der Rauminhalt des Eisenoxyds, der engen Glasröhre, des Drahtnetzes etc. war natürlich vom Volumen der abgesperrten Luft in Abrechnung zu bringen. Ebenso jedesmal von dem verdampften Schwefelkohlenstoff als nicht adsorbirt der in der Röhre vorhandene Dampf, dessen Gewicht durch das Volumen und den gerade herrschenden Partialdruck p_1 des Schwefelkohlenstoffs und des Druckes innerhalb der Glasröhre b_i aus dem Gewicht von 3·4 *mg* für 1 cm^3 durch den Factor $\frac{p_1}{p_1+b_i}$ 3·4 bestimmt wird. Zwei kleinere Fehler entstanden bei meinen Messungen dadurch, dass nicht immer genau unter demselben Druck und bei derselben Temperatur beobachtet wurde. Die Adsorption ist bekanntlich von beiden Umständen abhängig und wird durch Temperaturänderungen besonders stark beeinflusst. Bei den Dimensionen meines Apparates wurde bei ganz mit Schwefelkohlenstoff gesättigtem Eisenoxyd durch eine Temperaturerhöhung von 1° die Wasserhöhe in der Glasröhre um mehr als 9 *mm* vermindert, während ein Unterschied im äusseren Luftdruck von 16 *mm* bei unveränderter Temperatur nur eine Veränderung im Höhenstand des Wassers von 11 *mm* und davon etwas über 3 *mm* durch vermehrte Adsorption veranlasste. Der letztere Einfluss macht sich also weniger bemerklich, aber vollkommen vergleichbar sind natürlich nur die bei derselben Temperatur und demselben Barometerstand gefundenen Werthe.

Nachdem das Anfangsvolumen des abgesperrten Gases unter Berücksichtigung von dem eingeschlossenen Eisenoxyd, Glas, flüssigen Schwefelkohlenstoff und dem Glashalter für den gerade herrschenden Luftdruck und die herrschende Temperatur möglichst genau bestimmt ist, hat man sich ausserdem den Stand des flüssigen Schwefelkohlenstoffs in der graduirten Röhre zu merken. Man wartet dann einige Tage bis zur weiteren Beobachtung, da die zuerst in minimalem oder gar unendlich kleinem Abstande adsorbirten Dämpfe so innig gebunden werden, dass keine irgend wesentliche Zunahme im Volumen der abgesperrten

Luft zu erkennen ist. Macht sich dann die Zunahme bemerklich, so hat man zunächst das ursprüngliche Gasvolumen v_1 nach dem vorhandenen Druck und der vorhandenen Temperatur zu reduciren. Bedeuten b_1 und b_2 die Barometerstände, im Anfang und bei den späteren Versuchen, h_1 und h_2 die Höhen der dem Luftdruck entgegenstehenden Wassersäulen in der Glasröhre und bedeutet t den Mehrbetrag an Temperaturgraden bei der späteren Beobachtung im Vergleiche zur ersten, so ergibt sich der neue Werth v_a des früheren Volumens v_1 unter den veränderten Umständen aus der Gleichung

$$v_a = \frac{v_1\left(b_1 - \frac{h_1}{13\cdot 6}\right)}{\left(b_2 - \frac{h_2}{13\cdot 6}\right)(1+0\cdot 0037\,.\,t)} = \frac{13\cdot 6\, b_1 v_1 - h_1 v_1}{(13\cdot 6\, b_2 - h_2)(1+0\cdot 0037\,.\,t)}$$

Die Tension des Wasserdampfes machte erst für Temperaturabweichungen von 3° sich in einer der vorkommenden Einheiten bemerklich. Der Unterschied des wirklich beobachteten Werthes v und des berechneten ergibt die Vergrösserung des Volumens v_a unter dem Gegendruck von b_c Millimeter Quecksilber. Die Ausdehnung des Gases unter constantem Gegendruck erfolgt durch eine grössere Spannkraft, beide, Volumen und Spannkraft, sind in demselben Verhältniss gewachsen. Will man daher das bei b_c abgelesene Volumen v auf v_a zurückführen, so erhält man den dazu erforderlichen stärkeren Druck x durch die Gleichung $\frac{v}{v_a} = \frac{x}{b_c}$. Da die Vergrösserung der Spannkraft des Gases $x - b_c$ von dem Dampfdruck des Schwefelkohlenstoffs herrührt, so gibt man der vorigen Gleichung besser die Form $\frac{v - v_a}{v_a} = \frac{x - b_c}{b_c}$, weil man dann in $x - b_c$ ohneweiters den Dampfdruck des Schwefelkohlenstoffs erhält. Dabei wird durch b_c der Zahlenwerth von $b_2 - \frac{h_2}{13\cdot 6}$ dargestellt. Obgleich ich zwei Versuchsreihen mit Eisenoxyd ausgeführt habe, so beschränke ich mich auf die Mittheilung der einen, weil die andere nicht irgend wesentlich abwich. Es kamen $2\cdot 010\,g$ Eisenoxyd zur Verwendung, und das Anfangs-

volumen der Luft betrug 368 Einheiten (Millimeter der Röhrenlänge) bei 10·6° und einem wirksamen Luftdruck $b_1 - \frac{h_1}{13 \cdot 6}$ von 742·1 *mm*. Die Menge des adsorbirten Schwefelkohlenstoffs ist nicht in Procenten, sondern einfach nach ihrem Gewicht angegeben, weil schliesslich doch nur Gewichtsverhältnisse in Betracht kommen.

Adsorbirter Schwefelkohlenstoff	Temperatur	Luftdruck b_2	b_t	v_a	v	Dampfdruck des Schwefelkohlenstoffs	Wärmeeinheiten	Exponenten
mg		*mm*				*mm*		
15	11°2	752·5	728·1	376·5	395	34·1	37·0	1·2
19	13·4	749	726·9	379	409	57·6	29·6	1·3
24	13·0	761	738·3	372	412	79·5	25·0	1·4
33	11·0	770	747·2	366	409	87·8	18·9	1·6
40	12·6	775·5	752·8	368	424	114·9	15·0	1·7
44	12·8	776	753·0	366	424	119·4	14·3	1·9
48	12·6	768	746·1	370	430	121·0	14·0	2·1
52	12·6	770	748·2	369	436	135·8	11·3	2·1
56	12·8	770·5	748·4	369	440	143·9	10·2	2·2
59	12·5	765	743·8	371	447	152·4	8·6	2·0
64	11·2	777	755·0	361	434	152·7	7·3	2·1
68	11·4	775	754·5	364	439	155·5	7·1	2·5
75	12·2	781·5	761·7	361	442	170·0	5·9	3·0
79	12·7	780·5	759·2	362	448	180·3	5·0	3·4
82	12·9	776	755·6	365	455	186·4	4·4	—

Die Ausführung dieser Beobachtungsreihe erforderte einen Zeitraum von 23 Tagen, und auch nachher sind noch einige Messungen ausgeführt worden. Die Verdunstung und Adsorption des Schwefelkohlenstoffs erfolgte natürlich Anfangs viel lebhafter als später, weil der Gegendruck des in der abgesperrten Luft vorhandenen Dampfes mehr und mehr hinderlich wurde. Für die Genauigkeit der Beobachtungen waren, wie schon bemerkt, Veränderungen in der Temperatur am

störendsten, weil die geringste Temperaturerhöhung Dampf ausscheidet, der bei dann folgender Abkühlung sich weder gleich verdichtet noch adsorbirt wird. Bei steigender Temperatur ist der Fehler am geringsten, und ich habe meist auf diese Weise beobachtet, weil der Arbeitsraum früh am Morgen am kältesten war und nach einer Temperatursteigerung von etwa 2° gegen die Anfangstemperatur erst am späteren Nachmittag sich wieder abkühlte. Trotz des günstigeren Umstandes der Wärmezunahme für sich bald folgende Messungen habe ich doch bei einer Zwischenzeit von einer halben Stunde, in welcher nur eine minimale Menge an flüssigem Schwefelkohlenstoff verdunsten konnte, die Anziehungsenergie also unverändert bleiben musste, beispielsweise 5·7 statt 5·9, und 9·7 statt 10·2 Wärmeeinheiten dafür gefunden. Wiederholt ging auch wieder die Abweichung nicht über 0·1 hinaus, aber man muss die Möglichkeit der grösseren Fehler mit in Rechnung ziehen. Sie sind bei der statischen Messung anscheinend erheblicher als bei der dynamischen Methode, die eine Störung durch ausgeschiedenen Dampf ausschliesst. Anderseits aber bietet die erstere den Vortheil, dass man höhere Spannungen des absorbirten Dampfes noch genau bestimmen kann. Dadurch allein bin ich auf den Umstand aufmerksam geworden, dass die Exponenten für die zuletzt adsorbirten Dampfschichten wachsen. Die erwähnte zweite, mit Eisenoxyd ausgeführte Versuchsreihe bestätigte die Zunahme, und sie erklärt sich ohne weitere Schwierigkeit dadurch, dass bei der Berechnung der Exponenten die für die äusseren Schichten unzweifelhaft abnehmende Dichtigkeit und dadurch vergrösserte Entfernung nicht berücksichtigt ist. Die Zunahme der Exponenten wird zuletzt sehr bedeutend, und es ergab sich z. B. in der obenstehenden Reihe für 88 *mg* des absorbirtien Dampfes bereits der Exponent 4·5. Da ausserdem bei den weiter entfernten Schichten die Messungen unsicherer erschienen, ich erhielt für dieselbe Temperatur einmal 2·7 und nachher 3·2 Wärmeeinheiten, so hatte eine weitere Fortsetzung der Versuchsreihe keinen Werth mehr. Dass die Exponenten der Anfangsglieder unter 2 liegen, kann wegen der Wiederholung Versuchsfehlern nicht zugeschrieben werden. Ich möchte es am ersten damit erklären,

dass das Eisenoxyd, welches eine geringe Menge Wasser stark festhält, in die ihm nächsten Schichten aus der feuchten Luft etwas Wasser aufnimmt, und dass dadurch der Abstand aller Schwefelkohlenstoffschichten vergrössert wird, was für die nächsten eine relativ beträchtlichere Verminderung der Anziehungsenergie zur Folge haben würde. Fraglich bleibt es ausserdem, wie schon bemerkt ist, ob die für die Anfangsresultate massgebenden, aber durch Beobachtungen nicht controlirten Werthe des Dampfdruckes vom Schwefelkohlenstoff in ganz niedrigen Temperaturen als ausreichend zutreffend angesehen werden dürfen. Bei den später folgenden Gliedern meiner Versuchsreihe mit gleichmässig befriedigenden Resultaten ist das unbedingt der Fall, und daher erhält der Satz von der Abnahme der Anziehungsenergie nach dem Quadrate der Entfernung durch die Ergebnisse der statischen Messung eine neue und wegen der abweichenden Beobachtungsweise doppelt wichtige Bestätigung.

Nach dem früher beschriebenen Verhalten der Holzkohle zu Schwefelkohlenstoff adsorbirt sie denselben viel lebhafter als Eisenoxyd, und es ist mir auch keinmal gelungen, durch Aufgiessen von Wasser auf die mit Schwefelkohlenstoff beladene Kohle den ersteren in grösseren Tropfen abzuscheiden, wie es beim Eisenoxyd ganz leicht geschieht. Ob dabei freilich die stärkere Anziehung der Kohle das einzige Hinderniss war, oder daneben auch die Schwierigkeit, Kohle mit Wasser zu benetzen, liess sich nicht entscheiden. Wurde solche Kohle in einem Probirglase mit Wasser geschüttelt, so liess sich Schwefelkohlenstoff über dem Wasser in der Luft des Probirglases durch den Geruch und als ein mit blauer Flamme verbrennendes Gas nachweisen.

Um in kurzer Zeit eine Übersicht über den Verlauf der Adsorption durch Holzkohle zu gewinnen, brachte ich 1·122 *g* von dem mit 12·3% Schwefelkohlenstoff fester verbundenen Kohlenpulver in eine 11 *mm* weite Glasröhre, in welcher, ihrem grösseren Querschnitt entsprechend (der innere Durchmesser der zu allen anderen Versuchen benutzten Röhren betrug annähernd 8 *mm*), auch mehr Schwefelkohlenstoff verdunstete, nämlich 16 *mg* bei 12°2. Der Procentgehalt an adsorbirtem

Schwefelkohlenstoff war im Vergleich zu den analogen Versuchen mit Eisenoxyd viel bedeutender, bevor sich eine merkliche Zunahme im Volumen der abgeschlossenen Luft zu erkennen gab, ein neuer Hinweis auf die starke Anziehung der Holzkohle.

Adsorbirter Schwefelkohlenstoff	Temperatur	Luftdruck b_2	b_e	v_a	v	Dampfdruck des Schwefelkohlenstoffs	Wärmeeinheiten	Exponenten
mg		mm				mm		
54	12°0	780·3	772·1	203	209	22·8	44·9	1·6
76	11·4	777·2	769·2	205	215	37·5	35·5	2·1
101	9·0	766·3	759·1	203	223	74·7	20·2	2·4
122	12·1	755·3	748·5	211	246	124·1	12·8	—
136	11·3	749·5	745·2	212	253	144·1	8·7	3·7
149	11·2	753·5	747·0	210	258	170·7	4·8	4·9

Bei dem letzten Versuche waren über 13% Schwefelkohlenstoff adsorbirt, und es zeigt sich in diesem Falle besonders deutlich an den hohen Exponenten, dass bei grossen Mengen des abgelagerten Dampfes die äussersten Schichten loser aufeinander liegen. Man müsste der Rechnung weitere Abstände zu Grunde legen, um den Exponenten 2 zu erhalten, und deshalb könnte man sogar aus den exponentialen Abweichungen die Ausdehnung der Schichten ableiten. Im vorliegenden Falle aber handelt es sich um den Nachweis des Exponenten 2, und dieser ist in der That in allen näher liegenden Schichten wieder zu erkennen. Dass sich die Abweichung in den äusseren Schichten gerade beim Schwefelkohlenstoff zum Unterschiede von Wasser oder auch Benzol so stark bemerklich macht, erregt durchaus kein Bedenken, sondern es lag sogar nahe, sie für den flüchtigsten der drei Stoffe als vorzugsweise wahrscheinlich zu erwarten. Nachträglich finde ich noch ausserdem damit übereinstimmend in einer früheren Untersuchung von mir[1] die Angabe, dass bei grossen

[1] Diese Sitzungsber., 21./2. 1889, S. 12.

Mengen des von Thonerde adsorbirten Benzols in den Aussenschichten die unter der gewöhnlichen Voraussetzung berechneten Exponenten bis 3·2 über 2 hinausgehen, also ebenfalls erheblich, aber nicht so stark als bei dem noch flüchtigeren Schwefelkohlenstoff.

Zu dem ausführlicheren Versuche über die Adsorption des Schwefelkohlenstoffs verwandte ich 1·040 *g* einer Holzkohle, welche 12·6% an inniger gebundenem Schwefelkohlenstoff bereits enthielt. Das Anfangsvolumen der abgesperrten Luft betrug 266 Einheiten bei dem Druck b_c von 746·4 *mm* und einer Temperatur von 12·6°.

Adsorbirter Schwefel-kohlenstoff	Temperatur	Luftdruck b_a	b_c	v_a	v	Dampfdruck des Schwefel-kohlenstoffs	Wärme-einheiten	Exponenten	
mg		*mm*				*mm*			
42	12·6	774·2	761·3	261	265	10·7	57·2	1·7	1·4
51	12·8	775·2	762·0	262	269	20·8	47·2	1·8	1·5
58	12·9	766·8	755·1	263	274	31·6	40·2	1·9	1·6
65	12·8	767·5	757·0	263	277	41·9	35·2	2·0	1·7
71	12·6	769·3	757·5	263	280	49·1	32·1	2·2	1·9
79	12·4	763·7	753·1	263	286	66·0	26·0	2·3	1·9
85	10·2	765·3	753·8	260	284	69·8	22·7	2·3	1·8
90	10·2	775·8	765·1	258	286	83·2	20·3	2·4	—
94	11·8	773·3	763·2	262	293	90·5	18·7	2·4	2·2
98	13·4	779·8	769·7	259	296	110·1	16·7	2·4	2·3
106	12·2	781·2	771·1	258	298	119·8	13·6	2·3	2·4
110	12·9	779·5	769·3	259	304	134·0	11·9	2·0	2·7
116	12·9	775·2	766·1	260	308	141·8	10·6	1·7	2·5
127	13·2	780·0	771·1	259	311	154·8	9·0	—	2·4
135	13·4	774·2	765·1	261	318	167·1	7·4 (7·2)	3·4	2·5

Die adsorbirende Holzkohle war, wie bemerkt, von der des Vorversuches verschieden, aber die Stärke der Adsorption ergibt sich doch für beide ziemlich gleich, wenn man beachtet,

dass das Gewicht der benutzten Kohle im zweiten Falle um ein Drittel geringer war als im ersten. Mit 135 *mg* adsorbirten Schwefelkohlenstoffs wurde wieder die Grenze erreicht, an welcher die Exponenten wegen der zu losen Auflagerung erheblich über 2 hinausgehen, und deshalb ist die betreffende Beobachtung durch einen Strich abgetrennt. In der übrigen 14gliederigen Reihe erscheint die Annäherung der Exponenten an 2 vollständig genügend, und es wird damit zugleich aufs neue bestätigt, dass das benutzte Kraftmass bei der Adsorption von Wasser oder von Benzol oder von Schwefelkohlenstoff trotz der völlig verschiedenen Constanten auf das gleiche Ergebniss führt. Je nach dem Ausgangsgliede fallen die Exponenten im einzelnen Falle wegen der Versuchsfehler oder der unvollständigen Erfüllung der Voraussetzung natürlich etwas verschieden aus. Gerade in der letzten Reihe ergab ein mittleres Glied bei einer Vertheilung der Fehler nach beiden Seiten hin gute Resultate, und ich habe deshalb die betreffenden Exponenten hinzugefügt. In dieser zweiten Zusammenstellung tritt ausserdem die früher besprochene Zunahme der Exponenten für die Aussenschichten deutlicher hervor.

Nachdem so für das ausgesprochene Gesetz der Fernwirkung der Adhäsionskraft ein reichliches Beweismaterial geliefert ist, möchte ich nicht unterlassen, auf eine beachtenswerthe Erscheinung noch aufmerksam zu machen. Sie zeigte sich sowohl bei der Adsorption von Schwefelkohlenstoff durch Eisenoxyd wie durch Holzkohle, ich habe sie jedoch nur im ersten Falle etwas weiter verfolgt. Wie oben angegeben, kann das schwach erhitzte Eisenoxyd über ein Drittel seines Gewichtes an Schwefelkohlenstoff adsorbiren. Nachdem es 17 Procent aufgenommen hatte, waren in der umschliessenden Glasröhre durch weiteres Verdunsten von Schwefelkohlenstoff neue Druckänderungen nicht mehr wahrzunehmen. Wurden spätere Beobachtungen unter dem früheren Druck und bei der früheren Temperatur ausgeführt, so war in keinem Falle ein grösserer Unterschied als 1 oder $1^1/_2$ *mm* im Wasserstande zu bemerken, und dieser Unterschied fiel in Folge der Nachwirkungen von Änderungen in der Temperatur oder im Druck bald positiv bald negativ aus. Messungen waren also nicht

mehr möglich, und ich nahm zunächst an, das weitere Verdunsten von Schwefelkohlenstoff aus der Glasröhre innerhalb der abgesperrten Luft wäre bloss eine Folge von Verdichtungen und Verdunstungen, die der Temperaturwechsel veranlasste. Aber ein neuer Versuch mit eingesetzter grösserer und weit geöffneter Verdunstungsröhre bewies das Gegentheil. Nachdem das Eisenoxyd wieder 17 Procent an Schwefelkohlenstoff adsorbirt hatte, beobachtete ich die folgenden Verdunstungsmengen.

	Temperaturgrenze	Verdunsteter Schwefelkohlenstoff						
1.	13° und 15°	62 *mg*	in 4	Tagen,	an	einem	Tage	$15^1/_2$ *mg*
2.	13·5° und 15°	75 *mg*	» 7	»	»	»	»	$10^5/_7$ *mg*.
3.	13° und 16°	30 *mg*	» 6	»	»	»	»	5 *mg*.
4.	13° und 17°	36 *mg*	» 6	»	»	»	»	6 *mg*.
5.	8° und 13°	38 *mg*	» 9	»	»	»	»	$4^2/_9$ *mg*.
6.	13° und 17°	76 *mg*	» 17	»	»	»	»	$4^1/_2$ *mg*.

Das Eisenoxyd hatte zuletzt über 35 Procent seines Gewichtes an Schwefelkohlenstoff aufgenommen. Bis nahe an diese Grenze gibt sich in den Verdunstungsmengen vom Schwefelkohlenstoff noch eine starke Abstufung in der Anziehung des Eisenoxyds unzweifelhaft zu erkennen, während die Methode der gewöhnlichen statischen Druckmessung als weniger empfindlich zu ihrem Nachweise versagt.

XI. SITZUNG VOM 23. APRIL 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. II. a, Heft I (Jänner 1896).

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. G. Jaumann an der k. k. deutschen Universität in Prag unter dem Titel: »Elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen«.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine Arbeit aus dem I. chemischen Universitätslaboratorium in Wien: »Über das Phenylhydrazon und Oxim des Protocatechualdehyds«, von Dr. Rud. Wegscheider.

Elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen

(I. Mittheilung)

von

G. Jaumann.

(Mit 2 Textfiguren.)

Man hielt es bisher für sichergestellt, dass die Kathodenstrahlen durch elektrostatische Kräfte nicht oder nicht merklich abgelenkt werden. Im Folgenden wird gezeigt, dass die elektrostatische Ablenkbarkeit den Kathodenstrahlen als eine ebenso charakteristische Eigenschaft zukommt, als ihre magnetische Ablenkbarkeit. Dass man dies bisher nicht bemerkt hat, erklärt sich daraus, dass diese elektrostatische Ablenkung einen ganz anderen Charakter hat, als man vermuthen konnte.

Theoretisches. Aus meiner Theorie der Kathodenstrahlen ergab sich der Satz: Bei Abwesenheit einer ablenkenden magnetischen Kraft folgt der axiale (rein longitudinale) Theil der Kathodenstrahlen mit Annäherung den elektrostatischen Kraftlinien des Feldes, und zwar in der Richtung von der Kathode zur Glaswand.[1]

[1] Wiener Akad., Bd. 104, S. 776, Juli 1895, Wied. Ann. 57, S. 147. Alle früher behandelten Strahlen (Schallstrahlen, Licht- und elektrische Transversalstrahlen und auch die elektrischen Longitudinalstrahlen der Theorien von v. Helmholtz und H. Poincaré) folgen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Damit im Zusammenhange steht ihre wesentliche Geradlinigkeit in homogenen Medien. Die elektr. Longitudinalstrahlen meiner Theorie folgen jedoch einer Differentialgleichung erster Ordnung, und dies gibt ihnen zwei charakteristische Eigenschaften. Sie verlaufen im homogenen Medium im Allgemeinen krummlinig und können diese krummen Linien nur in

Noch vor Kurzem bezeichnete Herr H. Poincaré[1] als einen Beweis der Unrichtigkeit meiner Theorie gerade diesen Satz. Und thatsächlich standen demselben grosse Bedenken entgegen. Die Kathodenstrahlen verlaufen keineswegs von der Kathode zur Anode hin, sondern sind, zum mindesten in grösserer Entfernung von der Kathode, sehr merklich geradlinig. Ferner haben Voller[2] und Hertz,[3] obgleich sie sehr grosse elektrostatische Kräfte verwendeten, keine ablenkende Wirkung derselben bemerkt, so dass es scheint, als wäre die Richtung der Kathodenstrahlen von dem Verlauf der elektrischen Kraftlinien des Feldes ganz unabhängig.

Hiegegen hätte ich nichts anführen können als die Crookes'sche gegenseitige Abstossung der Kathodenstrahlen und die Goldstein'sche Deflexion derselben durch eine zweite Kathode. Niemand aber hätte zugeben können, dass dies wirklich im Wesentlichen elektrostatische Ablenkungen sind. Es waren also neue Experimente nöthig, um meine Theorie zu rechtfertigen.

Da die Kathodenstrahlen den elektrischen Kraftlinien folgen sollen, diese aber schon durch einen geriebenen Glasstab stark abgelenkt werden, so musste gezeigt werden, dass die Kathodenstrahlen durch einen geriebenen Glasstab stark abgelenkt werden. So unmöglich dies nach den bisherigen Erfahrungen zu sein scheint, bei richtiger Versuchsanordnung sind die Kathodenstrahlen thatsächlich durch elektrostatische Wirkungen sehr stark abbiegbar, wie dies im Folgenden beschrieben werden soll. Diese geeignete Versuchsanordnung habe ich gerade durch das Festhalten des Satzes gefunden, dass die Kathodenstrahlen den Kraftlinien folgen.

Frühere elektrische Ablenkungen der Kathodenstrahlen. Crookes (1879) hielt die Kathodenstrahlen für

---

der Richtung von der Kathode, nicht aber in der umgekehrten Richtung durchlaufen. Es sind damit gerade jene Eigenthümlichkeiten getroffen, welche die Kathodenstrahlen vor allen anderen Strahlen auszeichnen und die Anerkennung ihrer Strahlennatur verhindert haben.

[1] Compt. rend., t. CXXII., p. 520 (2 Mars 1896).

[2] G. Wiedemann, Handbuch IV, A, 436 (1880).

[3] Wied. Ann. 19, p. 809 (1883).

wesentlich geradlinig und normal auf der Kathode, glaubte jedoch, dass zwei nebeneinander laufende Strahlen eine Repulsivkraft besonderer Natur haben.

Goldstein (1876) zeigte, dass die Kathodenstrahlen von Natur aus fast, aber nicht ganz geradlinig sind, und dass sie durch eine zweite Kathode eine Abstossung, welche eine neue Form elektrischer Abstossung darstellt, erfahren. Diese Abstossung für eine elektrostatische Wirkung zu halten, wurde damals schon dadurch unmöglich, dass die Anode keine oder nur unmerklich kleine anziehende Wirkung hat.

E. Wiedemann und Ebert (1892) zeigten, dass die Crookes'sche Abstossung zweier Strahlen ein Specialfall der Goldstein'schen Deflexion sei.

Elster und Geitel (1895)[1] untersuchten eine bei Tesla'scher Ladung auftretende Art von Kathodenstrahlen, welche durch abgeleitete Leiter abgelenkt wird. Geladene Leiter verwendet zu haben, geben die Herren Elster und Geitel gar nicht an. Es zeigt dies deutlich, wie entfernt man noch vor Kurzem war, eine elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen für möglich zu halten.

Alle aufgezählten Formen elektrischer Ablenkung stehen, wie ich glaube, in Zusammenhang mit der elektrostatischen Ablenkung der Kathodenstrahlen, welche im Folgenden beschrieben wird. Sie unterscheiden sich aber schon dadurch von derselben, dass sie dauernde Ablenkungen sind, während die rein elektrostatische Ablenkung eine rasch vorübergehende Erscheinung ist.

I. Vorbetrachtungen.

3. Geradlinigkeit der Kraftlinien. Aus dem eingangs angeführten Satz darf man nicht erwarten, dass die Kathodenstrahlen von der Kathode zur Anode hin verlaufen. Man kann bekanntlich aus der Glaswand des Entladungsrohres lange Funken ziehen. Die verschiedenen Punkte derselben behalten noch nach dem Aufhören der Entladung bekanntlich Potentialdifferenzen bis zu 3000 Volt. Der Verlauf der elektrostatischen Kraftlinien während der Entladung wird also keineswegs aus-

---

[1] Wied. Ann., Bd. 56, S. 733 (1895).

schliesslich oder auch nur zum grösseren Theil durch die Anode bestimmt.

Die elektroskopische Ladung der Glaswand wurde zuerst von G. Wiedemann[1] untersucht. Sie ist nicht unregelmässig oder zufällig, sondern völlig gesetzmässig und in den hier in Betracht kommenden Fällen stets so vertheilt, dass die Glaswand, auf welche die Kathodenstrahlen treffen, kräftig positiv ist, wie ich mich auch selbst durch elektroskopische Versuche überzeugt habe.

So viel man hienach über den Verlauf der Kraftlinien aussagen kann, so könnte ganz wohl eine derselben von der Kathode zu dem Fluorescenzfleck auf der Glaswand gehen. Es ist also nicht unmöglich, dass die Kathodenstrahlen thatsächlich einer Kraftlinie folgen.

Vom Standpunkte meiner Theorie muss man umgekehrt von dem Verlauf der Kathodenstrahlen auf den Verlauf der Kraftlinien schliessen. Dass dieses Kriterium heuristischen Werth hat, geht aus dem Folgenden hervor.

Wenn die Kathodenstrahlen geradlinig sind, so folgt daraus, dass die Glaswand gerade so geladen sein muss, dass die Kraftlinie geradlinig ist. Sind zwei Kathoden vorhanden oder ist die Kathodenform eine complicirtere, so können in der Nähe derselben, mag die Ladung der Glaswand welche immer sein, die Kraftlinien niemals geradlinig verlaufen. Thatsächlich sind auch in diesem Falle die Strahlen niemals geradlinig, sondern zeigen die Goldstein'sche Deflexion.

4. Selbststreckung der Kathodenstrahlen. Es ist in Anbetracht der Ladung der Glaswand selbstverständlich, dass die Kraftlinien von der Kathode nicht zur Anode gehen, sondern anders gekrümmte Richtungen einschlagen. Es bleibt aber eine auffallende Erscheinung, dass die Kathodenstrahlen immer möglichst gestreckt sind, gleichgiltig, welche Form die Glaswand hat und wie die Anode steht.

Es muss also ein Gesetz existiren, wonach die Kathodenstrahlen unter allen Umständen die Wirkung haben,

---

[1] Pogg. Ann. 158, p. 69, (1876). G. Wiedemann, Handbuch IV. A, p. 506.

die Glaswand so zu laden, dass die statischen Kraftlinien, welchen sie folgen, sich möglichst strecken.

Dass dies die richtige Auffassung von der Ursache der Geradlinigkeit der Kathodenstrahlen ist, haben, soviel ich sehen kann, die folgenden Experimente unzweifelhaft gemacht.

5. Princip der Versuchsanordnung. Mag die Ladung der Glaswand welche immer sein, meine Theorie ergibt, dass die Strahlen aus jener Form, welche sie zufolge der Elektrodenladung und der Ladung der Glaswand haben, durch einen genäherten elektrisirten Körper abgelenkt werden müssen. Aus dem Umstande, dass Voller und Hertz keine elektrostatische Ablenkung bemerken konnten, folgt somit, dass das Streben der Kathodenstrahlen, sich zu strecken, bei der gewöhnlichen Aufstellung ein so starkes ist, dass es die ablenkende Wirkung fast völlig aufhebt.

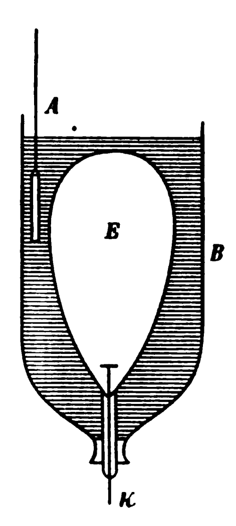


Fig. 1.

Dieses Streckungsstreben ist aber durch eine Wirkung der Strahlen (Ladung der Glaswand) bedingt und wird demnach desto schwächer sein, je schwächer die Strahlen sind. Ferner entspricht die gesuchte Ablenkung der Strahlen der Ablenkung der Kraftlinien, und diese wird cet. par. desto stärker sein, je schwächer die Ladung der Glaswand ist. Man muss also mit äusserst schwachen Kathodenstrahlen arbeiten, um den gewünschten Erfolg zu haben. Für diese wird die Übereinstimmung mit meiner Theorie vielleicht auch noch deshalb verbessert, weil dieselbe nur für Strahlen entwickelt wurde, deren Amplitude sehr klein gegen die statische Kraft ist.

II. Experimente.

6. Versuchsanordnung. Eine grosse hochevacuirte birnförmige Entladungsröhre E Fig. 1 ist in einen mit gewöhnlichem Maschinöl gefüllten Glasbecher B getaucht. Die Kathode K ist in das untere schmale Ende von E eingeschmolzen und endet in einer (schwach concaven) Platte. Die Anode A ist eine

seitlich und oben in das Öl getauchte kleine Platte, welche durch eine 1—2 *cm* dicke Ölschichte von der Glaswand von E getrennt bleibt.

Die Ladung wird durch eine Holtz'sche Maschine J Fig. 2 besorgt, welche durch einen Motor in gleichmässigem raschem Gang erhalten wird. Der Hauptstrom dieser Maschine bildet zwischen dem stumpfen Spitzenpaar S ein ruhiges Büschel. Neben diese Entladungsstrecke ist eine grosse Leydnerflasche L mit beiderseits isolirten Belegungen und das Entladungsrohr E geschaltet.

Die Elektroden K und A Fig. 1 nehmen hiebei eine stationäre Potentialdifferenz von 9000 Volt und mehr an, es fliesst

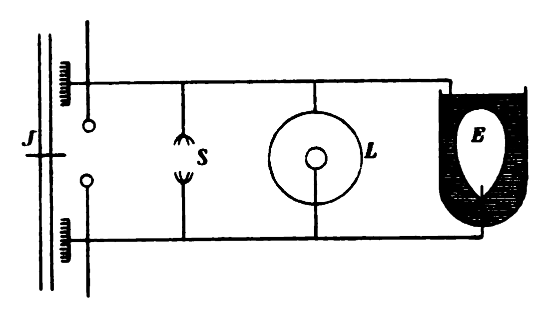


Fig. 2.

aber nur ein schwacher Strom durch das schlecht leitende Öl von A nach K. Es empfiehlt sich, die Kathodenstrahlen so schwach zu machen, dass man den Fluorescenzfleck, welcher oben auf der breiten Glaskuppe von E erscheint, nicht eher deutlich sieht, als bis sich die Augen an die Dunkelheit gewöhnt haben.

Der Fluorescenzfleck muss völlig ruhig leuchten. Wenn er flackert, so hat man mittelst des Gehöres in der Aufstellung das störende Fünkchen zu suchen und zu schliessen.

7. Einflusslosigkeit einiger Umstände. Die oben angegebene Anordnung empfiehlt sich aus verschiedenen Gründen, doch gelingen die Versuche mehr oder weniger deutlich mit jeder beliebigen Aufstellung. Das Eintauchen der Röhre und Anode in ein Ölbad hat nur den Zweck, sehr schwache ruhige

Strahlen zu erhalten und die Stellung der Anode leicht ändern zu können. Die birnförmige Form der Röhre empfiehlt sich der breiten Kuppe und des Auftretens der Ringfigur (s. w. u.) wegen. Doch gelingen die Versuche auch mit anderen Röhrenformen und Aufstellungen, vor Allem in einigermassen trockener Luft ebensowohl wie in Öl. Wenn man die Röhre nicht in das Ölbad taucht, kann man beispielsweise als Anode einen Finger an die Glaswand legen. Doch kann man auch eine eingeschmolzene Anode verwenden, wenn man nur sonst irgendwie für genügend schwache Strahlen sorgt. Selbst bei der ganz gewöhnlichen Aufstellung, also bei starken Strahlen, kann man die elektrostatische Ablenkung nachweisen, freilich ist sie in diesem Falle so undeutlich, dass man mit den betreffenden Erscheinungen schon vertraut sein muss, um sie überhaupt zu bemerken. Endlich braucht man sich gar nicht zu scheuen, permanent geladene oder abgeleitete Körper (Zuleitungen, Eisenstative etc.) in der Nähe der Entladungsröhre zu haben. Dieselben haben fast gar keinen Einfluss.

8. Vertheilung der Strahlung. Die Kathodenstrahlen haben bei der verwendeten Kathodenform bekanntlich in drei Orten besondere Helligkeit. Es soll darauf aufmerksam gemacht werden, dass dies gerade jene Orte sind, wo man starke longitudinale Schwingungen erwarten muss, wenn man berücksichtigt, dass die anregenden Drahtwellen im Stiel heranfliessen und in der Kathodenplatte radial verlaufen. Es sind diese drei Orte grösster Intensität:

1. Die Interferenzfläche, welche den einspringenden Winkel zwischen Stiel und Platte halbirt und einen grünen Ring unterhalb der Kathodenplatte auf das Glas zeichnet. Ich habe a. a. O.[1] nachgewiesen, dass die Strahlen welche diese Interferenzfläche erzeugen, beziehungsweise von der Platte und von dem Stiel ausgehen und cohärent und gleichphasig sein müssen, um in dieser Weise interferiren zu können.

2. Von dem Rand der Platte gehen starke Strahlen in der Richtung der Radien aus und zeichnen in der Ebene der Platte einen grünen Ring auf das Glas.

---

[1] Vergl. Wied. Ann., Bd. 57, S. 152.

3. In der Verlängerung des Stieles geht ein intensives Bündel von Strahlen aus, welches im Folgenden allein untersucht werden soll. Dasselbe hat an seiner Ursprungsstelle eine nicht viel grössere Dicke als der Stiel. Von diesem Bündel kann man durch Variation der Kathodenform durch alle Übergänge ebenso wohl zu dem Crookes'schen »Brennpunkt«, als zu den Interferenzflächen kommen. An der Bildung dieses Bündels nimmt also eine Interferenz der von der Kathodenfläche kommenden Strahlen theil.

9. Configuration des Fluorescenzfleckes. Der im Folgenden untersuchte Fluorescenzfleck auf der oberen Glaskuppe besteht aus zwei Theilen, welche sich überdecken und ein wesentlich verschiedenes Verhalten zeigen. Diese beiden Theile sollen der Hauptfluorescenzfleck und die Ringfigur genannt werden.

1. Der Hauptfluorescenzfleck besteht aus einer vergleichsweise sehr hellen Mittelstelle; nach aussen zu nimmt die Helligkeit ohne Grenze immer mehr ab. Die Randstrahlen krümmen sich von der Axe ab, sind aber immer noch wohl definirt (nicht diffus), wie man aus den scharfen Schatten sieht, welche sie bekanntlich werfen.

2. Die Ringfigur ist jedenfalls auch allgemein bekannt, da sie bei gewöhnlicher Ladung sehr hell ist. Ihre Helligkeit nimmt aber bei Abschwächung der Strahlen viel rascher ab als die des Hauptfleckes. Bei meinen Experimenten ist sie viel schwächer als der Hauptfluorescenzfleck. Sie besteht aus einer hellen Mittelstelle von 0·5 *cm* Radius, auf welche ein dunkler Ring von 0·5 *cm* Breite und dann ein heller Ring von 0·5 *cm* Breite folgt.

Falls auch (wie dies aber bei den meisten meiner Experimente nicht der Fall war) die Anode in das Vacuum taucht, kommt dazu noch ein heller, diametraler, gegen die Anode gerichteter Streifen.

10. Ablenkbarkeit der zwei Strahlengruppen. Der Hauptfluorescenzfleck und die Ringfigur sind in fast gleichem Masse magnetisch ablenkbar, beide also entsprechen Kathodenstrahlen.

In Bezug auf die weiter unten beschriebene elektrostatische Ablenkung verhalten sie sich aber völlig verschieden. Die Ringfigur ist viel weniger, im Allgemeinen kaum merklich elektrostatisch ablenkbar. Im Folgenden wird sie stillschweigend als ruhig vorausgesetzt. Überdies befolgt die kleine elektrostatische Ablenkbarkeit der Ringfigur ganz andere Gesetze als die des Hauptfleckes.

11. Dauerablenkung der Hauptstrahlen durch die Anode. Wenn die Anode *A*, Fig. 1, in einer gewissen Höhe (im oberen Drittel der Entladungsröhre) festgestellt ist, so fällt die Mitte des Hauptfluorescenzfleckes mit der Mitte der Ringfigur zusammen. Bei der geringsten Hebung der Anode wird jedoch die Mitte des Hauptfleckes dauernd angezogen, bis sie in den hellen Ring fällt. Bei stärkerer Hebung der Anode wird sie nicht weiter abgelenkt. Bei einer Senkung der Anode wird sie sogleich aus der Mittellage dauernd abgestossen, aber wieder nicht weiter als bis in den hellen Ring.

Ich habe meistens die Anode in die empfindliche Lage eingestellt, in welcher die Mitte des Hauptfluorescenzfleckes in die Ringmitte fällt. Doch gelingen die Experimente, wenn auch nicht genau in gleicher Weise, auch bei jeder anderen Stellung der Anode. Steht z. B. die Anode sehr tief, so kann man den Hauptfleck, welcher nun im Ringe liegt, durch elektrostatische Kräfte leicht längs des Ringes verschieben, aber ihn nicht leicht herauslenken.

Wenn die Anode selbst Ringgestalt hat und tief gesenkt wird, vertheilt sich fast das ganze Fluorescenzlicht gleichmässig über den Ring.

Die Kathodenstrahlen sind also in der Ruheform keineswegs ganz geradlinig und von der Anodenstellung nicht unabhängig. Vielleicht ist die Abstossung der Strahlen durch die gesenkte Anode eine noch nicht bekannte Erscheinung. Die Anziehung derselben durch die gehobene Anode dürfte aber wohl identisch sein mit der von Goldstein beobachteten geringen Anodenanziehung.

12. Empfindlichkeit der Kathodenstrahlen für elektrostatische Wirkungen. Die Strahlen, welche den Hauptfleck bilden, sind bei dieser Aufstellung äusserst empfind-

lich für elektrostatische Kräfte. Kleine Bewegungen eines geriebenen Stabes in 10 *cm* Entfernung von der Wand des Ölbechers reichen hin, um die Strahlen ganz auf die Seitenwand des Entladungsrohres abzubiegen. Das Winken mit einem Finger in 10 *cm* Entfernung von dem Ölbecher genügt, um die Strahlen zu ungefähr gleich grossen Ausschlägen zu veranlassen. Haucht man gegen den Ölbecher, so werden die Strahlen scheinbar weggeblasen.

13. Unterschied zwischen elektrostatischer und magnetischer Ablenkung. Es soll vor Allem hier auf die vielen Unterschiede zwischen der elektrostatischen und der magnetischen Ablenkung der Strahlen hingewiesen werden, um zu verhindern, dass man die magnetische Ablenkung der Strahlen vorzeitig durch die elektrostatische Ablenkung derselben zu erklären sucht. Der Magnet lenkt allerdings die über die Oberfläche der Glaswand verlaufenden Ströme ab und ändert damit die stationäre Ladung der Glaswand. Die elektrostatische Wirkung dieser dauernd geänderten Ladung könnte die beobachtete magnetische Ablenkung der Strahlen erklären. Doch halte ich, so lange nicht zwingende Beweise aufgebracht werden, diese Erklärung für nicht richtig, sondern die magnetische Ablenkung für eine ebenso ursprüngliche Eigenschaft der Kathodenstrahlen, wie ihre elektrostatische Ablenkbarkeit.

Es ist aber jedenfalls evident, und hierauf kommt es hier allein an, dass man nicht umgekehrt die neue elektrostatische Ablenkbarbeit auf die magnetische Ablenkbarkeit der Strahlen zurückführen kann. Es ist nicht unmöglich, dass die Bewegung der ablenkenden elektrisirten Körper, oder überhaupt die Änderung der ablenkenden elektrostatischen Kraft Strömungen auf der Glaswand oder anderswo hervorruft, welche stärker sind als die der inducirten Ladungsänderung entsprechenden Strömungen. Aber die mittlere Stromstärke derselben kann unmöglich stärker sein als der gesammte Strom der Influenzmaschine, und diesen müsste man in mindestens 1,000.000 Windungen um die Entladungsröhre führen, damit er eine magnetische Wirkung hätte, welche der beobachteten elektrostatischen Ablenkung der Strahlen gleichkäme. Daran wird auch nichts geändert, wenn man sich diese Strömungen auf

der Glaswand nicht continuirlich, sondern ruckweise in äusserst kurzen Zeiten, also mit hohen Stromstärken, verlaufend denkt. Diese äusserst kurzen starken Ströme könnten zwar grosse, aber nur äusserst kurz dauernde, also nicht sichtbare Ablenkungen bewirken, welche von langen Zeiten, in welchen der Strahl unabgelenkt ist, unterbrochen wären.

Bei dieser Gelegenheit bemerke ich auch, dass ich mich durch empfindliche elektroskopische Versuche überzeugt habe, dass die ablenkenden Körper während der Ablenkung keinen Ladungsverlust erleiden.

III. Elektrostatische Ablenkung und Intensitätsänderung der Kathodenstrahlen.

14. Elektrostatische Ablenkung der Kathodenstrahlen. Charakter der Erscheinung. Bewegt man einen geriebenen Glasstab neben dem Ölbecher rasch von oben bis in die Höhe der Kathode und hält ihn dort dauernd an, so werden die Strahlen abgestossen. Es steigt eine dunkle, ziemlich scharf begrenzte Fläche auf der dem Glasstabe zugewendeten Seite des Entladungsrohres auf, welche den Hauptfluorescenzfleck ganz auf die andere Seite des Entladungsrohres herunterfegt. Nach etwa 0·2 Secunden aber kehrt sie wieder zurück und hinter ihr folgt der Fluorescenzfleck. Indem die dunkle Fläche wieder an der Seitenwand des Entladungsrohres, welche dem Stab zugewendet ist, herabsinkt, gewinnt sie wieder die normale Helligkeit dieser Stelle. Der Mittelpunkt des Hauptfluorescenzfleckes stellt sich aber nicht sogleich wieder auf den Ringmittelpunkt (siehe Abschnitt 11) ein, sondern vollführt noch fünf bis sechs kleine gedämpfte Oscillationen von circa 0·2 Secunden Dauer um denselben.

Die dauernde Senkung des ablenkenden Stabes hat also nur vorübergehende Wirkung auf den Strahl. Nach kurzer Zeit ist der Strahl trotz der geänderten Stellung des Stabes so gerade als vorher.

Hebt man nun den + Glasstab rasch wieder in seine ursprüngliche Stellung, so wird der Kathodenstrahl ebenso stark angezogen, wie früher abgestossen. Es steigt eine helle

Fläche auf der dem Glasstab abgewendeten Seite des Entladungsrohres auf, welche den Hauptfluorescenzfleck gegen den Stab hinstösst, aber schon nach 0·2 Secunden wieder zurücksinkt, den Hauptfluorescenzfleck zurücklässt und dunkel wird. Hiebei konnte ich niemals nachfolgende Oscillationen des Hauptfleckes constatiren. Es liegen aber allerdings die Verhältnisse hiezu nicht günstig, da das Auge durch die plötzliche, mit der Anziehung der Strahlen verbundene Aufhellung geblendet wird.

In der geschilderten Weise verlaufen alle elektrostatischen Ablenkungen der Kathodenstrahlen. Bringt man den ablenkenden elektrisirten Körper von einem Ort A_1 auf einen Ort A_2, respective ändert man die Potentialdifferenz zweier ruhender, in der Nähe stehender Conductoren von V_1 auf V_2, kurz ändert man die ablenkende Kraft, so erfahren die Strahlen eine entsprechend grosse Ablenkung, welche sich aber sogleich gedämpft oscillatorisch wieder ausgleicht. Bringt man den ablenkenden Körper wieder von A_2 nach A_1, respective ändert man die Potentialdifferenz der ruhenden Conductoren wieder von V_2 auf V_1, kurz bringt man die ablenkende Kraft wieder auf ihren ursprünglichen Werth, so erfahren die Strahlen die entgegengesetzte Ablenkung, welche sich aber wieder sogleich ausgleicht.

Es ist nur zu bemerken, dass sehr oft, aber nicht immer, die Oscillation der Strahlrichtung eine aperiodisch gedämpfte ist, namentlich bei kleinen Ablenkungen und dann, wenn die Ablenkungsdauer der Strahlrichtung, wie z. B. bei Berührung des Ölbechers mit einem Finger, gross ist.

Ferner tritt manchmal (bei nicht voller Ruhe der Strahlung) statt des Schwingens des Fluorescenzfleckes ein mehr oder weniger zeitlich unregelmässiges Hüpfen desselben ein. Ich habe aber leicht derartige Anordnungen finden können, wo die Bewegung des Fluorescenzfleckes bei jeder Wiederholung der Ablenkung vollkommen überzeugend den Charakter einer regelmässigen gedämpften Sinusschwingung von kurzer Periode (0·2 Secunden) hat, so dass ich nicht umhin kann, diese Auffassung des Zitterns der Strahlen vor ihrer völligen Streckung auszusprechen.

15. Richtung der elektrostatischen Ablenkung. Die Ablenkung der Strahlen hat den umgekehrten Sinn, wie ich ihn vermuthet habe. Bringt man die Entladungsröhre zwischen zwei grosse parallele Condensatorplatten, so dass noch beiderseits 10 *cm* Spielraum bleibt, und ladet man dieselben etwa auf die Potentialdifferenz 6000 Volt, so wird der Strahl für eine kurze Zeit von der negativen Platte angezogen und streckt sich sofort wieder. Ladet man nun die Condensatorplatten aus, so wird der Strahl ebenso stark von der + Platte angezogen und streckt sich dann wieder.

Nähert man (nach Entfernung der Condensatorplatten) einen geriebenen Hartgummistab aus grosser Entfernung in beliebiger Richtung (von oben, unten oder seitwärts) an die Kathode, so werden die Strahlen auf kurze Zeit angezogen. Entfernt man den Stab, so werden sie für kurze Zeit abgestossen. Ein Glasstab wirkt umgekehrt. Positiv, respective negativ geladene bewegte Conductoren wirken entsprechend. Abgeleitete bewegte Conductoren, z. B. die Hand, wirken so wie + Körper, wenn die Anode A, Fig. 1, zur Erde abgeleitet ist. Sie wirken so wie negative Körper, wenn die Kathode K zur Erde abgeleitet ist, also die Anode, überhaupt alle Stellen des Ölbechers ein mehr oder minder hohes + Potential haben.

Da die Experimente, welche diesen Sinn der Ablenkung ergeben haben, auf Grund des Satzes gefunden wurden, dass die Kathodenstrahlen den elektrostatischen Kraftlinien folgen, so bin ich weit entfernt, wegen des nicht zutreffenden Vorzeichens der Ablenkung den Satz zu verlassen. Im Gegentheil, man muss weitergehend aus demselben schliessen.

Da die negativen Kraftlinien auch im Vacuum doch wahrscheinlich bei Näherung eines negativen Körpers abgestossen werden, es sich aber zeigt, dass die den Kraftlinien folgenden Kathodenstrahlen durch den negativen Körper angezogen werden, so muss man schliessen, dass man über irgend ein Vorzeichen der Vorgänge in dem Entladungsrohr nicht richtig unterrichtet ist. Am einfachsten wäre es, anzunehmen, dass von der Kathode nicht negative, sondern merkwürdigerweise positive Kraftlinien ausgehen, welchen die Kathodenstrahlen folgen.

16. Aufhellung und Schwächung der Kathodenstrahlen durch elektrostatische Wirkungen. Neben der elektrostatischen Ablenkung findet eine davon einigermassen unabhängige Intensitätsänderung der Strahlen statt. Man wird schon aus der in Abschnitt 14 gegebenen Beschreibung ersehen haben, dass die Abstossung der Strahlen wohl der Grösse nach, aber auch der begleitenden Intensitätsänderung nach die Umkehrung der Anziehung der Strahlen ist. Mit der beschriebenen Anziehung ist eine sehr starke, vorübergehende Aufhellung, mit der Abstossung eine sehr starke, vorübergehende Schwächung des Fluorescenzfleckes verbunden. Durch starke abstossende Wirkungen (z. B. rasche Bewegung des geriebenen Stabes) können die Strahlen[1] (wenigstens was ihre Fluorescenzwirkung betrifft) für längere Zeit (0·5—1 Secunde) vollkommen ausgelöscht werden.

Die Unabhängigkeit dieser elektrischen Wirkung auf die Intensität der Strahlen von der elektrostatischen Ablenkung macht sich bemerklich, wenn man eine abgeleitete Schutzplatte von 30 *cm* Durchmesser zwischen den ablenkenden Stab und den Ölbecher bringt. Dieselbe hält die elektrostatische Ablenkung fast völlig, die Intensitätsänderung durch Bewegung des Stabes aber fast gar nicht ab. Eine völlige Einhüllung des Ölbechers in einen abgeleiteten Blechmantel hält allerdings sowohl die ablenkende, als die intensitätsändernde Wirkung des Stabes völlig ab. Ferner sind nicht immer Anziehung und Aufhellung, respective Abstossung und Verdunkelung mit einander verbunden. Nähert man z. B. einen geriebenen Gummistab in tangentialer Richtung aus grosser Entfernung dem Ölbecher, so werden die Strahlen angezogen, aber gleichzeitig sehr stark verdunkelt oder ausgelöscht.

Ich bin eben damit beschäftigt, diese Intensitätsänderungen eingehender zu studiren.

17. Selbststreckung der Kathodenstrahlen. Man kann die kurze Dauer der elektrostatischen Ablenkung der Strahlen und die Umkehrung derselben bei Aufhebung der ablenkenden Kraft in zweifacher Weise auffassen: Entweder

---

[1] Auch die Ringfigur.

man nimmt an, dass die Ablenkung durch die Geschwindigkeit, mit welcher sich die ablenkende elektrostatische Kraft ändert, bestimmt wird; oder man nimmt an, dass sie durch die ablenkende Kraft selbst bestimmt wird, dass also die kurze Dauer der Ablenkung der Strahlen bei Fortdauer der ablenkenden Kraft und die Umkehrung der Ablenkung bei Aufhebung der ablenkenden Kraft durch eine secundäre Wirkung bedingt wird. Ich glaube, dass hier diese secundäre Wirkung eine grössere Rolle spielen dürfte als etwa der elektrotonische Zustand, welchen Faraday anfänglich der Auffassung der Magnetinduction zu Grunde legte.

Unter Voraussetzung des Satzes, dass die Kathodenstrahlen den elektrischen Kraftlinien folgen, kann diese secundäre Ursache wohl nichts Anderes sein als eine Ladung der Glaswand. Die dauernde Änderung der ablenkenden Kraft ändert nämlich selbstverständlich den Verlauf der Kraftlinien im Vacuum dauernd. Es muss also nach kurzer Zeit eine secundäre Ursache auftreten, welche diese Ablenkung der Kraftlinien wieder ausgleicht. Eine Ursache, welche den Verlauf von Kraftlinien dauernd ändert, ist aber entweder ein elektrischer Wirbelring oder eine elektrische Ladung.

Nun weiss man auch schon längst, dass die Kathodenstrahlen ladungsändernde Wirkungen besitzen. Sie strecken also unter allen Umständen durch entsprechende Ladung der Glaswand die Kraftlinien und damit sich selbst. Diese von allen Nebenumständen (Form der Glaswand, Stellung der Anode) fast unabhängige Beziehung muss umso näher an das Wesen der Entladung heranreichen, als die Streckung eine oscillatorische ist (vergl. Abschnitt 14).

Man begreift nun auch, dass es neben den vorübergehenden auch dauernde elektrische Ablenkungen der Kathodenstrahlen gibt. Manche davon dürften bewirkt sein durch stationäre Ladungen der Glaswand, indem die ladungsändernde Wirkung der Kathodenstrahlen, welche für sich allein die Selbststreckung derselben sehr bald bewirken würde, stationär durch eine anderswoher zufliessende Ladung paralysirt wird. Solche Dauerablenkungen der Strahlen können hienach nur von solchen Körpern bewirkt werden, welche fortgesetzt Ströme abzugeben

in der Lage sind, also nur von Elektroden, wie dies thatsächlich in den einfachen Fällen immer zutrifft.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinen Dank zu sagen: meinem verehrten Collegen Herrn Prof. E. Lecher, welcher mir einen Arbeitsplatz an dem von ihm geleiteten Institut, und der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen, welche mir die Mittel zur Durchführung dieser Arbeit zur Verfügung stellte.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. V. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XII. SITZUNG VOM 7. MAI 1896.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Heft II (Februar 1896).

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) übermittelt ein vom Commando S. M. Schiff »Pola« eingelangtes Telegramm, laut welchem dieses Schiff nach Abschluss der wissenschaftlichen Expedition im nördlichen Theile des Rothen Meeres am 29. v. M. im Golfe von Suez eingelaufen ist und nach sechstägigem Aufenthalt daselbst die Rückreise nach dem Hafen von Pola antreten wird.

Se. Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht übermittelt ein Exemplar der Regierungsvorlage des Staatsvoranschlages für das Jahr 1896, Capitel IX »Ministerium für Cultus und Unterricht *A*, *B*, *C*«, sowie des Finanzgesetzes vom 28. März 1896, mit dem Beifügen, dass die ordentlichen Ausgaben der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien mit 64.000 fl. und die ausserordentlichen mit 18.000 fl. genehmigt worden sind.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt als Fortsetzung seiner Mondarbeiten achtzehn weitere photographische Mondvergrösserungen nach den neuesten Aufnahmen der Lick-Sternwarte mit hierauf bezüglichen Erläuterungen.

Herr Franz Réchnowski, Ingenieur in Lemberg, übersendet einen Bericht über seine Entdeckung eines neuen Grundstoffes, welchen derselbe »Electroid« nennt.

Herr Albin Belar, Assistent für Chemie an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume, übermittelt ein versiegeltes Schreiben

behufs Wahrung der Priorität mit der Aufschrift: »Untersuchungen des Lichtes phosphorescirender Körper«.

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: »Beiträge zur Kenntniss der obertriadischen Cephalopodenfaunen des Himalaya«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung von Dr. Konrad Zindler, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, betitelt: »Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung: »Über die Wirbel der Knochenfische und die Chorda dorsalis der Fische und Amphibien«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof E. Mach überreicht eine Abhandlung des Herrn E. Oekinghaus, Lehrer an der königl. Baugewerbeschule in Königsberg: »Über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Lang übergibt eine für die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung: »Über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Abhandlung von Dr. Victor Kulisch in Wien: »Zur Kenntniss des Lophins und der Glyoxaline«.

Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten

von

Konrad *Zindler* in Wien.

Im 111. Bande des »Journal f. r. u. a. Math.« habe ich im Anschluss an die Wiederholung des Verfahrens Reye's der Bildung linearer Mannigfaltigkeiten aus projectiven Punktreihen gewisse Configurationen erhalten. Die Methode, nach der dies geschah, lässt sich verallgemeinern (I) und ist, wie der Theil II dieser Note zeigt, auch nicht darauf beschränkt, dass der Process zur Gewinnung linearer Mannigfaltigkeiten gerade von projectiven Punktreihen seinen Ausgangspunkt nimmt.

I.

Die Träger eines linearen zweistufigen Systems projectiver Punktreihen bilden eine Strahlencongruenz $\mathfrak{C}$ von der 3. Ordnung und 1. Classe. Denn (cf. a. a. O. §. 2) $\mathfrak{C}$ entsteht auch, indem man die Congruenz $\mathfrak{G}_5$, die durch zwei collineare Felder in R_5 erzeugt wird, in den R_3 projicirt.[1] Die Träger eines linearen dreistufigen Systems projectiver Punktreihen bilden einen tetraedralen Complex (cf. Reye a. a. O. §. 3 oder Sturm, Liniengeom. I. Bd., Art. 271).

Es sei C eine Configuration, die aus p Punkten, e Ebenen und g Geraden bestehe; durch jeden ihrer Punkte mögen ε_p ihrer Ebenen und γ_p ihrer Geraden gehen, in jeder ihrer Ebenen

---

[1] Cf. auch Reye's Abhandlung im Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 104, §. 2, wo gezeigt ist, dass die duale Congruenz identisch ist mit dem Sehnensystem einer cubischen Raumcurve.

π_e Punkte und γ_e Gerade liegen, mit jeder ihrer Geraden π_g Punkte und ε_g Ebenen incident sein.[1] Denken wir uns nun als Elemente der Configuration C anstatt der Punkte, Geraden und Ebenen, beziehungsweise die Individuen, Regelschaaren und Congruenzen projectiver Punktreihen eines linearen Systems solcher Reihen, so erhalten wir zunächst eine Configuration zwischen einzelnen Punktreihen, Regelschaaren $\mathfrak{R}$ und Congruenzen $\mathfrak{C}$ solcher Reihen, deren Träger alle in einem tetraedralen Complex enthalten sind und worin jede Reihe in γ_p Regelschaaren und ε_p Congruenzen enthalten ist, jede Regelschaar in ε_g Congruenzen u. s. w. Fassen wir auf einer Reihe irgend einen Punkt auf, so liegen alle entsprechenden Punkte von Reihen derselben Regelschaar $\mathfrak{R}$ auf einem Strahl der Leitschaar, alle entsprechenden Punkte von Reihen derselben Congruenz auf einer Ebene des Ebenenbüschels 3. Ordnung, auf das sich die Congruenz »stützt«. Der Punkt und seine entsprechenden bestimmen also die ursprüngliche Configuration C; n Punkte einer Reihe sammt den entsprechenden aller übrigen Reihen bestimmen also eine Configuration C' von np Punkten, $ng+p$ Geraden und ne Ebenen. Durch jeden Punkt von C' gehen γ_p+1 Gerade und ε_p Ebenen. Die Geraden von C' theilen sich in zwei Gruppen: Auf jedem der p Träger der projectiven Punktreihen liegen n Configurationspunkte, auf jeder anderen Configurationsgeraden π_g.

Wählen wir z. B. als C die durch die Ähnlichkeitspunkte von vier Kugeln gebildete Configuration ($e = p = 12$, $g = 16$, $\varepsilon_p = \pi_e = 6$, $\gamma_p = \gamma_e = 4$, $\pi_g = \varepsilon_g = 3$; cf. Reye, Acta Math. Bd. I) und $n = 3$, so kann man, um C' zu bestimmen, durch jeden der vier Kugelmittelpunkte M_i eine Gerade G_i und darauf ein Punktepaar A_i, B_i willkürlich wählen. Durch die vier projectiven Reihen (M_i, A_i, B_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ ist ein tetraedraler Complex projectiver Reihen festgelegt, und alles übrige kann

[1] Zwischen diesen neun Zahlen bestehen die Relationen

$$e\pi_e = p\varepsilon_p, \quad e\gamma_e = g\varepsilon_g, \quad p\gamma_p = g\pi_g,$$

woraus auch folgt

$$\pi_e \varepsilon_g \gamma_p = \varepsilon_p \pi_g \gamma_e.$$

linear construirt werden. Ist z. B. J_{12} der auf $M_1 M_2$ liegende innere Ähnlichkeitspunkt, so erhält man die durch J_{12} gehende neue Configurationsgerade, indem man durch J_{12} jenen Strahl legt, der $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ schneidet. Die beiden Quadrupel A und B bilden zwei dem Tetraeder der Kugelmittelpunkte analoge Tetraeder, gehören aber nicht selbst zu C', ebensowenig wie die Geraden G_i und die Tetraederkanten. Bei jeder weiteren Vermehrung von n um Eins kann man nur mehr einen neuen Punkt auf einer der Geraden G willkürlich annehmen.[1]

II.

Während die nach der bisherigen Methode abgeleitete Configuration C' noch eine gewisse Ähnlichkeit mit C hatte (C trat darin n-mal auf, wobei analoge Punkte durch Strahlen eines tetraedralen Complexes verbunden waren), wird dies nicht mehr der Fall sein, sobald man das analoge Verfahren in einer anderen Mannigfaltigkeit geometrischer Gebilde anwendet. Fassen wir z. B. in der fünfdimensionalen linearen Mannigfaltigkeit R_5 der Strahlengewinde unseres Raumes eine Configuration C auf, so wird es sich wieder darum handeln, nachzusehen, welche Incidenzrelationen durch Interpretation von C im ursprünglichen Punktraum entstehen, wodurch wir zu einer neuen Configuration C' gelangen werden.

Wir bezeichnen ein einzelnes Gewinde mit R_0, ein Büschel solcher Gewinde mit R_1, ein Bündel (oder Netz) mit R_2, ein Gebüsch mit R_3, nennen »Träger« eines R_1 das Leitgeradenpaar des mit R_1 verbundenen Strahlennetzes, Träger eines R_2 die allen Gewinden von R_2 gemeinsame Regelschaar, Träger eines R_3 das allen Gewinden von R_3 gemeinsame Strahlenpaar. Besteht eine volle Incidenz zwischen einem R_2 und einem R_3 (d. h. liegt R_2 ganz in R_3), so gehört der Träger von R_3 zur

[1] Um die in Crelle's Journ., Bd. 111, abgeleiteten Configurationen unter die hier entwickelte Regel zu bringen, muss man als Configuration C das System von n_1 Geraden der einen und n_2 Geraden der anderen Schaar eines Hyperboloids annehmen, während die dritte dort auftretende Zahl $n_3 = n$ zu setzen ist. Die dort mit $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$ bezeichneten Congruenzen sind, worauf mich Herr Reye aufmerksam machte, mit von ihm in Crelle's Journ., Bd. 93, untersuchten Congruenzen 2. Cl., 6. Ord. identisch.

[illegible] jedoch R [illegible] schaar jener [illegible] einem R_6, so [illegible] Veran- [illegible] zwischen R_6 [illegible] raum nichts [illegible] Umstand, dass [illegible] R_6 bildet, [illegible] dasselbe R_6. [illegible] übrigem [illegible] beide R_2 [illegible] R_1. [illegible] durch [illegible] C' im [illegible] mit den [illegible] bei C. [illegible] erster [illegible] werden). [illegible] Con- [illegible] bestimmen

[illegible] R_1.

[illegible] rechnen.

[illegible] R durch

[illegible] R_1 und R_1. [illegible] raum [illegible] C'. [illegible] dual [illegible] Hyper- [illegible] zweiter [illegible] und [illegible] Hyperb [illegible] drei [illegible] durch das- [illegible] Strahlen- [illegible] wird von 6 andere [illegible] von den [illegible] in denen sich die vier Hyperb [illegible] die durch $\mathfrak{B}$

gehen, noch zu zweien schneiden. Fassen wir von C' nur die Geraden auf, so erhalten wir eine Configuration 60_{12} von 60 Geraden, von denen jede von 12 anderen geschnitten wird.

Um 60_{12} zu construiren, denken wir uns die 6 Gewinde, die C bestimmen, in zwei Gruppen zu dreien getheilt. Es seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ die Gewinde der ersten Gruppe und $\mathfrak{H}$ das Träger-hyperboloid des zugehörigen R_2; dann wird jedes der drei Büschel, das durch zwei der drei Gewinde Γ bestimmt wird, durch ein Strahlenpaar auf $\mathfrak{H}$ repräsentirt sein, ein einzelnes Gewinde jedoch durch zwei dieser drei Paare, die eine Involution auf $\mathfrak{H}$ und hiemit das Gewinde bestimmen. Wir nehmen also zwei Regelschaaren R, R' beliebig an und in jeder drei Strahlenpaare (erster Art) $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{P}_4, \mathfrak{P}_5, \mathfrak{P}_6$; diese Annahmen sind der Annahme von 6 willkürlichen Gewinden (repräsentirt durch Doppelpaare auf derselben Regelschaar) äquivalent. Zwei windschiefe Complexbüschel bestimmen einen R_3, dessen Träger durch die gemeinsamen Transversalen der beiden Träger der Büschel gebildet wird, und umgekehrt: der Träger des Schnitt-R_1 zweier allgemeiner R_3 besteht aus den Transversalen der Träger der R_3. Combinirt man also beliebig je zwei der obigen Paare $\mathfrak{P}$ aus verschiedenen Gruppen und construirt zu jeder Auswahl die schneidenden Transversalen, so erhält man neun von den Paaren zweiter Art. Die entsprechenden R_3 schneiden sich zu zweien in je einem R_1; unter diesen R_1 treten die den urprünglichen Paaren $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_6$ entsprechenden Büschel je dreimal auf, je zweimal aber die noch fehlenden 9 von den 15 Büscheln, welche durch die 6 Gewinde zu zweien bestimmt sind $\left[6 \cdot 3 + 9 \cdot 2 = \binom{9}{2}\right]$; z. B. schneiden sich die beiden R_3, die durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_5$ bestimmt sind, im selben Büschel, wie die durch $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_5$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4$ bestimmten. Alle noch fehlenden Paare erster Art erhält man also mehrfach durch Combination der 9 bisher construirten Paare zweiter Art zu zweien und Construction der schneidenden Transversalen. Von den Paaren zweiter Art fehlen jetzt noch diejenigen sechs, deren entsprechende R_3 durch je ein Gewinde der einen Gruppe und alle drei der anderen bestimmt sind. Ihre

Träger gehören also den Leitschaaren von $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{R}'$ an und können gefunden werden, indem man eines der neu gewonnenen Paare erster Art mit einem der ursprünglichen passend combinirt.

Die Beispiele liessen sich beliebig vermehren; wir wollen noch ein besonders einfaches hersetzen: Nimmt man in einem R_5 drei sich nicht schneidende Ebenen an, so sind diese durch das System schneidender Geraden collinear auf einander bezogen (cf. meine Abh. a. a. O.), und jede Gerade der einen Ebene bestimmt in den beiden anderen je eine Gerade eindeutig, so dass alle drei Geraden im selben R_3 liegen. Aus dieser Figur lässt sich durch Rückgang auf die eigentliche Bedeutung der Elemente R_1, R_2, R_3 im Punktraum folgender Satz ablesen: Nimmt man drei Regelschaaren (entsprechend den drei Ebenen) beliebig an, so bestimmt jedes Strahlenpaar aus der Leitschaar der ersten in den beiden anderen Leitschaaren eindeutig je ein Strahlenpaar von der Eigenschaft, dass alle 6 Strahlen der drei Paare von denselben zwei Transversalen (entsprechend dem R_3) geschnitten werden. Da im Resultate die ursprünglichen Regelschaaren nicht mehr vorkommen, braucht man sie von den Leitschaaren nicht zu unterscheiden und hat den Satz: Die ∞^2 Strahlenpaare dreier allgemein liegender Regelschaaren lassen sich gegenseitig eindeutig so zuordnen, dass je sechs Strahlen entsprechender Paare zwei gemeinsame Transversalen besitzen.

Dreitheiliger Halbschatten-Polarisator

von

F. Lippich,
w. M. k. Akad.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. April 1896.)

I.

Überlegungen verschiedener Art und Erfahrungen, die sich mir bei polarimetrischen Arbeiten darboten, haben mir den Gedanken nahegelegt, dem Halbschatten-Polarisator eine solche Einrichtung zu geben, dass dessen Gesichtsfeld nicht wie bisher aus zwei, sondern aus drei Theilfeldern sich zusammensetzt.

Unter Beibehaltung der bei meinen zweitheilgen Polarisatoren getroffenen Anordnung erhält man ein solches dreitheiliges Gesichtsfeld, indem man zwei sogenannte Halbprismen vor dem grossen Nicol in symmetrischer Stellung anbringt, wie es in nachstehender Fig. 1 schematisch dargestellt ist.

Auch die anderen gebräuchlichen Einrichtungen der Halbschatten-Polarimeter lassen sich leicht mit derartigen Gesichtsfeldern herstellen, so das Laurent'sche, indem man einen schmalen Streifen einer Laurent-Platte in die Mitte vor das Nicol'sche Prisma setzt (Fig. 1, *B*); die beiden Seitenfelder haben dann von selbst genau parallel zu einander liegende Hauptschnitte.

Schwieriger ist es, diese Parallelstellung der Hauptschnitte der Seitenfelder bei jenen Polarisatoren zu erreichen, welche nach Art der Prismen der Firma Franz Schmidt & Haensch die einzelnen Theile durch Verkittung zu einem einzigen

Prisma vereinigen. In vorzüglicher Weise ist die Herstellung solcher Prismen Herrn B. Halle in Steglitz[1] gelungen.

In einer vorläufigen Mittheilung, die unter dem Titel: »Über eine Verbesserung an Halbschatten-Polarisatoren« in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrgang 1894, S. 326, erschienen ist, habe ich die obige Anordnung für ein dreitheiliges Gesichtsfeld beschrieben und auf die Vortheile desselben hingewiesen.

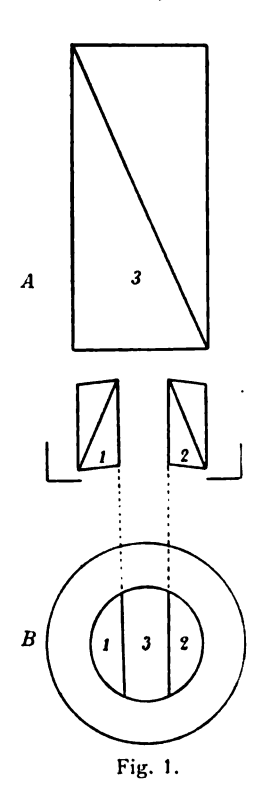


Fig. 1.

Dass die Vermehrung der Felder eine grössere Genauigkeit der Einstellung auf gleiche Helligkeit mit sich bringen solle, ist von verschiedenen Seiten bezweifelt worden. Es sei doch unwesentlich, meinte man, ob diese Gleichheit durch das Verschwinden der Trennungslinie an einer oder an zwei Stellen constatirt werde, denn sonst müsste auch eine blosse Verlängerung einer Trennungslinie im gleichen Sinne wirken u. s. f. Demgegenüber ist jedoch zu bemerken, dass die Beurtheilung der Richtigkeit einer Einstellung durchaus nicht nach dem Verschwinden der Trennungslinie allein sich richtet und dass dies nicht einmal das massgebende Moment ist, wie ich schon in früheren Mittheilungen hervorgehoben habe. Meiner Mittheilung in der »Zeitschrift für Instrumentenkunde« lagen übrigens Versuche zu Grunde, die, wenn auch mit noch unzulänglichen Mitteln ausgeführt, doch einen Fortschritt erkennen liessen. Ferner mag hier noch erwähnt werden, dass die Firma Franz Schmidt & Haensch an ihren neuen Saccharimetern mit Keilcompensation den beschriebenen Polarisator bereits verwendet. Herr F. Strohmer hat einen solchen Apparat beschrieben[2] und in

[1] Centralzeitung für Optik und Mechanik. Jahrg. 1895, S. 226.

[2] Neue Zeitschrift für Rübenzuckerindustrie, Bd. XXXIV, S. 42.

seinem Aufsatze neben sehr treffenden Bemerkungen über den Vorgang bei Helligkeitsvergleichungen eine grössere Reihe von Beobachtungen mitgetheilt, welche für die »überlegene Empfindlichkeit des neuen Instrumentes sprechen«, gegenüber den Resultaten, die mit Apparaten anderer Construction erhalten wurden.

Trotz dieses Urtheils von so competenter Seite halte ich mich aber doch für verpflichtet, an der Hand eines ausgedehnteren und möglichst sorgfältig ausgeführten Beobachtungsmateriales, meinerseits den Nachweis für die behauptete grössere Genauigkeit zu erbringen, die der dreitheilige Polarisator ermöglicht, schon aus dem Grunde, weil Beobachtungen mit Saccharimetern nicht als massgebend und hinreichend angesehen werden können, um daraus auf die Ergebnisse mit anders eingerichteten und genaueren Polarimetern schliessen zu dürfen.

II.

Zur richtigen Beurtheilung der im Folgenden mitzutheilenden Beobachtungen erscheint es nothwendig, einige Bemerkungen vorauszuschicken, die sich auf das Verfahren bei Herstellung gleicher Helligkeiten der Felder, also kurz gesagt, auf die Methode der Einstellung und auf einige hiebei in Betracht kommende Erscheinungen beziehen.

Voraussetzung für gute Einstellungen ist natürlich vor Allem, dass die Prismen des Apparates auch bei geringer Helligkeit des Gesichtsfeldes, also bei starker Beschattung ein vollkommen gleichförmiges Gesichtsfeld geben, dass die Trennungslinien hinreichend fein seien und dass die Beleuchtung richtig regulirt sei, was alles unschwer zu erreichen ist.

Von Wichtigkeit ist ferner der richtige Grad der Beschattung. Das Maximum der Genauigkeit tritt ein bei einer Helligkeit des Gesichtsfeldes, die bedeutend unter der mittleren Tageshelligkeit liegt; sie nimmt rasch ab, wenn man zu grösseren, weniger rasch, wenn man zu kleineren Helligkeiten übergeht. Nach meinen Erfahrungen dürfte es sich empfehlen, die Helligkeit so zu wählen, dass sie nahezu gleichkommt jener, unter welcher eine weisse Fläche erscheint, die durch eine

Kerzenflamme in einer Entfernung von 1·75—2 *m* beleuchtet wird. Eher kann man noch unter als über dieser Helligkeit bleiben, besonders wenn eine geringe Farbendifferenz der Felder nicht zu vermeiden ist, da das Auge bekanntlich für sehr geringe Helligkeiten farbenblind wird. Bei zu grosser Helligkeit wirken überdies die Nachbilder verschieden heller Theile, die sich beim Wechsel der Blickrichtung über andere Theile legen und die richtige Beurtheilung der Helligkeitsunterschiede ungemein erschweren, besonders störend.

Bei der angegebenen Helligkeit treten schon sehr deutlich die Wirkungen des Contrastes benachbarter, ungleich heller Felder hervor. An der Trennungslinie erscheint das hellere Feld in unmittelbarer Nähe derselben heller als in grösserer Entfernung von ihr, das dunklere Feld dunkler und an diesem ist die Erscheinung besonders gut bemerkbar und weiter in das Feld hinein zu verfolgen. Das Ganze macht den Eindruck, als würden zwei längs der Trennungslinie unter einem je nach der Helligkeitsdifferenz verschiedenen Winkel zusammenstossende concave Cylinderflächen von der Seite des helleren Feldes her beleuchtet und auch bei sehr geringen Helligkeitsdifferenzen ist diese Contrastwirkung noch recht deutlich zu bemerken. Durch die gleiche Wirkung wird das Feld am Rande, gegen die vollkommen schwarze Fläche des Diaphragmas, bedeutend aufgehellt, so dass durch diese verschiedenen Umstände die Felder, obwohl sie objectiv gleichförmig hell sind, subjectiv verschieden abschattirt erscheinen. Während aber diese Schattirung an der Trennungslinie schrittweise zurückgeht, je mehr man sich der Gleichheit nähert, bleibt die Aufhellung am Rande bestehen und vermindert die Sicherheit der Einstellung umsomehr, als während derselben die Helligkeitsvertheilung in den beiden Feldern sich in verschiedener Weise verändert.

Das Gesagte mag vielleicht nicht jedem Beobachter, während er Einstellungen macht, gleich deutlich zum Bewusstsein kommen, es wird aber trotzdem nicht ohne Einfluss auf das Resultat sein.

Was nun die Methoden der Einstellung anbelangt, so werden diese wohl von einem Beobachter zum anderen und bei

einem und demselben Beobachter je nach den Umständen wechseln, sie dürften auch kaum in allen Fällen hinreichend genau anzugeben sein, es mögen aber doch einige, die besonders üblich zu sein scheinen, hier besprochen werden.

Viele Beobachter schliessen auf den Eintritt der gleichen Helligkeit beider aneinander stossenden Felder aus dem Momente des »Hinüberhuschens« des Schattens über die Trennungslinie. Wenn man die Einstellung etwas rascher ausführt, so hat man in der That den Eindruck, als ob ein Schattenstreifen parallel der Trennungslinie über dieselbe auf das vorher hellere Feld hinübergleiten würde. Die Erscheinung ist rein subjectiv, denn objectiv sind die beiden Felder stets gleichförmig hell und sie ist bedingt durch die oben bemerkte Contrastwirkung, nach welcher das dunklere Feld an der Trennungslinie dunkler abschattirt erscheint, die im Momente der Gleichheit verschwindet. Verstärkt wird der geschilderte Eindruck noch durch eine andere Contrastwirkung, die bei Einstellungen wohl zu beachten ist. Wenn man nämlich die Helligkeit eines Feldes etwas rascher verringert oder vermehrt, so schätzt man seine neue Helligkeit im ersten Falle kleiner, im letzteren Falle grösser als sie wirklich ist. Man kann also bei zu raschem Drehen des Analystators meinen, die Stellung für die Gleichheit schon überschritten zu haben, während sie thatsächlich noch nicht erreicht ist. Man überzeugt sich leicht von dem Gesagten, wenn man nach gemachter Einstellung das Auge auf kurze Zeit schliesst und dann wieder in den Apparat blickt. Soll der soeben bemerkte Fehler möglichst vermieden werden, so bleibt nichts anderes übrig, als sich sehr vorsichtig und langsam der Gleichstellung zu nähern, und zwar umso langsamer, je näher man derselben schon gekommen ist. Dann ist aber auch von einem Hinüberhuschen eines Schattens nichts mehr zu bemerken.

Eine andere, häufig befolgte Einstellungsmethode besteht im folgenden Verfahren. Man dreht den Analysator mittelst der Vorrichtung für die Feinstellung desselben einige Male rascher hin und her, bis man es getroffen hat, dass das eine Mal das eine, das andere Mal das andere Feld um Weniges so dunkler erscheint, dass die Helligkeitsdifferenzen oder Contraste mög-

der Fall ist. Ich habe des Öftern 50—60 Einstellungen ohne Unterbrechung nacheinander ausgeführt, dabei die Ablesungen an den Mikroskopen selbst besorgt, ohne dass die späteren Einstellungen schlechter wurden; eher war das Gegentheil zu bemerken. Namentlich die ersten Einstellungen, bevor sich noch das Auge den Verhältnissen angepasst hat, sind häufig ganz zu verwerfen, wesshalb es gerathen erscheint, vor einer Messungsreihe erst einige provisorische Einstellungen zu machen. Eine Einstellung nach der dargelegten Methode erfordert sammt den Ablesungen an den Mikroskopen und den nöthigen Aufzeichnungen 2—2·5, höchstens 3 Minuten.

Hinsichtlich dieser Methode ist noch folgende Bemerkung von Wichtigkeit. Macht man nach derselben eine Reihe von Einstellungen immer in derselben Richtung oder von derselben Seite her, so also, dass beispielsweise bei einem zweitheiligen Gesichtsfelde immer zuerst das rechte Feld dunkler war, so wird das Mittel aus den Ablesungen natürlich nicht jene Stellung des Analysators angeben, bei welcher die Felder objectiv gleiche Helligkeit haben, sondern eine Stellung, die von der ersteren um einen gewissen Winkel δ_1 nach der einen oder anderen Seite hin abweicht und der abhängt von dem Schwellenwerthe der Unterschiedsempfindlichkeit, denn um eine Helligkeitsdifferenz ΔJ_1 herum, in der Nähe jener, die dem Schwellenwerthe entspricht, werden die Einstellungen schwanken.

Mit verschiedenen Autoren dürfen wir annehmen, dass, wenn $\frac{\Delta J_0}{J}$ der im Verhältniss zur mittleren Helligkeit ausgedrückte Helligkeitsunterschied ist, welcher eben noch nicht wahrgenommen wird, ein solcher, der um 0·5% grösser ist, eben schon erkennbar wird; alsdann wäre $\frac{\Delta J_0}{J}+0\cdot005$ die eine Grenze für die Einstellungen. Die andere, welche der objectiven Gleichheit näher liegt, ist aber offenbar nicht $\frac{\Delta J_0}{J}$, sondern kleiner anzunehmen, da man ja die Schwelle ΔJ_0 gegen die Gleichheit hin überschreiten kann, ohne eine Änderung zu bemerken, doch wird diese Grenze wohl näher an der Schwelle

liegen, als die frühere, etwa nur im halben Abstande, so dass wir als Helligkeitsdifferenz für die zweite Grenze zu nehmen hätten $\frac{\Delta J_0}{J}$ —0·0025; dann wäre

$$\frac{\Delta J_1}{J} = \frac{\Delta J_0}{J} + 0\cdot 0013$$

und der halbe Abstand der Grenzen, d. i. $^3/_4{}^0/_0$ gleich dem mittleren Fehler F_m einer Einstellung oder, was dasselbe ist, $^1/_2{}^0/_0$ gleich dem wahrscheinlichen Fehler F_w einer Einstellung. Letztere Zahl stimmt ganz gut mit sonstigen Angaben und auch mit den folgenden Versuchsresultaten für ein zweitheiliges Feld (siehe Tabelle, F_w, Art. VI).

$2\frac{\Delta J_1}{J}$ ist der Abstand der beiden nach entgegengesetzten Richtungen gemachten Einstellungen, das Interstitium, welches nach Obigem etwas grösser ist, als das Gebiet $2\frac{\Delta J_0}{J}$, innerhalb welchen Helligkeitsunterschiede nicht mehr wahrgenommen werden. In Procenten der mittleren Helligkeit ausgedrückt, wäre demnach beiläufig anzunehmen

$$2\frac{\Delta J_1}{J} = 2\frac{\Delta J_0}{J} + 0\cdot 25^0/_0, \quad F_m = 0\cdot 75^0/_0, \quad F_w = 0\cdot 5^0/_0.$$

Als Schwellenwerth für die Unterschiedsempfindlichkeit pflegt man gewöhnlich $1^0/_0$ anzunehmen. Dieser Werth jedoch, sowie die Fehlerwerthe unterliegen bedeutenden Schwankungen, sie sind nicht nur abhängig von der mittleren Helligkeit, sondern wechseln von einem Beobachter zum anderen und für denselben Beobachter je nach Umständen, so dass man für zwei zeitlich weiter auseinanderliegende Beobachtungsreihen unter sonst gleichen instrumentellen Bedingungen, keine ganz übereinstimmenden Werthe erwarten darf. Immerhin werden sie aber für einige aufeinanderfolgende Serien nicht wesentlich differiren.

Man pflegt gewöhnlich anzunehmen, dass mit einer Änderung des Schwellenwerthes auch eine Änderung der Genauigkeit der Einstellungen Hand in Hand gehe. Die Beobachtungen

lassen jedoch einen solchen Zusammenhang nicht erkennen. Während das Interstitium grossen Schwankungen unterworfen ist, können doch die Fehlerwerthe im Mittel unter sonst gleichen Umständen nahezu dieselben bleiben (Art. VII).

Den obigen Helligkeitsunterschieden entsprechen gewisse Drehungswinkel des Analysators, die durch eine einfache Formel gefunden werden.

Ist ε der Winkel, welchen die Hauptschnitte der beiden Theile eines zweitheiligen Feldes, oder bei einem dreitheiligen Felde der Winkel, den die immer nahezu parallelen Hauptschnitte der Seitenfelder mit dem Hauptschnitte des Mittelfeldes miteinander bilden, ein Winkel, der zweckmässig als Halbschattenwinkel[1] bezeichnet wird; ist ferner δ der Winkel, um welchen man den Analysator drehen muss, um die Helligkeitsdifferenz ΔJ zu erzeugen oder, wenn eine solche kleine Differenz schon vorhanden war, diese um ΔJ zu vergrössern, so hat man sehr nahe[2] (bei Vernachlässigung der Lichtverluste durch die Halbprismen)

$$\delta = \frac{\Delta J}{J} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}{4}.$$

Nehmen wir an, um ein Beispiel zu haben, es sei der Halbschattenwinkel 6° und es seien die zu ΔJ_0 und ΔJ_1 gehörigen Winkel mit δ_0 und δ_1 bezeichnet, so erhält man für das Interstitium und die Fehlerwerthe in Bogensecunden ausgedrückt, aus den früheren Zahlenwerthen und für $\frac{\Delta J_0}{J} = 1\%$:

$$\delta_0 = 27'', \quad 2\delta_1 = 2\delta_0 + 6''8 = 60''8, \quad F''_m = 20''3, \quad F''_w = 13''5.$$

Das Interstitium würde also 1′ betragen. Für $\varepsilon = 1°$ sinken diese Werthe auf ihren sechsten Theil herab.

Hat man die Gleichheitsstellung des Analysators zu bestimmen so muss man natürlich Einstellungen von beiden

---

[1] Gumlich, Optisches Drehungsvermögen des Quarzes. Wissenschaftl. Abhandlung der physikalisch-techn. Reichsanstalt, Bd. II, S. 240.

[2] Diese Sitzungsber., Bd. XCI, 1885, S. 1092.

Seiten her in gleicher Anzahl machen und aus allen das Mittel nehmen, entweder so, dass man erst eine Serie von der einen Seite her und dann eine Serie von der entgegengesetzten Seite ausführt, oder auch so, dass man von der einen zur nächsten Einstellung immer die Richtung der Einstellung wechselt. Das letztere Verfahren ergibt, wie die Versuche zeigen, ein bedeutend kleineres Interstitium.

Was die Genauigkeit der solcherart gefundenen Gleichheitsstellung anbelangt, so darf auf dieselbe nicht aus den Abweichungen der einzelnen Einstellungen vom Gesammtmittel geschlossen werden. Sie ist vielmehr gleich der Genauigkeit für die nach einer und derselben Richtung gemachten Einstellungen, die sowohl beim zweitheiligen, wie beim dreitheiligen Felde für beide Einstellungsrichtungen als gleich angenommen werden darf.

Bei Bestimmungen des Drehungsvermögens hat man die Differenz zweier Gleichheitsstellungen zu bilden, derjenigen bei eingeschalteter Substanz und der sogenannten Nullpunkts-Einstellung. Ist für beide Einstellungen der Werth von δ_1 derselbe, so kann man von der Ermittlung der Gleichheitsstellung absehen, sobald man nur beide Male die Einstellungen von derselben Seite her ausführt, doch wird dieses Verfahren mit einiger Vorsicht anzuwenden sein. In den meisten Fällen werden die Einstellungen bei eingeschalteter Substanz schon wegen der Wirkung der Rotationsdispersion bei nicht vollkommen homogener Lichtquelle und aus anderen Gründen, nicht unter ganz gleichen Umständen wie die Nullpunktseinstellungen erfolgen und man wird daher auch einen verschiedenen Werth von δ_1 in beiden Fällen erwarten müssen.

IV.

Die Gründe, welche für die grössere Genauigkeit der Einstellungen bei dreitheiligem Gesichtsfelde gegenüber jenen bei zweitheiligem sprechen und welche mich veranlasst haben, das erstere anzuwenden, mögen im Folgenden angeführt werden.

Wir setzen zuerst voraus, dass die beiden Hauptschnitte der beiden Seitenprismen genau parallel zu einander gestellt sind und dass der Hauptschnitt des mittleren Nicols gegen

erstere, entsprechend der gewählten Beschattung, gedreht wurde. Es wird dann bei jeder Lage des Analysators die Helligkeitsvertheilung auch mit Rücksicht auf die oben besprochene Contrastwirkung benachbarter Felder eine vollkommen symmetrische bleiben, was offenbar die Sicherheit der Einstellung erhöhen muss. Zudem bedingt noch die grössere Aufhellung oder Verdunkelung des Mittelfeldes durch den Contrast gegen zwei anstossende Felder einen rascheren Abfall der Helligkeitsdifferenz beim Drehen des Analysators, als bei zweitheiligem Felde, was ebenfalls günstig wirken muss.

Ein anderer, wohl noch wichtigerer Umstand liegt darin, dass bei dreitheiligem Gesichtsfelde die richtige Augenstellung controlirt werden kann. Um dieses einzusehen, sei daran erinnert, dass bei richtiger Anordnung des Apparates das Bild der Lichtquelle durch eine vor dem Polarisator angebrachte Beleuchtungslinse auf das vordere Diaphragma des Analysators geworfen wird. Das astronomische Beobachtungsfernrohr (Objectiv und Ocular zusammen) erzeugt von diesem Diaphragma ein Bild, das genau mit der Pupillenebene des beobachtenden Auges zusammenfallen soll; dieses Bild muss daher ein reelles sein und noch etwas ausserhalb des Ocudardeckels liegen. Nur bei dieser Lage des Auges werden partielle Abblendungen des Diaphragmenbildes durch den Pupillenrand bei seitlichen Schwankungen des Auges bewirken, dass alle Theile des Gesichtsfeldes gleichmässig verdunkelt werden. Liegt jedoch die Pupillenebene vor oder hinter der Bildebene des Diaphragmas, so werden durch Schwankungen nach rechts und links die rechten oder linken Theile des Gesichtsfeldes, oder umgekehrt, verdunkelt und es kann geschehen, dass dadurch vorhandene geringe Helligkeitsdifferenzen geradezu umgekehrt werden. Es ist aber kaum möglich, das Auge immer genau in die richtige Stellung zu bringen und so kleine seitliche Bewegungen desselben auszuschliessen, die schon eine partielle Abblendung der austretenden Lichtbündel bewirken können. Bei der geringen Fernrohrvergrösserung ist der Durchmesser des Diaphragmenbildes keineswegs klein gegen den der Pupillenöffnung, es beträgt beispielsweise an dem von mir verwendeten Instrumente 3 *mm*, so dass der Spielraum für seitliche Be-

wegungen kaum mehr als 2 *mm* erreicht. Da nun beim dreitheiligen Felde die Seitenfelder gleiche Helligkeit haben müssen, sobald die Pupille nur in die richtige centrale Stellung gegen das austretende Strahlenbündel gebracht ist, so hat man jetzt in der That ein Mittel, diese durch Vergleichung der Seitenfelder immer wieder zu erzielen, was bei zweitheiligem Gesichtsfelde unmöglich ist und bei Beobachtungen an diesem auch sehr deutlich hervortritt.

Das dreitheilige Gesichtsfeld gestattet endlich bei der von mir gewählten Einrichtung, die Genauigkeit der Einstellungen noch weiter zu erhöhen, indem man die Hauptschnitte der Seitenfelder nicht genau parallel zu einander stellt.

Um dieses einzusehen, nehmen wir zuerst an, die Hauptschnitte der Seitenfelder seien parallel zu einander und es sei u das Intervall, innerhalb welchem die Helligkeitsänderungen des Mittelfeldes gegenüber dem einen und dem anderen Seitenfelde bei den Einstellungen schwanken können.

Nun wollen wir den Hauptschnitt des einen Seitenprismas aus seiner Parallelstellung um einen kleinen Winkel gedreht denken, und zwar soll dieser Winkel so klein gewählt werden, dass die Helligkeitsdifferenz zwischen den Seitenfeldern 1 und 2 noch nicht bemerkbar wird, wenn der Analysator so gestellt ist, dass alle drei Felder nahezu gleiche objective Helligkeiten haben. Es sei 2 das hellere Feld und indem wir mit (1), (2), (3) die Helligkeiten der drei Felder relativ zur mittleren Helligkeit des Feldes bezeichnen,

$$(2)-(1) = v.$$

Wenn wir jetzt eine Einstellung von einer Seite her, z. B. so machen, dass das Mittelfeld 3 ursprünglich heller war als die Seitenfelder und es ist dann

$$(3)-(2) = u',$$

so ist gleichzeitig

$$(3)-(1) = u'+v.$$

Es sei ferner u_1 die grösste, u_2 die kleinste Helligkeitsdifferenz, die bei den Einstellungen eines zweitheiligen Feldes

vorkommen, so dass also

$$u_1 - u_2 = u$$

ist, so müssen die obigen Differenzen zwischen diesen Grenzen liegen, d. h. es muss gleichzeitig sein

$$u_1 \geqq u' \geqq u_2, \qquad u_1 \geqq u' + v \geqq u_2,$$

was nur möglich ist, wenn

$$u_1 - v \geqq u' \geqq u_2.$$

Das Intervall, in welchem jetzt u' liegen muss, ist also $u - v$, kleiner als im früheren Falle geworden, das Verhältniss dieses zum früheren wird

$$1 - \frac{v}{u}$$

und im gleichen Verhältniss werden die Einstellungsfehler vermindert sein, so dass also die Genauigkeit in der That eine grössere geworden ist.

Um das Maximum der Genauigkeit zu erhalten, haben wir v den grösstmöglichen Werth zu geben. Als solcher wäre der Schwellenwerth zu nehmen, der beim dreitheiligen Felde etwas kleiner als $1^0/_0$ sein dürfte. Setzen wir daher $v = {}^3/_4{}^0/_0$ und für das Intervall u das Doppelte des mittleren Fehlers, somit $u = {}^3/_2{}^0/_0$, so wird obige Verhältnisszahl gleich $^1/_2$. Unter den gemachten Annahmen gibt demnach das dreitheilige Feld im Maximum die doppelte Genauigkeit des zweitheiligen, was mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Der dem v entsprechende Winkel ist nach der im Art. III für δ gegebenen Formel zu berechnen; er beträgt für das Maximum der Genauigkeit, und wenn wir $v = 1^0/_0$ annehmen, für Halbschattenwinkel von 6—7° nicht mehr als nahe 30″; dieser Winkel soll im Folgenden mit ζ bezeichnet werden.

Es mag noch bemerkt werden, dass das Interstitium bei nicht parallelen Seitenprismen um den Winkel ζ kleiner ist.

Würden wir v so gross annehmen, dass die Helligkeitsdifferenz der Seitenfelder merkbar wird, so wären die Einstellungen nach gleichem, aber entgegengesetztem Contrast der

Seitenfelder gegen das Mittelfeld zu machen, eine Methode, der jedoch eine sehr geringe Genauigkeit zukommt.

V.

Um die Vortheile, welche die Dreitheilung gewähren kann, wirklich zu erreichen, müssen vor Allem die Seitenprismen mit Vorsicht ausgewählt und genau justirt werden. Die Visirkanten müssen nicht nur gut, sie müssen auch von möglichst gleicher Beschaffenheit sein. Tritt die eine gegen die andere nur etwas mehr hervor, so verringert das schon die Genauigkeit der Einstellung, indem die Aufmerksamkeit mehr auf das eine Feld gelenkt wird und dadurch die der Dreitheilung zu Grunde liegende Voraussetzung des gleichen Einflusses beider Seitenfelder theilweise nicht mehr zutrifft. Obgleich die Seitenprismen kleiner als bei zweitheiligem Felde sein können, so ist es doch nicht rathsam, auf das kleinste nothwendige Mass herunter zu gehen, denn bei kurzen Prismen ist es äusserst schwierig, dieselben so genau zu arbeiten, dass eine tadellose und feine Trennungslinie zu Stande kommen könne.

Von Wichtigkeit ist es ferner, dass die beiden Seitenprismen gleich gute und gleichmässige Auslöschung geben. In dieser Beziehung zeigen die Prismen oft sehr bedeutende Unterschiede; man prüft sie am besten, wenn sie in den Polarisator eingesetzt sind, indem man die Hauptschnitte aller drei Felder möglichst genau parallel macht und bei sehr intensiver Lichtquelle den Analysator auf Auslöschung stellt. Belässt man das Mittelfeld nur wenig heller, so erscheinen die Seitenfelder oft tief und gleichförmig schwarz, während doch Fehler und Ungleichheiten vorhanden sein können, die man erst wahrnimmt, wenn auch das Mittelfeld auf grösste Dunkelheit gebracht wird.

Für das grosse Nicol am Polarisator und für den Analysator verwendet man am besten verkittete Prismen nach der von mir angegebenen Construction.[1] An Stelle des ersteren kann auch ein Glan'sches Luftnicol angewendet werden, allein nicht ganz ohne Bedenken wegen der vielfachen Bilder, welche diese

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCI, Abth. II, 1885, S. 1079.

Nicols geben und sie zu Analysatoren ganz ungeeignet erscheinen lassen.

Der Polarisator ist so construirt, dass alle nöthigen Bewegungen der Prismen vorgenommen werden können, nachdem derselbe bereits in den Apparat eingesetzt und mit dem das Gesichtsfeld begrenzenden Diaphragma versehen ist. Zu diesem Zwecke wurden die beiden Seitenprismen auf zwei durch Schrauben verschiebbare Schlitten montirt, die gestatten, die Breite des Mittelfeldes beliebig zu variiren, oder auch das eine Prisma ganz aus dem Gesichtsfelde herauszuschieben und so ein zweitheiliges Feld herzustellen; die Gleitebenen der Schlitten stehen senkrecht zur Visirrichtung des Apparates. Jede trägt einen mittelst unendlicher Schraube um eine zur Visirrichtung parallele Axe drehbaren Kreissector, auf dem die Prismenfassung befestigt ist. Diese kann durch eine Druckschraube und Gegenfeder um eine zur Visirrichtung senkrechte Axe gedreht und damit dem Seitenprisma jene Neigung der polirten Längsflächen gegeben werden, die zur Erzielung einer scharfen Trennungslinie durch die Visirkante nothwendig ist.

Durch Drehung der Kreissectoren können die Hauptschnitte der beiden Seitenprismen innerhalb gewisser Grenzen beliebige Winkel gegeneinander erhalten. Wenigstens einer der beiden Sectoren sollte eine weitergehende Feinbewegung gestatten, damit die Parallelstellung der Hauptschnitte oder ihre Neigung um kleine Winkel mit der erwünschten Sicherheit erfolgen könne. Mein Apparat war in dieser Beziehung etwas mangelhaft.

Zur Vergleichung mit Beobachtungen an anderen Polarimetern will ich bezüglich des von mir benützten noch die folgenden Angaben machen.

Die einander zugekehrten Diaphragmen am Polarisator und Analysator hatten eine Öffnung von 11 mm und waren [illegible] cm von einander entfernt. Das Beobachtungs-Fernrohr von C. A. Steinheil [illegible] wir mit dreifachem Objectiv von 27 mm Öffnung und [illegible] mm Brennweite und mit [illegible] [illegible] Mikrometer-Ocularen (AH der Preisliste) versehen. [illegible] Blende des Analysators, auf welche das Bild der Lichtquelle [illegible] Abstand von 14 cm [illegible]

linsen verschiebbar eingerichtet, damit das Auge in die richtige Lage gegen das Bild der Analysatorblende gebracht werden konnte. Die Vergrösserung war eine nahezu dreifache, so dass das Gesichtsfeld in der deutlichen Sehweite nahe 30 *mm* Durchmesser und das Bild der Analysatorblende, wie schon oben bemerkt, an 3 *mm* Durchmesser hatte.

Wenn man mit dreitheiligem Felde arbeiten will, so darf man die Breite des Mittelfeldes weder zu gross noch zu klein nehmen. Es schien mir am besten, sie so zu wählen, dass die drei Felder nahezu gleichen Flächeninhalt haben. Bei sehr grossem Gesichtsfelde wird eine noch geringere Breite vortheilhaft sein, damit es möglich ist, die beiden Trennungslinien gleichzeitig zu überblicken.

Der Theilkreis ist direct in Sechstel-Grade getheilt, eine Umdrehung der Mikrometerschrauben an den Ablesemikroskopen entspricht einer Minute, die Trommeltheilung gibt die einzelnen Secunden und die Einstellungen mittelst der Schrauben sind bis auf 0·5 des Trommelintervalles vollkommen sicher. Nachdem nun bei den folgenden Beobachtungsserien die grösste Differenz zwischen zwei Einstellungen einer und derselben Serie höchstens, und zwar nur bei grossem Halbschattenwinkel einmal, $1' 15''$ betrug, die Einstellung also immer auf denselben Strich des Theilkreises erfolgt und nur etwas mehr als eine Umdrehung der Mikrometerschraube in Betracht kommt, so sind die Genauigkeitsbestimmungen von etwaigen Theilungs- und Schraubenfehlern ganz unabhängig und ich durfte die Einstellungen bis auf einzelne Bogensecunden und Bruchtheile derselben angeben, ohne befürchten zu müssen, dass diese Genauigkeit der Angaben keinen Sinn hätte.

Die Unveränderlichkeit der beiden Theile des Apparates gegeneinander, welche den Polarisator und Analysator enthalten, ist bei der Aufstellung, die ich dem Instrumente gegeben habe, eine ziemlich vollkommene, die Einstellungen zeigen selbst bei länger andauernden Beobachtungsreihen keinen hervortretenden Gang. Nur in einigen Fällen war bei rascher Änderung der Temperatur des Beobachtungsraumes eine continuirliche Verschiebung des Nullpunktes in geringem Grade bemerkbar und plötzliche Änderungen derselben durch Erschütterungen.

VI.

Da es sich um die Ermittlung und Vergleichung der äussersten noch erreichbaren Genauigkeitsgrenzen handelt, durften die Beobachtungen ohne Einschaltung einer activen Substanz gemacht werden. Die sämmtlichen Zahlen der folgenden Tabellen sind also sogenannte Nullpunktseinstellungen. Sie beziehen sich ferner auf verschiedene Stellen des Theilkreises, indem der Analysator häufig gegen diesen verdreht wurde und auch der Polarisator des Öfteren herausgenommen und wieder eingesetzt werden musste. Die Grade und Zehner der Minuten, als absolut sicher, sind in den Tabellen fortgelassen und auch die Minuten dort, wo die Ablesungen bis auf diese unverändert blieben.

Als Lichtquelle habe ich eine Auer'sche Gas-Glühlichtlampe verwendet, deren Intensität durch Strahlenfilter nach Bedarf herabgesetzt werden konnte. Hierdurch wurden merkliche Änderungen in der Lage und Helligkeit der Lichtquelle während einer längeren Beobachtungsreihe ausgeschlossen.

Um sichere Zahlenwerthe zu erhalten für die unter gegebenen Versuchsbedingungen sich ergebenden Fehler genügt es nicht, diese aus einer Beobachtungsreihe abzuleiten, weil die veränderliche Empfindlichkeit des Auges, wie schon bemerkt, ziemlich bedeutende Schwankungen in den Werthen der mittleren Fehler verursacht. Ich habe desshalb in jedem einzelnen Falle 4 bis 8 Serien von je 10 Einstellungen ausgeführt, die jedoch nicht sämmtlich mitgetheilt werden sollen. Bei der Auswahl habe ich immer die Serien, welche den kleinsten und grössten mittleren Fehler ergaben, mit aufgenommen.

Bei drei verschiedenen Helligkeiten der Lichtquelle und dementsprechenden Halbschattenwinkeln ε sollten die Einstellungsfehler ermittelt werden: 1. wenn das Gesichtsfeld ein zweitheiliges ist; 2. wenn es dreitheilig ist und die Hauptschnitte der Seitenfelder parallel zu einander stehen; 3. wenn das Gesichtsfeld dreitheilig ist und die Hauptschnitte der Seitenfelder den oben mit ζ bezeichneten Winkel miteinander einschliessen, für welchen die Genauigkeit ein Maximum werden soll.

Was die letztgenannten Stellungen der Hauptschnitte anbelangt, so können dieselben nur durch Helligkeitsvergleichungen erhalten werden. Um die Parallelstellung zu erreichen, habe ich bei intensiver Lichtquelle und sehr kleinem Halbschattenwinkel die beiden Seitenfelder durch Drehung des einen Seitennicols gleich hell gemacht. Ist dabei die parallele Lage erreicht, so müssen die Seitenfelder auch bei der Drehung des Analysators gleich hell bleiben. Die mangelhafte Feinbewegung des Seitenprismas und die Unsicherheit in der Helligkeitsvergleichung liessen eine sehr hohe Genauigkeit nicht erreichen, so dass noch Abweichungen von der Parallelstellung bis zu $\pm 5''$ vorhanden sein können.

Um die Einstellung der Seitenprismen auf den Winkel ζ zu erhalten, habe ich folgendes Verfahren angewendet. Nachdem das grosse Prisma um den erforderlichen Halbschattenwinkel gedreht war, wurde das eine Seitennicol, z. B. 1, aus der Parallelstellung zu 2 gebracht und dann durch einen vorgesetzten halbmondförmigen Schirm abgeblendet. Nun wurde durch eine Beobachtungsreihe die Lage des Analysators bestimmt, bei welcher Mittelfeld und Seitenfeld 2 gleiche objective Helligkeit haben und der Theilkreis auf den berechneten Winkel eingestellt. Nachdem die Blende vor 1 wieder entfernt war, wurde dieses Nicol so vorsichtig und so langsam als möglich gedreht, bis die Helligkeit des Seitenfeldes eben subjectiv gleich der von 3 und 1 erschien. Auch hier war durch die mangelhafte Feinbewegung des Seitenprismas die Sicherheit der Einstellung sehr beeinträchtigt.

Die Tabellen geben unter α die Ablesungen am Theilkreise, unter Δ die Abweichungen vom Mittelwerthe; die Zeilen bei m, F_m und F_w enthalten diese Mittelwerthe und die mittleren und wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung. Aus F_m und F_w erhält man den mittleren und wahrscheinlichen Fehler des Resultats durch Multiplication mit $\frac{1}{\sqrt{10}} = 0{\cdot}3162$. Die Einstellungen sind in der Reihenfolge, in der sie gemacht wurden, eingetragen und nummerirt.

A. Als hellste Lichtquelle benützte ich die Auer-Lampe ohne Strahlenfilter. Bei dieser Helligkeit und dem Halbschatten-

winkel von 1° 10′ würde ζ nicht mehr als 4—5″ betragen, was noch ganz in die Unsicherheit der Parallelstellung der Seitenfelder fällt. Ich musste also in diesem Falle von einer Prüfung des Einflusses von ζ absehen. Dafür wurde für jede Versuchsreihe die Parallelstellung neu vorgenommen, so dass für diese ζ verschiedene, nicht näher angebbare Werthe haben wird.

Tabelle *A*.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 1° 10'$, $\zeta = \pm 5''$.

	S. 1		S. 2		S. 3		S. 4		S. 5	
	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	27'	+1·6	51'	—0·2	13'	—1·4	21'	—0·2	12'	—2·1
2	30	—1·4	49	+1·8	13	—1·4	19	+1·8	13	—3·1
3	30	—1·4	50	+0·8	11	+0·6	20	+0·8	9·5	+0·4
4	28	+0·6	52	—1·2	10	+1·6	22	—1·2	9	+0·9
5	27	+1·6	53	—2·2	10	+1·6	23	—2·2	8·5	+1·4
6	28	+0·6	50	+0·8	12	—0·4	20	+0·8	9	+0·9
7	31	—2·4	51	—0·2	10	+1·6	21	—0·2	10	—0·1
8	29	—0·4	50	+0·8	12	—0·4	20	+0·8	8	+1·9
9	29	—0·4	50	+0·8	14	—2·4	20	+0·8	9	+0·9
10	27	+1·6	52	—1·2	11	+0·6	22	—1·2	11	—1·1
m	28·6		50·8		11·6		20·8		9·9	
F_m	± 1'43		± 1'14		± 1'43		± 1'23		± 1'61	
F_w	± 0·95		± 0·76		± 0·95		± 0·82		± 1·07	

Als Mittelwerthe der Fehler ergibt sich aus den hier mitgetheilten Werthen und zwei weiteren Serien

$$F_m = \pm 1'39; \qquad F_w = \pm 0'93.$$

Für denselben Halbschattenwinkel und einer nahezu gleich hellen Lichtquelle habe ich nach früheren Mittheilungen[1] bei

[1] Über polaristrobometrische Methoden etc. Diese Sitzungsberichte, 1885, Bd. XCI, S. 29 und 30, Nr. 8 und 9.

zweitheiligem Gesichtsfelde im Mittel $F_m = 3'4$, d. i. mehr als das Doppelte des obigen Fehlers, erhalten.

B. Vor die Auer-Lampe wurde ein Strahlenfilter, bestehend aus Kaliumbichromat- und Nickelsulfat-Lösung gestellt. Auch bei dieser Helligkeit musste ich von einer eigentlichen Prüfung des Einflusses, den die Neigung der Hauptschnitte der Seitenfelder um den Winkel ζ, der jetzt etwa 12″ hätte betragen müssen, absehen und ich gebe daher nur die Grenzen an, zwischen denen ζ bei den einzelnen Serien beiläufig gelegen sein konnte.

Tabelle B_1.

Gesichtsfeld zweitheilig. $\varepsilon = 2° 40'$.

	S. 6		S. 7		S. 8		S. 9		S. 10	
	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	18'	+ 4·5	45'	— 2·2	50'	—10·5	44'	+ 9	7'	+ 9·5
2	31	— 8·5	54	—11·2	38	+ 1·5	52	+ 1	16	+ 0·5
3	7	+15·5	45	— 2·2	36	+ 3·5	45	+ 8	14	+ 2·5
4	15	+ 7·5	33	+ 9·8	26	+13·5	52	+ 1	7	+ 9·5
5	25	— 2·5	37	+ 5·8	50	—10·5	64	—11	24	— 7·5
6	21	+ 1·5	46	— 3·2	55	—15·5	50	+ 3	20	— 3·5
7	29	— 6·5	41	+ 1·8	28	+11·5	59	— 6	29	—12·5
8	20	+ 2·5	44	— 1·2	27	+12·5	60	— 7	14	+ 2·5
9	32	— 9·5	34	+ 8·8	42	— 2·5	48	+ 5	28	—11·5
10	27	— 4·5	49	— 6·2	43	— 3·5	56	— 3	6	+10·5
m	22·5		42·8		39·5		53		16·5	
F_m	± 7'86		± 6'63		± 10'35		± 6'64		± 8'66	
F_w	± 5·24		± 4·42		± 6·93		± 4·43		± 5·77	

Hieraus ergeben sich für die Fehler die Mittelwerthe:

$$F_m = \pm 8'03, \qquad F_w = \pm 5'36.$$

Tabelle B_2.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 2°40'$; $\zeta = \pm 12''$.

	S. 11		S. 12		S. 13		S. 14		S. 15	
	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	18°	+ 2·2	30°	− 5·3	22°	− 4·4	38°	+ 3·7	42°	−4·7
2	14	+ 6·2	32	− 7·3	11	+ 6·6	38	+ 3·7	31	+6·3
3	21	− 0·8	25	− 0·3	12	+ 5·6	44	− 2·3	37	+0·3
4	30	− 9·8	34	− 9·3	17	+ 0·6	51	− 9·3	38	−0·7
5	20	+ 0·2	21	+ 3·7	20	− 2·4	41	+ 0·7	34	+3·3
6	22	− 1·8	16	+ 8·7	17	+ 0·6	43	− 1·3	36	+1·3
7	20	+ 0·2	20	+ 4·7	18	− 0·4	47	− 5·3	42	−4·7
8	21	− 0·8	22	+ 2·7	20	− 2·4	36	+ 5·7	38	−0·7
9	17	+ 3·2	23	+ 1·7	23	− 5·4	37	+ 4·7	39	−1·7
10	19	+ 1·2	24	+ 0·7	16	+ 1·6	42	− 0·3	36	+1·3
m	20·2		24·7		17·6		41·7		37·3	
F_m	±4′16		±5′68		±3′92		±4′76		±3′37	
F_w	±2·77		±3·79		±2·61		±3·17		±2·25	

Mit Hinzunahme von drei weiteren Serien ergeben sich die Mittelwerthe:

$$F_m = 4'44, \qquad F_w = 2'96,$$

nahezu halb so gross als die obigen für ein zweitheiliges Feld.

Um zu zeigen, dass diese hohe Genauigkeit nicht auf ein besonders gut veranlagtes Auge oder auf grosse Übung zurückzuführen sei, theile ich noch einige Beobachtungsreihen mit, die Herr phil. cand. J. Grünwald, der vorher noch nie mit einem Polarimeter gearbeitet hatte, nach wenigen Vorversuchen erzielte.

Beobachter J. Grünwald.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 2°40'$; $\zeta = \pm 12''$.

	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	22°	− 3·5	42°	− 6	30°	− 2·4	19°	− 3·7
2	18	+ 0·5	31	+ 5	29	− 1·4	12	+ 3·3
3	24	− 5·5	32	+ 4	29	− 1·4	10	+ 5·3
4	22	− 3·5	33	+ 3	24	+ 3·6	9	+ 6·3
5	13	+ 5·5	44	− 8	35	− 7·4	10	+ 5·3
6	23	− 4·5	40	− 4	25	+ 2·6	26	−10·7
7	14	+ 4·5	30	+ 6	22	+ 5·6	17	− 1·7
8	12	+ 6·5	36	0	27	+ 0·6	19	− 3·7
m	18·5		36		27·6		15·3	
Fm	± 4°90		± 5°37		+ 4°07		± 5°99	
Fw	± 3·27		± 3·58		± 2·71		± 3·99	

C. Von besonderem Werthe ist die Erhöhung der Genauigkeit durch das dreitheilige Gesichtsfeld für kleinere Helligkeiten der Lichtquelle, auf die man schon wegen der nöthigen Homogenität des Lichtes bei Messungen grösserer Drehungswinkel angewiesen ist. Ich habe daher auch diesem Falle eine weit grössere Zahl von Beobachtungsreihen widmen zu müssen geglaubt, als den vorhergegangenen.

Zu dem unter *B* angegebenen Strahlenfilter wurde noch eine grüne Glasplatte gefügt und dadurch die Helligkeit der Lichtquelle nahezu auf die einer gewöhnlichen Natriumlampe gebracht, deren Licht durch eine Kaliumbichromat-Lösung gereinigt ist. Bei dem jetzt nothwendigen Halbschattenwinkel von 5—6° wird ζ nahezu 30″ betragen, also gross genug sein, um im gegenwärtigen Falle den Einfluss von ζ auf die Genauigkeit der Einstellungen mit Sicherheit constatiren zu können. Die folgenden Tabellen C_1, C_2, C_3 lassen dies unzweifelhaft erkennen und beweisen auch die Überlegenheit des dreitheiligen Feldes über das zweitheilige für kleinere Helligkeiten.

Tabelle C_1.

Gesichtsfeld zweitheilig. $\varepsilon = 5°50'$.

	S. 16		S. 17		S. 18		S. 19		S. 20		S. 21	
	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	1' 30"	+ 2	2' 22"	+10	1' 17"	+36	1' 41"	+11	4' 48"	+17	2' 28"	— 6
2	1 46	—14	2 55	—13	2 23	—30	2 4	—12	4 33	+32	2 15	+ 7
3	1 29	+ 3	2 23	+19	1 59	— 6	1 57	— 5	5 8	— 3	2 5	+17
4	2 6	— 34	3 2	—20	1 45	+ 8	2 5	—13	5 9	— 4	2 36	—14
5	1 46	—14	2 56	—14	2 13	—20	1 33	+19	5 17	—12	1 55	+27
6	0 58	+34	2 23	+19	1 21	+32	1 59	— 7	5 48	—43	2 49	—27
7	1 45	—13	2 34	+ 8	2 4	—11	2 2	—10	4 35	+30	2 31	— 9
8	1 30	+ 2	2 46	— 4	2 12	—19	1 35	+17	5 5	0	2 29	— 7
9	1 4	+28	2 31	+11	1 44	+ 9	1 40	+12	4 44	+21	2 12	+10
10	1 30	+ 2	3 3	—21	1 52	+ 1	2 2	—10	5 43	—38	2 23	— 1
m	1 32		2 42		1 53		1 52		5 5		2 22	
F_m	± 20"2		± 16"8		± 21"8		± 12"9		± 26"1		± 15"8	
F_w	± 13·5		± 11·2		± 14·6		± 8·6		± 17·4		± 10·6	

Mittelwerthe: $F_m = \pm 18"9$, $F_w = \pm 12"6$.

Tabelle C_9.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 5°50'$; $\zeta = \pm 5''$.

	S. 22		S. 23		S. 24		S. 25		S. 26		S. 27	
	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	2' 25"	−3	1' 56"	−6	1' 34"	+18	1' 55"	−9	3' 50"	−3	1' 57"	−5
2	2 12	+10	2 1	−11	2 0	−8	2 6	−20	3 32	+15	1 50	+2
3	2 32	−10	1 35	+15	1 39	+13	1 39	+7	3 46	+1	1 58	−6
4	2 3	+19	2 5	−15	1 30	+22	2 2	−16	3 50	−3	1 46	+6
5	2 28	−6	1 50	0	1 53	−1	2 0	−14	3 53	−6	2 17	−25
6	2 29	−7	2 18	−28	1 54	−2	1 30	+16	3 44	+3	1 27	+25
7	2 2	+20	1 33	+17	2 6	−14	1 37	+9	3 39	+8	1 54	−2
8	2 35	−13	1 40	+10	2 4	−12	1 40	+6	3 36	+11	1 51	+1
9	2 37	−15	1 30	+20	2 5	−13	1 27	+19	3 53	−6	1 44	+8
10	2 18	+4	1 55	−5	1 50	+2	1 47	−1	4 7	−20	1 52	0
m	2 22		1 50		1 52		1 46		3 47		1 52	
F_m	± 12'8		± 15'7		± 13'2		± 13'8		± 10'1		± 12'6	
F_w	± 8·5		± 10·4		± 8·8		± 9·2		± 6·7		± 8·4	

Mittelwerthe: $F_m = 13'0$, $F_w = \pm 8'7$.

Tabelle C_3.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 6°$; $\zeta = 30'' \pm 5''$.

	S. 28		S. 29		S. 30		S. 31		S. 32		S. 33	
	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ	α	Δ
1	5' 10"	+ 8·4	7' 19"	+ 7	2' 34"	−10·7	1' 22"	+15·7	4' 33"	+ 9	3' 57"	+ 3
2	5 11	+ 7·4	7 37	−11	2 19	+ 4·3	1 48	−10·3	4 37	+13	4 3	+ 9
3	5 24	− 5·6	7 36	−10	2 31	− 7·7	1 30	+ 7·7	4 31	+ 7	3 52	− 2
4	5 18	+ 0·4	7 20	+ 6	2 21	+ 2·3	1 43	− 5·3	4 14	−10	3 53	− 1
5	5 16	+ 2·4	7 16	+10	2 16	+ 7·3	1 36	+ 1·7	4 14	−10	4 10	+16
6	5 29	−10·6	7 31	− 5	2 30	− 6·7	1 45	+ 7·3	4 23	− 1	3 35	−19
7	5 10	+ 8·4	7 6	+20	2 18	+ 5·3	1 34	+ 3·7	4 18	− 6	4 2	+ 8
8	5 30	−11·6	7 16	+10	2 37	−13·7	1 52	−14·3	4 16	− 8	3 48	− 6
9	5 18	+ 0·4	7 45	−19	2 14	+ 9·3	1 47	− 9·3	4 23	− 1	3 51	− 3
10	5 18	+ 0·4	7 33	− 7	2 13	+10·3	1 20	+17·7	4 30	+ 6	3 51	− 3
m	5 18·4		7 . 26		2 23·3		1 37·7		4 24		3 54	
F_m	± 7"31		± 12"21		± 8"84		± 11"13		± 8"42		± 9"60	
F_w	± 4·87		± 8·14		± 5·89		± 7·42		± 5·61		± 6·40	

Mittelwerthe: $F_m \mp = 9 \cdot 59$, $F_w = \pm 6"39$.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der Beobachtungen für die wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung übersichtlich zusammengestellt. Neben den Fehlerwerthen in Secunden sind noch die entsprechenden Helligkeitsdifferenzen ausgedrückt in Procenten der mittleren Helligkeit des Feldes, berechnet nach der im Art. III gegebenen Formel, aus welcher folgt:

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{4 F_w''}{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}$$

eingetragen. Für ε wurde in der dritten Zeile der Mittelwerth aus C_1, C_2 und C_3 angesetzt.

F_w.

ε	zweitheilig	dreitheilig		ζ
1° 10'	2"3, 0·44%	.	0"9, 0·18%	± 5"
2 40	5·4, 0·45	.	3·0, 0·25	±12
5 53	12·6, 0·47	8"7, 0·33%	.	± 5
		.	6·4, 0·25	30"± 5

Nachdem, wie schon bemerkt wurde, die mittlere Helligkeit des Gesichtsfeldes bei allen Beobachtungen nahezu gleich war, so ist dasselbe auch bezüglich der Unterschiedsempfindlichkeiten und der den Feldern entsprechenden Helligkeitsunterschiede ΔJ anzunehmen. Es sollten also die Werthe von F_w, ausgedrückt in Procenten der mittleren Helligkeit, unter sonst gleichen Umständen, d. h. bei derselben Einrichtung des Feldes, übereinstimmen. Wie die obige Tabelle zeigt, ist das auch sehr nahe der Fall, sowohl für das zweitheilige Feld, als auch für das dreitheilige, wenn dasselbe auf das Maximum der Genauigkeit eingerichtet ist. Zudem stimmt der Werth von F_w für das zweitheilige Feld nahe überein mit dem gewöhnlich angenommenen Werthe, d. i. 0·5% (Art. III) bei photometrischen Messungen nach dem Gleichheitsprincipe unter günstigen Beob-

achtungsbedingungen. Beim dreitheiligen Felde ist derselbe schon bei Parallelstellung der Seitenprismen erheblich kleiner.

Ich glaube hiermit durch die Beobachtungen nachgewiesen zu haben, dass durch Dreitheilung des Feldes das Doppelte der Genauigkeit des zweitheiligen Feldes erreicht werden kann und dass der wahrscheinliche Fehler des Resultates bei 10 Einstellungen für grosse Werthe des Halbschattenwinkels von 6° den geringen Betrag von 2″ noch nicht überschreitet.

Andere Einstellungsmethoden als die von mir angewendete werden wohl grössere Fehler ergeben, aber die bedeutende Überlegenheit des dreitheiligen Feldes über das zweitheilige, wird auch für diese bestehen bleiben.

VII.

Wie im Art. III hervorgehoben wurde, beziehen sich die Einstellungen auf eine Helligkeitsdifferenz u_1, die in der Nähe des Schwellenwerthes der Unterschiedsempfindlichkeit liegt. So wie dieser kein scharf bestimmbarer ist und je nach Umständen bedeutenden Schwankungen unterliegt, so wird gleiches auch für jene Helligkeitsdifferenz der Fall sein, und es ist noch zu erwägen, in wie weit diese Veränderlichkeit die Bestimmung des Nullpunktes, oder allgemeiner, die Stellung für gleiche objective Helligkeit beeinflussen kann.

Macht man zuerst eine Serie von Einstellungen von der einen Seite her und dann eine zweite von der anderen Seite, so könnte sich diese letztere auf einen anderen Werth von u_1 beziehen, so dass dann das Mittel aus beiden Serien nicht dem Nullpunkt entspräche. Gewiss ist eine vollkommene Gleichheit von u_1 für beide Serien nicht anzunehmen, es frägt sich nur, ob die Unterschiede so gross sind, dass dadurch die Genauigkeit der Einstellungen illusorisch wird, wenn es sich um Ermittlung der objectiven Gleichheitsstellung handelt.

Offenbar wird das Bedenken weniger ins Gewicht fallen bei Einstellungen mit alternirender Einstellungsrichtung.

Die Beantwortung der aufgeworfenen Frage kann natürlich nur dadurch erfolgen, dass man eine Reihe von Nullpunktsbestimmungen ausführt und nachsieht, ob dieselben die gleiche

Nullpunktsstellung ergeben. Voraussetzung ist hierbei die Unveränderlichkeit des Apparates, und zwar sollte dieselbe bis auf einige Secunden gesichert sein. Solche Constanz kann bei der Aufstellungsart meines Polarimeters nur für kleinere Zeitintervalle angenommen werden und auch für solche sind Nullpunktsänderungen von obiger Grösse durch Erschütterungen, denen mein Beobachtungsraum ausgesetzt ist, nicht ausgeschlossen.

Es wurden desshalb immer nur zwei Beobachtungsserien miteinander verglichen, und zwar immer eine Serie, bei welcher die Einstellungsrichtung erst nach der halben Zahl aller Einstellungen gewechselt wurde, mit einer, bei welcher die Richtung alternirte. Letztere war von ersterer eingeschlossen, wodurch eine gleichförmige Änderung des Nullpunktes eliminirt wurde.

In den folgenden Tabellen sind wieder die einzelnen Einstellungen nach ihrer Reihenfolge numerirt. Die Zeichen M.d. und M.h. bedeuten, dass die betreffende Einstellung so gemacht wurde, dass anfänglich das Mittelfeld dunkler, beziehungsweise heller war, als die Seitenfelder.

Da der Winkel, welcher der Helligkeitsdifferenz u_1 und dem Interstitium entspricht, dem Halbschattenwinkel nahezu proportional ist, habe ich mich auf Beobachtungen mit grossem Halbschattenwinkel beschränkt. Durch die erste Serie sollte zudem ermittelt werden, ob bei alternirender Einstellungsrichtung andere Werthe der mittleren Fehler sich ergeben. Es wurde daher diese Serie, die in Tabelle D_1 zusammengestellt ist, auf zehn zusammengehörige Einstellungen ausgedehnt, während die folgenden Serien nur sechs enthalten, ohne Angabe der mittleren Fehler einer Einstellung, deren Angabe im Einzelnen bei einer geringeren Zahl von Beobachtungen gegenüber den obigen Bestimmungen nicht von Interesse wäre.

Der wahrscheinliche Fehler des Resultates (Tabelle D_1), berechnet aus den 20 Beobachtungen I und IV oder II und III, ergibt $\pm$ 1'5, so dass also die Abweichungen der beiden Nullpunktsbestimmungen von ihrem Mittel diesen Werth nicht überschreiten.

Zugleich zeigt sich, dass die Einstellungsfehler bei alternirender Einstellungsrichtung im Mittel dieselben bleiben, wie

Tabelle D_1.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 0°$; $\zeta = 20'' \pm 5''$.

M. h.			M. h.				M. d.				M. d.		
I	α	Δ	II	α	Δ	Δ'	III	α	Δ	Δ'	IV	α	Δ
1	3' 15"	+4"	11	2' 52"	−1"5	12"	12	2' 37"	10"	−3"	31	2' 26"	10"
2	3 23	+12	13	2 56	2·5	16	14	2 42	15	2	32	2 7	−9
3	3 6	5	15	2 55	1·5	15	16	2 36	9	−4	33	2 27	11
4	2 50	21	17	3 1	7·5	21	18	2 30	3	−10	34	2 11	−5
5	3 10	1	19	2 44	−9·5	4	20	2 27	0	−13	35	2 16	0
6	3 4	7	21	2 38	−5·5	−2	22	2 6	−11	−24	36	2 8	−8
7	3 17	+6	23	3 0	6·5	20	24	2 44	17	4	37	2 7	−9
8	3 30	+19	25	3 11	17·5	31	26	2 24	−3	−16	38	2 9	−7
9	3 7	4	27	2 40	−13·5	0	28	2 7	−20	−33	39	2 29	13
10	3 5	−6	29	2 58	4·5	18	30	2 20	−7	−20	40	2 20	4
Fm	11"2			9"1				11"9				8"9	
Fw	7·5			6·1				7·9				5·9	
m	3' 10·7			2' 53·5				2' 27·3				2' 16·0	

Nullpunkt aus I und IV ...... 2' 43"4 ± 1"5

» » II » III ...... 2 40·4 ± 1·5

Gesammtmittel .... 2 41·9

(I) − (IV) = 54"7; (II) − (III) = 26"2.

bei Einstellungen von einer Seite her, wenn man nur im ersteren Falle von den Einstellungen M.h. und M.d. aus jeder Gruppe gesondert und für sich, wie es geschehen muss, die Fehler rechnet. Würde man hingegen die Abweichungen vom Nullpunkt, in unserem Falle von 2′40ʺ4, der Rechnung zu Grunde legen, welche in obiger Tabelle unter Δ' verzeichnet sind, so würden schon die Grössen und Vorzeichen der Differenzen und ihre Vertheilung einen systematischen Fehler anzeigen. Natürlich ergibt sich auch ein bedeutend grösserer Werth für den wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung (11″ statt 7″ in unserem Falle).

Auffallend ist die grosse Differenz in den Werthen des Interstitiums. Für einseitige Einstellung ist derselbe etwas grösser, als nach dem im Art. III angegebenen Werthe des Interstitiums bei $\zeta = 20''$ $(61''-20'' = 41'')$ zu erwarten wäre, bei alternirender Einstellung ist er jedoch bedeutend kleiner. Offenbar wirkt hier die Erinnerung an das Aussehen der Felder bei der vorangegangenen Einstellung auf die nachfolgende ein.

Analoge Resultate ergeben auch die folgenden Beobachtungsserien der Tabellen D_2 und D_3.

Aus den Differenzen der Mittelwerthe (I), (IV) und (II), (III) geht hervor, dass für beide Arten von Einstellungen das Interstitium Änderungen unterliegt, die bis auf die Hälfte seines Maximalwerthes ansteigen und gleiches wird auch bezüglich der Helligkeitsdifferenz an der Unterschiedsschwelle anzunehmen sein, so dass von einem einigermassen festen Schwellenwerthe bei gegebener mittlerer Helligkeit nicht gesprochen werden kann. Mit diesem Umstande wird man bei Helligkeitsmessungen nach den verschiedensten Methoden zu rechnen haben.

Trotzdem stimmen aber die Nullpunkte sehr gut überein und ihre Abweichungen vom Mittel überschreiten nicht den wahrscheinlichen Fehler des Resultats bei sechs Einstellungen. Ferner ergibt sich im Mittel aus allen 16 Serien in Übereinstimmung mit Tabelle F_w gleich 6ʺ5.

Während der vier Nullpunktsbestimmungen, welche die Tabellen D_2 und D_3 enthalten, blieb das Polarimeter völlig unberührt. Der Nullpunkt hatte sich innerhalb 11 Tagen um 47″, also um 4ʺ6 pro Tag in gleichem Sinne verschoben.

Tabelle D_2.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 6°, \zeta = 25'' \pm 5''$.

a) **26. November 1895**

M. h.		M. d.		M. h.		M. d.	
I	α	II	α	III	α	IV	α
1	4' 24"	7	5' 18"	8	4' 44"	19	5' 34"
2	4 20	9	4 56	10	4 54	20	5 20
3	4 40	11	5 1	12	4 31	21	5 18
4	4 36	13	4 55	14	4 39	22	5 24
5	4 21	15	4 49	16	4 43	23	5 14
6	4 33	17	5 0	18	4 35	24	5 27
m ...	4 29		4 59·8		4 41		5 22·8

Nullpunkt aus I und IV ...... 4' 55"9—2"7
» » II » III ...... 4 50·4+2·8
Gesammtmittel .... 4 53·2

(IV)—(I) = 53"8, (II)—(III) = 18"8.

b) **27. November 1895**

M. d.		M. h.		M. d.		M. h.	
I	α	II	α	III	α	IV	α
1	4' 57"	7	4' 55"	8	5' 3"	19	4' 35"
2	5 18	9	4 53	10	5 5	20	4 51
3	5 29	11	4 46	12	5 22	21	4 35
4	5 16	13	4 34	14	5 15	22	4 32
5	5 36	15	4 53	16	5 9	23	4 35
6	5 16	17	4 35	18	4 55	24	4 44
m ...	5 18·7		4 46		5 8·2		4 38·7

Nullpunkt aus I und IV ...... 4' 58"7—0"8
» » II » III ...... 4 57·1+0·8
Gesammtmittel .... 4 57·9

(I) — (IV) = 40"0; (III) —(II) = 22"2.



Tabelle D_3.

Gesichtsfeld dreitheilig. $\varepsilon = 6°$; $\zeta = 25'' \pm 5''$.

a) 30. November 1896

M. h.		M. d.		M. h.		M. d.	
I	α	II	α	III	α	IV	α
1	5' 26"	7	5' 32"	8	5' 23"	19	5' 22"
2	5 7	9	5 26	10	5 28	20	5 44
3	5 10	11	5 40	12	5 0	21	5 58
4	5 12	13	5 33	14	5 21	22	5 50
5	5 9	15	5 20	16	5 13	23	5 36
6	4 50	17	5 23	18	5 4	24	5 54
m . . .	5 9		5 29		5 14·8		5 44

Nullpunkt aus I und IV . . . . . . 5' 26"5—2"3
» » II » III . . . . . . 5 21·9+2·3
Gesammtmittel . . . . 5 24·2

(IV)—(I) = 35"; (II)—(III) = 14"2.

b) 7. December 1896

M. d.		M. h.		M. d.		M. h.	
I	α	II	α	III	α	IV	α
1	5' 45"	7	5' 28"	8	5' 41"	19	5' 29"
2	5 59	9	5 13	10	5 53	20	5 30
3	5 44	11	5 45	12	5 59	21	5 10
4	5 48	13	5 33	14	5 38	22	5 47
5	5 55	15	5 36	16	5 59	23	5 31
6	5 52	17	5 52	18	5 37	24	5 29
m . . .	5 50·5		5 34·5		5 47·8		5 29·3

Nullpunkt aus I und IV . . . . . . 5' 39"9+0"7
» » II » III . . . . . . 5 41·2—0·6
Gesammtmittel . . . . 5 40·6

(I)—(IV) = 21"2; (III)—(II) = 13"3.

VIII.

In den Berichten über die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt ist wiederholt auf polarimetrische Arbeiten, und insbesondere auf die Construction eines neuen Polarimeters für diese hingewiesen worden, welche die den gebräuchlichen Polarimetern noch anhaftenden Mängel zu beseitigen gestatten sollte. Correcter Strahlengang, vollständiges Verschwinden der störenden Trennungslinie, Anwendbarkeit spectralen, also wohl definirten Lichtes und Erhöhung der Empfindlichkeit durch Verwendung des Contrastprincipes, sollen an dem neuen Instrumente verwirklicht werden.

Bei so allgemein gehaltenen Angaben ist es natürlich nicht möglich zu entnehmen, was im Speciellen an meinem Polarimeter noch als zu mangelhaft und daher verbesserungsbedürftig angesehen wird. Auch die weitere Bemerkung, dass dieser wohl für relative Messungen vorzüglich geeignet sei, ist mir unverständlich. Es möge mir jedoch gestattet sein, demgegenüber die folgenden Bemerkungen hier einzuschalten.

Wählt man die Beleuchtungslinse am Polarimeter, die Stellung der Lichtquelle und das Beobachtungsfernrohr in der von mir angegebenen Weise, so wird, glaube ich, der Strahlengang durch den Apparat bis in das Auge des Beobachters vollkommen correct sein. Die Anwendbarkeit beliebiger heterogener und homogener Lichtquellen bei beliebiger Begrenzung der letzteren und bei Veränderlichkeit der Beschattung wurde vom Anfange an als ein Hauptvortheil meiner Construction erkannt.

Wenn ich das Spectrometer ganz von dem eigentlichen Polarimeter trennte, so waren auch für diese Anordnung mancherlei Gründe massgebend. So dürfte es nur auf diese Weise möglich sein, die sehr störenden Reflexe an den Innenwandungen der Flüssigkeitsrohre zu vermeiden. Jedenfalls gestattet aber diese Trennung den Grad der Homogeneität den jeweiligen Umständen anzupassen und mit beliebiger Schärfe zu definiren. Übrigens habe ich selbst absolute Bestimmungen über das Drehungsvermögen des Quarzes aus-

geführt,[1] die nur desshalb nicht genügend genau ausfielen, weil mein Spectrometer zu geringe Dispersion hatte.

Was die hinreichende Schärfe der Trennungslinie anbelangt, so habe ich schon oben bemerkt, dass diese unschwer zu erreichen sei; es dürften aber wohl Apparate vorkommen, an denen die Halbprismen nicht genau genug gearbeitet oder justirt sind. Immerhin fordert diese Justirbarkeit eine etwas complicirtere Einrichtung des Polarimeters, und es wäre eine erwünschte Vereinfachung, wenn die Halbprismen ganz umgangen werden könnten und die scharfe Trennungslinie der Felder in anderer Weise erreichbar würde.

Bei seinen Versuchen, den Lummer-Brodhun'schen Photometerwürfel auf Polarimeter anzuwenden, stiess Herr Lummer auf eine derartige neue und sehr interessante Einrichtung eines Polarisators, welche er unter dem Titel: »Über ein neues Halbschattenprincip« in der Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1895, S. 293[2] beschrieben hat. Dieselbe würde auf die einfachste Weise auch die Drei- oder beliebige Mehrtheilung des Feldes herzustellen geeignet sein.

Dieser neue Polarisator besteht aus einem Nicol'schen Prisma, welcher vor die Kathetenfläche eines rechtwinkeligen, möglichst spannungsfreien Glasprismas gesetzt ist; das Nicol ist um seine zur Kathetenfläche senkrechte Längsaxe drehbar. Die Hypothenusenfläche des Glasprismas wird erst versilbert und dann vom Silberbelag ein Theil, etwa ein mittlerer Streifen, parallel den brechenden Kanten herausgenommen. Denkt man sich das Nicol zuerst so gestellt, dass seine Polarisationsebene mit der Reflexionsebene zusammenfällt, mit dieser also das Azimut Null bildet, so wird auch das an den Silber- und Glasflächen reflectirte, aus der zweiten Kathetenfläche austretende Licht geradlinig und in der Reflexionsebene polarisirt sein. Dreht man aber das Nicol um das Azimut α aus dieser Stellung heraus, so werden die Polarisationsebenen der von der freien und von der Glas—Silberfläche reflectirten Strahlen gegen die

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, Abth. II, Juli 1890, S. 722.

[2] Siehe auch: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 66. Versammlung zu Wien, 2. Theil, 1. Hälfte, S. 79.

Reflexionsebene ebenfalls gewisse Azimute α_1 und α_2 haben, so dass also das aus der freien Glas- und den Glas—Silberflächen gebildete Feld sich verhalten wird, wie unser dreitheiliges Feld bei paralleler Stellung der Seitenprismen und einem Halbschattenwinkel gleich $\alpha_2 - \alpha_1$. Da diese Differenz mit α wächst, so ist zugleich die Möglichkeit gegeben, den Halbschattenwinkel innerhalb gewisser, aber ziemlich naher Grenzen zu verändern. Die Ränder der Felder sind natürlich mit vollkommener Schärfe herstellbar.

Hiermit wäre allerdings eine sehr schöne Construction eines Halbschatten-Polarisators gegeben, wenn nicht Nebenumstände hinzutreten würden, die, wie mir scheint, die Anwendbarkeit dieses neuen Princips, wenigstens für feinere Messungen, um die es sich doch eigentlich handelt, gänzlich vereiteln müssen.

Ein erstes Bedenken betrifft den Umstand, dass das polarisirte Licht eine Glasschichte von bedeutender Dicke, 2 bis 3 *cm*, zu durchlaufen hat. War auch das Glasprisma ursprünglich vollkommen spannungsfrei, so werden doch durch seine Befestigung und durch ungleichmässige Erwärmung Spannungsdifferenzen auftreten, welche sofort die Gleichförmigkeit des Gesichtsfeldes in sehr merkbarer und ganz uncontrolirbarer Weise stören. Ich habe des öftern Gelegenheit gehabt, an meinem Polarimeter die grosse Empfindlichkeit für minimale Inhomogeneitäten in Glaskörpern von 1 *cm* Dicke, die durch Temperaturänderungen an bestimmten Stellen hervorgerufen wurden, zu constatiren.

Eine weitere Unvollkommenheit wird durch die Glas—Silberflächen bedingt. Durch die Güte des Herrn Haensch in Berlin konnte ich ein mir zur Ansicht eingesandtes Glasprisma mit theilweise versilberter Hypothenusenfläche untersuchen. Bei kleinem Azimut α, also auch bei kleinem Halbschattenwinkel und grosser Beschattung zeigt sich, dass die Glas—Silberflächen nicht gleichmässig verdunkelt werden, es treten vielmehr unregelmässig vertheilte hellere und dunklere Stellen auf, die wohl in einer ungleichförmigen Vertheilung der Dichte oder der Spannung im Silberbelag ihren Grund haben dürften. Ferner zeigt sich eine Andeutung des dunkeln Eliminations-

streifens, wie bei der Reflexion an einer Glasfläche, welcher beim Drehen des Analysators durch das Gesichtsfeld wandert.[1] Endlich bemerkt man an den Rändern, offenbar durch die Wirkung des geführten Schnittes zum Zwecke der Entfernung des Silberstreifens, eine Aufhellung, so dass auch hier ein vollkommenes Verschwinden der Trennungslinien kaum eintreten wird. Bei geringerer Beschattung treten diese Erscheinungen entsprechend der geringeren Empfindlichkeit wohl mehr und mehr zurück, bleiben aber doch wahrnehmbar, wenn man einmal auf sie aufmerksam geworden ist.

Der schlimmste Fehler aber, welcher dem Polarisator anhaftet und der immer vorhanden sein wird, wenn es auch gelingen sollte, die eben besprochenen Unvollkommenheiten zu beseitigen, ist die elliptische Polarisation des austretenden Lichtes. Sie kommt durch die Reflexion an der Hypothenusenfläche zu Stande, ist besonders an den Glas—Silberflächen schon bei kleinem Azimut α sehr merkbar und nimmt mit α, also auch mit ε rasch zu. Durch diese elliptische Polarisation wird die Empfindlichkeit gegenüber einem geradlinig polarisirten Felde bedeutend herabgesetzt.

Nehmen wir an, es sei ein zweitheiliges Feld gegeben, dessen eine Hälfte geradlinig polarisirt ist, die Amplitude sei A. Die andere Hälfte soll elliptisch polarisirt sein und es sei die grosse Axe der Ellipse A, die kleine $\varkappa A$ und der Winkel, welchen die Richtung der grossen Axe mit der Schwingungsrichtung der ersten Gesichtsfeldhälfte bildet, werde mit ε bezeichnet. Der Analysator habe eine Stellung, bei welcher beide Gesichtsfeldhälften gleiche oder doch sehr nahe gleiche objective Helligkeit haben, die mit J bezeichnet seien. Die Empfindlichkeit der Einstellung wird dann umgekehrt proportional jenem Drehungswinkel δ' des Analysators sein, durch welchen eine vorgeschriebene Helligkeitsdifferenz ΔJ hervorgebracht, oder durch welchen eine schon vorhandene sehr kleine Helligkeitsdifferenz um ΔJ vergrössert (oder verringert) wird.

Wenn wir $\varkappa$ hinreichend klein voraussetzen, so dass die Glieder mit $\varkappa^4$ als Factor bereits vernachlässigt werden dürfen,

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. LXXXV, Abth. II, 1882, S. 279.

so erhält man durch eine Annäherungsrechnung für δ'

$$\delta' = \frac{\Delta J}{J}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{4}\left(1+\frac{x^2}{1-\cos\varepsilon}\right),$$

was, wenn wir den Drehungswinkel δ einführen, welcher bei beiderseitig linear polarisirten Feldern dieselbe Helligkeitsdifferenz ΔJ erzeugt, also setzen

$$\delta = \frac{\Delta J}{J}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{4},$$

noch einfacher so geschrieben werden kann:

$$\delta' = \delta\left(1+\frac{x^2}{1-\cos\varepsilon}\right).$$

Hierin ist x Function von ε, die verschwindet für $\varepsilon = 0$. Da ε höchstens 5—6° betragen wird, kann man auch setzen

$$\delta' = \delta\left(1+2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\right).$$

[illegible] dass, weil $\frac{x}{\varepsilon}$ [illegible] werden [illegible] für $\varepsilon = 0$, x [illegible] Nach einer [illegible] Schätzung ist anzunehmen, dass z. B. für $\varepsilon = 1°$ x grösser als [illegible] Setzen wir $x =$ [illegible], so wäre [illegible] halb so gross als [illegible]

III.

[illegible]

sein, ob diese in der Überlegenheit des Contrastprincipes ihren eigentlichen Grund hat, d. h. ob wirklich das Auge die Fähigkeit besitzt, die Gleichheit von Helligkeitsdifferenzen, wenn diese hinreichend klein sind, schärfer zu bestimmen, als die der Helligkeiten selbst.

Um diese Frage zu beantworten, wären die Einstellungsfehler zu bestimmen, welche die beiden Methoden ergeben, wobei darauf zu achten ist, dass in beiden Fällen die günstigsten Bedingungen für die Vergleichung der Felder eingehalten und nur solche Beobachtungen mit einander verglichen werden, die unter sonst gleichen Umständen ausgeführt wurden. Zu den letzteren wird die Gleichheit der mittleren Helligkeit oder der Beschattung des Feldes zu rechnen sein, bei welcher die Einstellungen gemacht werden. Vor Allem aber dürfen zur Entscheidung der Frage nur Beobachtungen an derartig eingerichteten Feldern herangezogen werden, bei denen gleiche Verschiebungen der Einstellvorrichtung, z. B. gleichen Drehungen des Analysators, im Halbschattenfeld einerseits und im Contrastfelde anderseits, untereinander gleiche Änderungen der Helligkeiten, beziehungsweise der Contraste, hervorbringen. Wäre das nicht der Fall, so liesse sich auch nicht entscheiden, ob der auftretende Unterschied in den Genauigkeiten auf Rechnung des Vergleichungsprincipes oder auf Rechnung der besonderen Einrichtung des Feldes zu setzen sei.

Nachdem die im Art. V angegebene Einrichtung des dreitheiligen Feldes auf sehr einfache Weise eine solche Stellung der Prismen ermöglicht, um nach dem Contrastprincipe einstellen zu können, habe ich auch einige diesbezügliche Beobachtungsreihen ausgeführt, die ich noch im Folgenden mittheilen will. Sie ergeben, wie ich erwartet, das Resultat, dass kleine Helligkeitsdifferenzen nicht schärfer als Helligkeiten unterschieden werden.

Wie man zu verfahren hat, um das Feld für solche Beobachtungen herzustellen, ergibt sich aus den folgenden Bemerkungen.

Wir geben zunächst den Hauptschnitten der beiden Seitenprismen 1 und 2 einen Neigungswinkel gleich ε, gleich

Der wahrscheinliche Fehler ist nur um 1″, beziehungsweise um 0·05% grösser als der für ein zweitheiliges Feld unter gleicher Beschattung nach dem Gleichheitsprincipe gefundene, wie ein Blick auf die Tabelle F_w zeigt, und man kommt daher in der That zu dem Resultate, dass das Contrastprincip unter sonst gleichen Umständen keine grössere Genauigkeit gewährt, als das Gleichheitsprincip.

Ein Einwand gegen die Richtigkeit dieser Behauptung könnte noch erhoben werden, nämlich der, dass die Einstellungen gar nicht nach gleichen Contrasten gemacht wurden, denn es ist nicht leicht für Jemanden, der nach gleichen Helligkeiten einzustellen gewohnt ist, sich von einer directen Vergleichung der Seitenfelder frei zu halten. In den meisten Fällen, in denen man das Contrastprincip verwendet, dürften auch directe Helligkeitsvergleichungen unbewusst immer mitspielen. Wären aber die mitgetheilten Einstellungen thatsächlich nur nach der Beurtheilung auf Gleichheit der Seitenfelder gemacht worden, dann hätten die Resultate wesentlich schlechter ausfallen müssen, denn die Felder 1, 2 befanden sich nicht in Contact miteinander, sondern in einer für Vergleichungen viel ungünstigeren Lage.

Es mag noch bemerkt werden, dass für mich wenigstens, über die Erfahrung Anderer kann ich nicht urtheilen, die Einstellungen nach gleichem Contrast ungemein ermüdend waren. Ich wäre nicht im Stande gewesen, nach den 20 bis 30 Beobachtungen noch weitere, halbwegs brauchbare zu machen. Es mag das von den Nachbildern der ungleich hellen Felder herrühren, die hier auch gegen das Ende einer Einstellung niemals verschwinden können. Schon aus diesem Grunde wäre, wo es angeht, an Stelle des Contrastprincipes das Gleichheitsprincip zu verwenden.

Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass ersteres ganz zu verlassen sei. Es kann sehr wohl Versuchsbedingungen geben, unter welchen die Felder nicht die für Helligkeitsvergleichungen günstigste Anordnung erhalten können, während sie für Contrastvergleichungen geeignet ist, dann werden die letzteren auch bessere Resultate ergeben.

Contrast von 7—10% erforderlich wäre, musste ich mich auf grössere Halbschattenwinkel von 5—6° beschränken. Die Lichtquelle war daher dieselbe, wie die zu den Beobachtungen der Tabelle C_1 verwendete. Den Contrast habe ich berechnet, indem ich hierzu die Winkel der Hauptschnitte (1, 2) = 5°50′, (3, 1) = 3′ und den Lichtverlust im Halbprisma zu 10% durch Helligkeitsmessungen bestimmte. Die Einstellungen wurden von derselben Seite her gemacht, für die eine Serie, indem zuerst immer das linke Feld dunkler als das rechte genommen wurde (L. d.), für die andere in entgegengesetzter Richtung (R. d.). Das Mittelfeld war heller als die Seitenfelder.

Tabelle *E.*

Gesichtsfeld dreitheilig; Halbschattenwinkel der Seitenfelder = 5° 50′; Contrast 7%.

L. d.			R. d.		
	α	Δ		α	Δ
1	4′ 9″	+13″	1	4′ 44″	—14″
2	4 22	0	2	4 14	+16
3	3 38	+44	3	4 12	+18
4	4 53	—31	4	4 33	— 3
5	4 34	— 12	5	4 47	—17
6	4 38	—16	6	3 52	+38
7	4 26	— 4	7	4 32	— 2
8	4 9	+13	8	4 53	—23
9	4 13	+ 9	9	4 51	—21
10	4 36	—14	10	4 26	+ 4
m	4 22		m	4 30	
F_m	20″9		F_m	19″8	
F_w	13 9		F_w	13·2	

Im Mittel ergibt sich

$$F_m'' = 20''3, \qquad F_m\% = 0\cdot77\%.$$
$$F_w'' = 13\cdot5, \qquad F_w\% = 0\cdot52\%.$$

viertheiligen Contrastfelde bei gleichem Contraste ein mittlerer Fehler von 0·385% zukommen und das stimmt sogar ganz genau mit dem von Lummer und Brodhun gefundenen Werthe.

Der eigentliche Grund für die grössere Genauigkeit des Contrastphotometers liegt also nicht in der grösseren Empfindlichkeit des Auges für Contrastunterschiede, sondern in der besonderen Einrichtung des Gesichtsfeldes. Es wäre ebenso unrichtig, wollte man aus der grösseren Genauigkeit des dreitheiligen Halbschattenfeldes gegenüber dem dreitheiligen Contrastfelde auf eine Überlegenheit des Gleichheitsprincipes über das Contrastprincip schliessen.

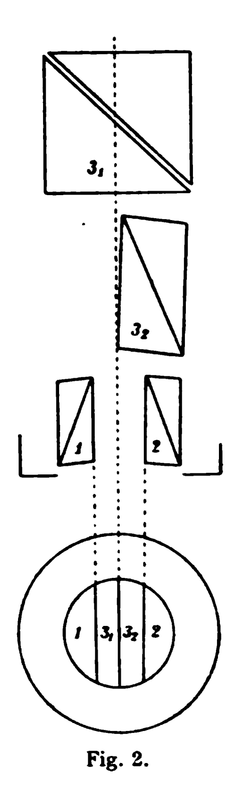


Fig. 2.

Das viertheilige Contrastfeld leistet dem dreitheiligen gegenüber genau dasselbe, wie das dreitheilige Halbschattenfeld gegenüber dem zweitheiligen: es gestattet die Genauigkeit zu verdoppeln. Im Übrigen aber sind die maximalen Genauigkeiten, die sich mit Hilfe der beiden photometrischen Principe erreichen lassen, im Wesentlichen die gleichen.

Es wäre nicht unmöglich, einen geeigneten Polarisator mit viertheiligem Contrastfelde zu construiren. Mit Hilfe dreier Halbprismen liessen sich auch die als wesentlich anzusehenden Bedingungen erfüllen, dass derselbe für beliebig farbiges Licht verwendbar und dass Beschattung und Contrast beliebig regulirbar seien. Nur würde der Umstand Schwierigkeiten bereiten, dass die Trennungslinien nicht gleichzeitig scharf gesehen werden könnten.

Verzichtet man jedoch auf die Unterstützung, welche die gleichzeitige Helligkeitsvergleichung an den beiden Theilen des Mittelfeldes gewähren kann, so ist die Schärfe der mittleren

Trennungslinie nicht von Belang und es genügt, die Visirkanten der Seitenprismen allein in eine zur Visirrichtung senkrechte Ebene zu legen. Eine derartige Zusammenstellung ist in der vorstehenden Figur 2 schematisch angegeben und dürfte durch dieselbe hinreichend verständlich sein; als Nicol 3_1 ist ein Glan'sches Luftnicol angenommen.

Da schliesslich die erreichbare Genauigkeit doch keine grössere würde, die Einstellungen aber ermüdender wären als beim dreitheiligen Halbschatten-Polarisator, so dürfte es sich kaum der Mühe lohnen, Versuche mit einer noch complicirteren Construction zu machen und ich unterlasse es daher, dieselbe näher zu beschreiben.

Über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle

von

Viktor v. Lang,
w. M. k. Akad.

(Mit 6 Textfiguren.)

1. Benützt man die Anschauungen, nach denen ich in meinem Lehrbuche der Krystallographie (Wien 1866) die damals bekannten Symmetriearten der Krystalle behandelte, zur Aufsuchung aller nach diesen Principien möglichen Symmetriearten, so kommt man auf 32 Abtheilungen, welche Zahl schon vorher von Hessel und später von Anderen gefunden wurde. Ob aber die durch geometrische oder rein mathematische Betrachtungen gewonnenen Fälle verschiedener Krystallformen wirklich physikalisch verschieden sind, konnte erst durch die Erfahrung gelehrt werden. Die intensive Untersuchung der Krystalle in neuerer Zeit hat es nun höchst wahrscheinlich gemacht, dass wirklich diese 32 verschiedene Fälle verschiedenen physikalischen Verhältnissen entsprechen, wenigstens fehlt nur mehr für zwei oder drei derselben die Bestätigung.

Da ich nun glaube, dass die Ableitung der 32 Abtheilungen aus den erwähnten Anschauungen gewisse Vortheile bietet und vielleicht Manchem willkommen ist, so will ich sie hier ausdrücklich vornehmen, obwohl die Sache eigentlich schon erledigt ist. Als einen Vortheil betrachte ich es, dass die folgende Ableitung nur schon längst in der Krystallographie eingebürgerte Begriffe benutzt und die in ganz beschränkter Zahl. Eine Ausnahme bildet höchstens der Begriff der Hemisymmetrie, auf dessen Wichtigkeit ich freilich schon vor 30 Jahren aufmerksam machte.

Ferner ist jeder Schritt der Ableitung innig mit der Frage nach Zahl und Anordnung der gleichwerthigen Richtungen eines Krystalles verknüpft; die gegenseitige Lage dieser Richtungen, welche die physikalischen Eigenschaften bestimmen, ist es ja vor Allem, die dem Gedächtnisse eingeprägt werden soll.

Auf dem eingeschlagenen Wege ergibt sich auch eine einfache consequente Nomenclatur für die einzelnen Abtheilungen und eine symbolische Bezeichnung für dieselben, welche leicht im Kopfe zu behalten ist, im Gegensatze zu der bei jedem Autor verschiedenen Numerirung.

Da ich schon früher bemerkte, dass die vorliegenden Zeilen nichts wesentlich Neues enthalten, brauche ich die wegen der Vollständigkeit unvermeidlichen Wiederholungen aus dem oben angegebenen Werke nicht weiter zu entschuldigen.

2. Wir beginnen mit der Untersuchung nach der Zahl und Anordnung der an Krystallen möglichen Symmetrieebenen. Es ist von vornherein klar, dass, wenn ein Krystall symmetrisch sein soll nach mehreren Ebenen, diese Ebenen auch symmetrisch unter sich angeordnet sein müssen. Man kann z. B. keine ebene Figur zeichnen symmetrisch nach zwei Linien, wenn diese zwei Linien nicht symmetrisch gegeneinander liegen, in diesem Falle also senkrecht auf einander stehen.

Nun lässt sich allerdings eine beliebige Anzahl (n) von Ebenen symmetrisch unter sich anordnen, und zwar auf zweierlei Weise:

Erstens. Man lässt alle n Ebenen unter gleichen Winkeln durch dieselbe Linie hindurchgehen.

Zweitens. Man lässt nur $n-1$ Ebenen so wie im vorhergehenden Falle unter gleichen Winkeln durch dieselbe Linie gehen und legt die n^{te} Ebene senkrecht zu dieser Linie.

Für die Fälle, dass n gleich 6 oder 9 ist, haben wir noch eine dritte Anordnung, bei der der ganze Flächencomplex symmetrisch mit Bezug auf jede einzelne seiner Flächen ist. Die sechs Halbirungsebenen der Winkel, welche drei zu einander senkrechte Ebenen bilden, sind nämlich ebenfalls allein oder in Verbindung mit diesen drei, wechselweise senkrechten, Ebenen symmetrisch unter sich angeordnet.

3. Die eben gefundenen Anordnungen von Symmetrieebenen können aber nur zum kleinsten Theile an Krystallen vorkommen, da diese Ebenen mögliche Flächen der Krystalle sein müssen. Ist nämlich ein Krystall symmetrisch mit Bezug auf eine Fläche U, und sind P, Q beliebige Flächen desselben, so erfordert die Symmetrie zwei weitere Flächen P', Q', so zwar, dass U in der Zone $[PP']$ und in der Zone $[QQ']$ liegt, also selbst eine mögliche Fläche des Krystalles sein muss. Nun sind aber, wie schon Hessel zeigte, zufolge des Gesetzes der Rationalität der Indices nur 2, 3, 4 oder 6 Flächen möglich, die sich in einer Linie unter gleichen Winkeln schneiden. Es bleiben also nur folgende Anordnungen übrig:

I1, I2, I3, I4, I6,
II2, II3, II4, II5, II7,
III6, III9.

4. Nun tritt aber noch eine weitere Reduction durch den Umstand ein, dass, wenn ein Krystall zwei zu einander senkrechte Symmetrieebenen U, V hat, derselbe auch schon symmetrisch nach der dazu senkrechten Ebene W ist. Man sieht nämlich sehr leicht ein, dass die vier Richtungen 1, 2, 3, 4, welche in der Gruppirung 1, 2 und 3, 4 der Symmetrie nach U, in der Gruppirung 1, 3 und 2, 4 der Symmetrie nach V genügen, in der letzten Gruppirung 1, 4 und 2, 3 der Symmetrie nach der Ebene W Genüge leisten.

5. Durch diesen Satz reduciren sich die an Krystallen möglichen Anordnungen von Symmetrieebenen auf die Fälle

00, I1, I3, II3, II5, II6, III9, *A*)

wenn wir den Fall, wo gar keine Symmetrieebene vorhanden ist, mit 00 bezeichnen. Lassen wir die Symmetrieebenen alle durch den Mittelpunkt einer Kugel gehen, so geben die sechs letzten Fälle auf derselben die in Fig. 1—6 dargestellten Durchschnitte.

In diesen Figuren sind diejenigen Symmetrieebenen, die zufolge ihrer symmetrischen Lage gegen andere Symmetrieebenen gleichwerthig, d. h. dieselben physikalischen Eigen-

schaften haben, mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Man findet aus den Figuren auch gleich die Anzahl und Anordnung der gleichwerthigen Richtungen, die durch diese Symmetrieebenen bedingt sind. Man braucht hiezu nur die Dreiecke abzuzählen, in welche die Halbkugel durch die Symmetrieebenen getheilt wird. Es ist auch leicht zu irgend einem Punkte in einem der Dreiecke die symmetrisch gelegenen in den anderen Dreiecken einzuzeichnen. So z. B. hat man für die Anordnung II 7 zwölf gleichwerthige Richtungen, die sich natürlich in speciellen

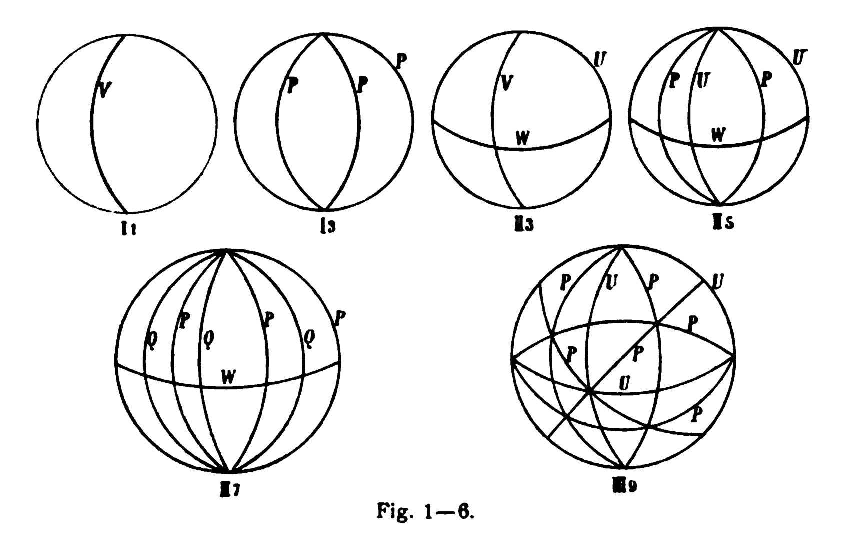


Fig. 1—6.

Fällen durch Zusammenfallen von je zwei oder vier auf weniger reduciren.

6. Durch das Vorhergehende sind aber nicht alle Fälle von Anordnungen gleichwerthiger Richtungen erschöpft. Wir erhalten die noch fehlenden durch die Untersuchung, ob die entwickelten gleichwerthigen Richtungen sich nicht vielleicht im Einklange mit den Symmetrieebenen der betreffenden Abtheilung in Gruppen von Richtungen zerlegen lassen, die sich, obwohl geometrisch noch immer gleichwerthig, doch physikalisch unterscheiden. Solche Gruppen müssen natürlich gleichviel Glieder haben, da sonst die Krystalle verschiedenen Symmetriegesetzen gehorchen müssten. Aus demselben Grunde muss die Anordnung der einzelnen Richtungen in diesen Gruppen

eine ähnliche sein, so dass aus einer Gruppe die anderen abgeleitet und alle Gruppen zur Deckung gebracht werden können.

Demzufolge muss also die Theilung der gleichwerthigen Richtungen in Gruppen so geschehen, dass die Symmetrie nach gleichwerthigen Symmetrieebenen auf gleiche Weise gestört oder aber erhalten bleibt. Endlich darf die Gruppirung nicht auf eine niedere Symmetrieart der Reihe A führen, da ja dies nichts Neues geben würde.

Die Ableitung der einzelnen Fälle gelingt leicht durch die Betrachtung der vorstehenden Figuren.

So können wir die vier gleichwerthigen Richtungen der Abtheilung II3 in vier Gruppen zu je einer Richtung zerlegen, was aber nur der durch 00 repräsentirte Fall ist. Ebenso führt jede Zerlegung in zwei Gruppen von je zwei Richtungen auf die Abtheilung I1.

Die Abtheilung II5 gibt eine neue Symmetrieart, bei der ihre acht gleichwerthigen Richtungen in zwei Gruppen zu vier Richtungen zerfallen; wir bezeichnen diese neue Abtheilung mit πII5; es ist die zur holosymmetrischen Abtheilung II5 zugehörige hemisymmetrische Abtheilung.

Ebenso erhält man zur Abtheilung I3 eine hemisymmetrische Abtheilung πI3, bei welcher die sechs gleichwerthigen Richtungen der Abtheilung I3 in zwei Gruppen von je drei gleichwerthigen Richtungen zerfallen.

Die dem Symbol II7 entsprechenden zwölf gleichwerthigen Richtungen lassen sich auf zwei verschiedene Arten in zwei Gruppen zu sechs Richtungen und ausserdem in vier Gruppen zu drei Richtungen abtheilen. Letztere Gruppirung entspricht aber dem Symbol πI3, so wie eine der beiden Gruppirungen zu sechs Richtungen auf das Symbol I3 führt, so dass wir aus II7 nur eine neue Symmetrieart erhalten, die wir mit πII3 bezeichnen.

Die Abtheilung III9 gibt ebenfalls eine hemisymmetrische Abtheilung πIII9. Im Ganzen bekommen wir also folgende Classe hemisymmetrischer Abtheilungen:

πI3, πII5, πII7, πIII9. *B*)

7. Da wir bisher vorausgesetzt haben, dass jede Gerade eines Krystalles nach ihren beiden Richtungen dieselben Eigenschaften, also axialen Charakter hat, so werden bei regelmässiger Ausbildung die Krystallflächen immer zu zweien vorkommen, die parallel sind und an den entgegengesetzten Seiten des Krystalles auftreten; auch werden solche Flächen immer dieselben physikalischen Eigenschaften haben. Krystalle, für welche das eben Gesagte gilt, nennen wir holoëdrische; sie sind, wenn regelmässig ausgebildet, von parallelen Flächen begrenzt. Nach den unter *A* und *B* gegebenen Symbolen sind 11 verschiedene Arten holoëdrischer Krystalle möglich, und zwar gibt Reihe *A* die holoëdrisch holosymmetrischen Abtheilungen, Reihe *B* die holoëdrisch hemisymmetrischen Abtheilungen.

8. Es ist aber der Fall denkbar, und derselbe ist schon im Beginne des Krystallstudiums beobachtet worden, dass senkrecht zu jeder der betrachteten gleichwerthigen Richtungen nur eine Fläche auftritt. Hiedurch entstehen hemiëdrische Formen, die geneigtflächig sind. Jede holoëdrische Form kann im Allgemeinen in zwei hemiëdrische Formen zerfallen, welche ebensoviel gleichwerthige Richtungen haben wie die holoëdrische Form, und wenn weiter nichts stattfinden würde, wäre es nicht gerechtfertigt, die hemiëdrischen Formen als neue Symmetriegruppe aufzufassen.

Nur wenn die entsprechenden Flächen der beiden zusammengehörigen Hemiëder verschiedene Eigenschaften zeigen, ist eine neue physikalische Symmetrieart vorhanden, welche offenbar damit zusammenhängt, dass in gewissen Krystallen die Richtungen polaren Charakter haben und die physikalischen Eigenschaften dieser Richtungen verschieden sind in dem einen und dem anderen Sinne.

So haben wir in der holoëdrischen Abtheilung II3 vier gleichwerthige axiale Richtungen, die in der entsprechenden hemiëdrischen Abtheilung ϰII3 in zwei Systeme von je vier gleichwerthigen polaren Richtungen übergehen.

Um nun zu finden, welches die zusammengehörigen polaren Richtungen der ursprünglichen axialen Linien sind, ist es am besten, wenn man die betreffende holoëdrische Form in zwei

geneigtflächige Hemiëder zerlegt, so zwar, dass die Symmetrie nach gleichwerthigen Symmetrieebenen auf gleiche Weise gestört wird, wobei wir den Fall, dass alle gleichwerthigen Flächen nur zu einer Seite einer Ebene liegen, später separat betrachten wollen. Dieser Process kann für die Classe *A* gleich an den früheren Figuren ausgeführt werden; in den Figuren 4, 5, 6 ist dies sogar auf zweierlei Art möglich, die wir als gyroëdrische (γ) und tetraëdrische ($\varkappa$) Hemiëdrie unterscheiden. Da auch die Abtheilungen 00, I1, I3 eine hemiëdrische Symmetrieart geben, so erhalten wir in der neuen hemiëdrisch holosymmetrischen Classe folgende Abtheilungen:

$\varkappa$00, $\varkappa$I1, $\varkappa$I3, $\varkappa$II3, γII5, γII7, γIII9,
τII5, τII7, τIII9. *C*)

9. Das eben Gesagte gilt aber genau so für die Abtheilungen der Classe *B*. Hier sind aber nur drei neue Anordnungen möglich, so dass die hemiëdrisch hemisymmetrische Classe bloss folgende Symbole enthält:

$\varkappa\pi$II5, $\varkappa\pi$II7, $\varkappa\pi$III9. *D*)

10. Wie wir schon angedeutet, kann die Zerlegung der Holoëder in zwei Hemiëder auch so vorgenommen werden, dass man nur die Flächen nimmt, die auf einer Seite einer Ebene *E* liegen und ebenso die auf der anderen Seite. Dieses Verfahren muss sich aber natürlich auch den ursprünglichen Symmetrieverhältnissen anschliessen. Die Ebene *E* muss also entweder eine Symmetrieebene selbst sein oder symmetrisch zu den vorhandenen Symmetrieebenen liegen. Im ersteren Falle darf die Symmetrieebene *E* keine gleichwerthigen haben, da ja sonst die Theilung auch nach diesen stattfinden müsste, was nicht möglich ist.

Wir nennen die eben beschriebene Art der Theilung Hemimorphie, für welche die Anordnung der gleichwerthigen (polaren) Richtungen ohneweiters erhalten wird. Die Classe *A* gibt so die hemimorphe holoëdrische Classe mit den Abtheilungen

μI1, μI3, μII3, μII5, μII7, *E*)

die Classe *B* aber die hemimorphe hemisymmetrische Classe, welche die Abtheilungen

$$\mu\pi I3, \qquad \mu\pi II5, \qquad \mu\pi II7 \qquad\qquad F)$$

enthält.

11. Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so haben wir für die an Krystallen möglichen Symmetrieverhältnisse die Classen

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F$$

mit beziehungsweise

$$7, \quad 4, \quad 10, \quad 3, \quad 5, \quad 3$$

Abtheilungen, im Ganzen also 32 Abtheilungen. Wir ordnen noch dieselben nach den 7 Abtheilungen der Classe *A*, aus denen sie entstanden sind und erhalten folgende Übersicht der 7 Krystallsysteme mit ihren Unterabtheilungen. Beigesetzt sind die betreffenden Nummern aus Groth, Physikalische Krystallographie, 3. Aufl., 1895, und aus Wülfing, Tabellarische Übersicht der einfachen Formen der 32 krystallographischen Symmetriegruppen, 1895.

	Groth	Wülfing	
00	2	31	triklin.
ϰ00	1	32	hemiëdrisch triklin.
I1	5	28	monoklin.
ϰI1	4	30	hemiëdrisch monoklin.
μI1	3	29	hemimorph monoklin.
I3	21	18	rhomboëdrisch.
ϰI3	18	24	hemiëdrisch rhomboëdrisch.
μI3	17	19	hemimorph rhomboëdrisch.
πI3	20	21	hemirhomboëdrisch.
μπI3	16	23	hemimorph hemirhomboëdrisch.
II3	8	25	rhombisch.
ϰII3	6	27	hemiëdrisch rhombisch.
μII3	7	26	hemimorph rhombisch.

	Groth	Wülfing	
II5	15	6	tetragonal.
γII5	12	10	gyroëdrisch tetragonal.
τII5	11	11	tetraëdrisch tetragonal.
μII5	14	7	hemimorph tetragonal.
πII5	13	8	hemitetragonal.
κπII5	9	12	hemiëdrisch hemitetragonal.
μπII5	10	9	hemimorph hemitetragonal.
II7	27	13	hexagonal.
γII7	24	17	gyroëdrisch hexagonal.
τII7	22	20	tetraëdrisch hexagonal.
μII7	26	14	hemimorph hexagonal.
πII7	25	15	hemihexagonal.
κπII7	19	22	hemiëdrisch hemihexagonal.
μπII7	23	16	hemimorph hemihexagonal.
III9	32	1	tesseral[1]
γIII9	29	3	gyroëdrisch tesseral.
τIII9	31	4	tetraëdrisch tesseral.
πIII9	30	2	hemitesseral.
κπIII9	28	5	hemiëdrisch hemitesseral.

[1] Die Bezeichnung »regulär« möchte ich nicht empfehlen wegen der Verwechslung des tesseralen Dodekaëder mit dem regulären Dodekaëder der Geometrie, welches ja ganz verschieden ist.

Einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen

von

J. Sobotka in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. April 1896.)

1. Es ist bekannt, dass eine Ringfläche von irgend einer doppeltberührenden Ebene nach zwei gleichen Kreisen geschnitten wird.

Dieser einfache Satz wird wohl in den meisten Werken über darstellende Geometrie bewiesen.[1] Obzwar der Beweis meistens elementar ist und sich aus der Construction des Schnittes ergibt, so befriedigt er insoferne nicht, als er erst durch mit der Construction nicht in Verbindung stehende Geraden vermittelt werden muss und nur für den Fall gilt, dass die doppelt berührende Ebene reell ist. Desshalb soll hier ein anderer Beweis für die erwähnte Eigenschaft erbracht werden.

Zu dem Behufe denken wir uns die Ringfläche R als Umhüllungsfläche von Kugeln, deren Mittelpunkte auf einem Kreise m liegen und deren Halbmesser alle dieselbe Länge r besitzen. Der Mittelpunkt M dieses Kreises ist zugleich Mittelpunkt der Ringfläche.

Alle Kugeln haben in Bezug auf M dieselbe Potenz; sie besitzen in Folge dessen eine gemeinschaftliche Orthogonalkugel **M**, welche in M ihren Mittelpunkt hat und die Berührungspunkte aller doppeltberührenden Ebenen enthält. Betrachten wir unter diesen unsere Schnittebene **E**. Diese schneidet die

[1] Cf. Dr. G. V. Peschka, Darstellende und projective Geometrie, IV. Bd., S. 330; Chr. Wiener, Lehrbuch der darst. Geom., II. Bd., S. 165 u. A. m.

Kugel M in einem grössten Kreise e und die erwähnten, von der Ringfläche umhüllten Kugeln in einer Reihe von Kreisen, welche e orthogonal schneiden, weil der Punkt M für sie dieselbe Potenz besitzt wie für die umhüllten Kugeln. Die so erhaltene Kreisreihe gehört somit dem durch e bestimmten Kreisnetze an. Der Mittelpunkt für irgend einen Kreis dieser Reihe ist die Orthogonalprojection des auf m liegenden Mittelpunktes derjenigen von R umhüllten Kugel, als deren Schnitt mit E sich dieser Kreis ergibt. Es liegen demgemäss die Mittelpunkte aller Kreise der betrachteten Kreisreihe auf der Orthogonalprojection m_t des Kreises m in die Ebene E. Diese Projection ist eine Ellipse, welche in M ihren Mittelpunkt und in den Berührungspunkten von E mit R die Scheitel der kleinen Axe hat; die Schnittpunkte von E mit m sind die Scheitel der grossen Axe.

Unsere Kreisreihe wird somit von sämmtlichen Kreisen gebildet, welche den Kreis e orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte auf dem diesen Kreis doppeltberührenden Kegelschnitte m_t liegen; sie ist in Folge dessen eine konische Kreisreihe, deren alle Kreise bekanntlich zwei feste Kreise u, v berühren, so dass diese die Umhüllungscurve von jenen bilden.

Die Umhüllungscurve der Schnittkreise der von R umhüllten Kugeln mit einer Ebene ist nun die Schnittcurve der Ebene mit R selbst.

Wir erkennen hiernach, dass u, v die Schnittkreise von E mit R sind. Aus den bekannten Eigenschaften einer conischen Kreisreihe folgt ferner, dass die Mittelpunkte von u und v die Brennpunkte von m_t sind und dass, da die Berührungspunkte der Ebene E mit R Nullkreise in der conischen Kreisreihe repräsentiren, diese Kreise durch die erwähnten Berührungspunkte gehen und somit gleich sind.

Trägt man demnach von M aus auf den in E gelegenen Durchmesser von m die Länge des Halbmessers für die von R umhüllten Kugeln auf beide Seiten auf, so erhält man in den Endpunkten der so übertragenen Strecken die Mittelpunkte der Schnittkreise u, v; dieselben sind überdies dem Kreise m gleich also dadurch völlig bestimmt.

Wir wollen noch wegen des Zusammenhanges mit dem Folgenden die durch W. Fiedler begründete cyklometrische Deutung unserer in E vorgenommenen Constructionen anführen. Wir nehmen da e als Kehlkreis eines gleichseitigen Rotationshyperboloides H, welches dadurch vollkommen bestimmt ist; dasselbe ist einschalig, wenn e reell, zweischalig, wenn e imaginär ist. Jedem Punkte von H entspricht ein Kreis in E, dessen Mittelpunkt in seiner Orthogonalprojection in die Ebene E und dessen Halbmesser gleich seinem Normalabstande von E ist. Den Punkten von H entsprechen in dieser Weise die Kreise des durch e als Orthogonalkreis festgelegten Kreisnetzes. Die conische Kreisreihe entspricht dann den Punkten des Schnittes von H mit einer durch den in E enthaltenen Durchmesser von m gehenden Ebene, und unsere Schnittkreise sind die Spuren in E der gleichseitigen Rotationskegel, welche durch den erwähnten Schnitt gelegt werden können.[1]

2. Wir wollen jetzt den Schnitt einer Ringfläche R mit einer die Rotationsaxe a derselben im Endlichen schneidenden Ebene E näher beachten.

Es sei O der Schnittpunkt von a mit E und n der Schnittkreis der Kugel M mit der Ebene von m. Zunächst ist klar, dass alle von der Ringfläche umhüllten Kugeln K,... nicht nur von der Kugel M, sondern von jeder Kugel, welche durch n geht,

[1] Würde man sich damit begnügen, den obigen Satz indirect zu beweisen, so könnte man sich darauf beschränken, einzig die Eigenschaft der Ellipse herbeizuziehen, dass die Summe der Leitstrahlen für alle Punkte derselben unveränderlich ist. Nimmt man nämlich zwei Kreise u, v, welche die Mittelpunkte F_1, F_2 haben und sich in den Punkten U, V schneiden, so ist der geometrische Ort von Mittelpunkten solcher Kreise, welche u und v berühren, im Falle dass U, V reell sind, eine Ellipse, welche F_1, F_2 zu Brennpunkten und U, V zu Scheiteln der Nebenaxe hat. Die Potenz für den Mittelpunkt M dieser Ellipse in Bezug auf die beiden Kreise ist gleich $-\overline{CU}^2$; also ist die Potenz von M in Bezug auf jeden der u und v berührenden Kreise gleich $+\overline{CU}^2$. Demzufolge schneiden alle diese berührenden Kreise den über UV als Durchmesser errichteten Kreis orthogonal. Umgekehrt, wenn man Kreise construirt, die auf einer Ellipse m_2 ihre Mittelpunkte haben und den über der kleinen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreis e orthogonal schneiden, so werden diese Kreise von zwei anderen Kreisen umhüllt, welche in den Brennpunkten der Ellipse ihre Mittelpunkte und die Länge der grossen Halbaxe zu Radien haben. Hieraus erhellt die Richtigkeit unseres Satzes ohneweiters.

orthogonal geschnitten werden. Die Axe *a* ist die Centrale des so erhaltenen Orthogonalkugelnbüschels. Es sei O diejenige Kugel in demselben, welche in *O* ihren Mittelpunkt hat. Der Punkt *O* hat dieselbe Potenz in Bezug auf alle Kugeln K,..., also auch in Bezug auf deren Schnittkreise *k*,... mit E. Diese Schnittkreise sind demgemäss orthogonal zu dem Schnittkreise *o* der Ebene E mit der Kugel O.

Die Schnittcurve [*k*] von R mit E ist hier also Umhüllungscurve von sämmtlichen Kreisen *k*,..., welche auf m_ε ihre Mittelpunkte haben und den Kreis *o* orthogonal schneiden. Hiebei ist m_ε wieder die Orthogonalprojection von *m* in E. Unsere Schnittcurve ist eine sogenannte anallagmatische Curve. Sie ist in Bezug auf die durch *a* zu E normalgestellte Ebene symmetrisch und von der vierten Ordnung, da sich *o* und m_ε nicht berühren.

Da das Netz der Orthogonalkreise von *o* cyklometrisch durch ein gleichseitiges Rotationshyperboloid H, welches *o* zum Kehlkreis hat, dargestellt wird, so ist [*k*] auch die Umhüllungscurve der Bildkreise für sämmtliche Punkte der Durchdringungscurve von H mit der Cylinderfläche, welche *m* in die Ebene E orthogonal projicirt.[1]

Wir wollen nun auf die Construction dieser Curven im Folgenden näher eingehen.

3. Es sei (*m*) der geometrische Ort von Mittelpunkten *M*,... solcher Kreise *k*,..., welche einen Kreis *o* orthogonal schneiden. Diese Kreise umhüllen also eine anallagmatische Curve [*k*].

Zwei derartige, aber unmittelbar benachbarte Kreise k, k_1 mit den Mittelpunkten M, M_1 mögen sich in den Punkten *A* und *B* schneiden. Da sowohl k als auch k_1 sich selbst invers

---

[1] Das durch H repräsentirte Kreisnetz wird auch von den Schnittkreisen sämmtlicher Kugeln gebildet, die gleiche Durchmesser mit K,... haben und deren Mittelpunkte auf der mit O concentrischen, durch *m* gehenden Kugel liegen.

Betrachtet man überhaupt die Kreise einer Ebene einmal als Distanzkreise von Punkten im Raume, das anderemal als Schnittkreise mit Kugeln von constantem Radius, so befinden sich die Mittelpunkte der Kugeln mit den ersterwähnten Punkten in einer äusserst einfachen quadratischen Verwandtschaft, die involutorisch ist.

entsprechen in Bezug auf o als Grundkreis der Inversion, so werden auch ihre Schnittpunkte A, B invers liegen, und $[k]$ ist mithin in dieser Inversion sich selbst entsprechend. Überdies sind die Punkte A, B in Bezug auf (MM_1) symmetrisch.

Es schneidet hiernach die durch den Mittelpunkt O von o zur Tangente der Curve (m) in M gelegte Normale den Kreis k in seinen Berührungspunkten A, B mit $[k]$. (MA) und (MB) sind demgemäss die Normalen von $[k]$ in zwei einander invers entsprechenden Punkten. Die Curve (m) ist also auch der Ort für die Schnittpunkte von Normalen in je zwei sich entsprechenden Punkten von $[k]$.

Die Potenzlinie m' der Kreise k und o ist die Polare von M in Bezug auf o, und der Schnittpunkt T' der Geraden (AB) mit m' ist der Pol der Tangente t von (m) in M gleichfalls in Bezug auf o. Daraus folgt, dass der Schnittpunkt S der Tangenten an $[k]$ in A und B als Pol der durch T' gehenden Geraden (AB) auf t liegt; derselbe ergibt sich demnach als Schnitt von t mit der Polare m'.

Construction von Krümmungskreisen. Denken wir uns jetzt die Krümmungskreise a und b von $[k]$ in den entsprechenden Punkten A, B. Da die Curve $[k]$ invers sich selbst entspricht, so sind a und b ebenfalls zwei in Bezug auf o inverse Kreise. Als solche haben sie den Mittelpunkt O zu einem Ähnlichkeitspunkte und gehören mit o einem Kreisbüschel an. Da weiter die Tangenten in A und B an k nicht parallel sind, so ist ihr Schnittpunkt S ein Punkt auf der Potenzlinie i der Kreise a und b. Schneiden sich nun die Tangenten in den zu A und B unmittelbar benachbarten Punkten A_1, respective B_1 im Punkte S_1, so ist $(SS_1) \equiv i$, und die Senkrechte s zu dieser Geraden durch O ist die Centrallinie der Kreise a, b; dieselbe schneidet somit die Normalen (AM) und (BM) in den Mittelpunkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Krümmungskreise a, respective b.

Es kommt also bei unserer Construction lediglich darauf an, die Gerade i zu ermitteln, deren Schnittpunkte mit o, nebenbei bemerkt, auch den gesuchten Kreisen a, b gemeinschaftlich sind.

Würde (m) ein den Kreis o doppeltberührender Kegelschnitt sein, dann wäre i seine Berührungssehne mit o, und s

wäre eine Axe desselben. Unsere Aufgabe ist also gleichbedeutend mit der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construiren, der die gegebene Curve (m) in einem Punkte M osculirt und den gegebenen Kreis o doppelt berührt. Da es sich hier nur um die Krümmungskreise a, b handelt, so können wir die Curve (m) durch irgend einen sie in M osculirenden Kegelschnitt m ersetzen.

Der Punkt S lässt sich nun als Schnittpunkt der beiden Polaren des Punktes M einmal in Bezug auf m, das anderemal in Bezug auf o auffassen; er ist demgemäss der zu M doppeltconjugirte Punkt in Bezug auf die durch m und o gegebenen Polarsysteme. Der Punkt S_1 ist alsdann in gleicher Weise zu M_1 doppeltconjugirt. Der Tangente t, welche die Punkte M, M_1 verbindet, ist ein Kegelschnitt (S) doppeltconjugirt, welcher S und S_1 ebenfalls als benachbarte Punkte enthält, sodass die Tangente in S an den Kegelschnitt (S) mit der Geraden i identisch ist.

Der Kegelschnitt (S) geht durch M, T', S, und es erübrigt nur noch, die doppeltconjugirten Punkte von zwei beliebig auf t gelegenen Punkten zu suchen, worauf man aus den fünf so erhaltenen Punkten des Kegelschnittes (S) nach dem Satze von Pascal die Tangente i desselben in S ohneweiters erhält. Hiemit ist unsere Aufgabe gelöst, selbstverständlich auch für den Fall, dass o imaginär ist, oder, mit anderen Worten, dass die Potenz von O bezüglich der umhüllten Kreise negativ, gleich $-\Pi$, ist. Im letzteren Falle wird der Kreis o durch einen concentrischen Kreis vom Radius $\sqrt{\Pi}$ repräsentirt, und die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf o ist centrisch symmetrisch für O als Centrum zu der Polare desselben bezüglich des repräsentirenden Kreises.

Die früher angegebene cyklometrische Deutung gibt uns ebenso einfach und übersichtlich unsere Construction wieder.

Die Curve $[k]$ ist die Umhüllungscurve für die Bildkreise von sämmtlichen Punkten auf der Durchdringungscurve des Netzhyperboloides II, welches o zum Kehlkreis hat mit der durch m zu unserer Ebene orthogonal gelegten Cylinderfläche. Es sei t^+ die Tangente dieser Durchdringungscurve im Punkte M^+, welche ihre Orthogonalprojection in unsere

Ebene in t, respective M haben. Die Schmiegungsebene T dieser Durchdringungscurve in M^+ schneidet H nach einem Kegelschnitte l^+, dessen cyklometrische Projection eine conische Kreisreihe ist, deren Kreise das verlangte Kreispaar a, b umhüllen.

Die Spur von T ist die Berührungssehne des Kegelschnittes l, in den sich l^+ orthogonal projicirt und der den Kreis o in seinen Schnittpunkten mit dieser Sehne berührt. Die Spur von T ist also die Gerade i selbst. Die Ebene T ist als Schmiegungsebene der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades im Punkte M^+ die Tangentialebene längs t^+ desjenigen Kegels, welcher der Tangente t^+ in Bezug auf beide Flächen zweiten Grades zugleich conjugirt ist. Dies liefert für unsere Ebene, in der sich unsere Constructionen vollziehen, genau den vorigen Vorgang.[1]

Für den Schnitt einer Ringfläche R mit einer Ebene, die zur Axe o nicht parallel ist, braucht da nichts weiter hinzugefügt zu werden.

4. Ist $[k]$ symmetrisch, wie es beispielsweise für den ebenen Schnitt einer Ringfläche der Fall ist, so hat jeder der Krümmungskreise a, b in je zwei sich invers entsprechenden Scheitelpunkten A, B mit $[k]$ vier consecutive Punkte gemein. Der soeben erwähnte doppeltconjugirte Kegel degenerirt in ein Ebenenpaar und der früher besprochene doppeltconjugirte Kegelschnitt besteht aus der gemeinschaftlichen Normale an $[k]$ in A und B (Symmetrieaxe) und aus einer zu ihr senkrechten Geraden g, die äusserst einfach gefunden wird, da man bloss einen Punkt von ihr in früher angegebener Weise zu ermitteln braucht.

Der Mittelpunkt E von AB ist hier ein Scheitelpunkt von m, und es ist $\frac{\overline{AE}^2}{d}$ die Entfernung der Geraden g von E, wofern d den Abstand zwischen O und dem Krümmungsmittelpunkte von m im Scheitel E bedeutet.

So ist der m in E osculirende und o doppeltberührende Kegelschnitt hinreichend bestimmt.

---

[1] Cf. A. Mannheim, Géométrie cinématique, Paris, 1894, S. 77—80.

Schneidet g den Kreis o reell, dann lassen sich die Kreise a, b durch diese Schnittpunkte und durch A, respective B, ohneweiters legen. Ist dies nicht der Fall, so suche man den Pol G von g in Bezug auf o. Alsdann gehört der von E durch G und g harmonisch getrennte Punkt E_1 gleichfalls dem gesuchten doppeltberührenden Kegelschnitte an. Man kann jetzt etwa den Orthogonalkreis von o, der in E_1 seinen Mittelpunkt hat, legen, wodurch die Kreise a, b vollkommen bestimmt sind. Denn dieselben gehen durch A, respective B und berühren den zuletzt erhaltenen Orthogonalkreis auf (EE_1) in verschiedenen Punkten. Die Wahl dieser Punkte lässt keinen Zweifel auftreten, wenn man beachtet, dass die Kreise a und b sich auch nicht reell schneiden dürfen.

Von anderen besonderen Fällen wollen wir hier noch des Erwähnung thun, wenn der Kreis o die Curve (m) berührt.

Geschieht dies im Punkte D, so ist dieser ein Doppelpunkt von $[k]$. Die im Vorigen entwickelten Constructionen gestatten uns zunächst, die Normalen in diesem Doppelpunkte an $[k]$ zu errichten.

Wir brauchen nämlich nur die Curve (m) durch einen sie in D osculirenden und o noch anderwärts berührenden Kegelschnitt l ersetzt zu denken. Solcher Kegelschnitte gibt es unzählig viele; eine Axe eines solchen Kegelschnittes geht jedesmal durch O. Die Tangenten in D sind aber nur dann reell, wenn die durch O gehende Axe des doppeltberührenden Kegelschnittes l die Hauptaxe ist; denn nur dann lassen sich durch den Kegelschnitt l^+ auf dem Netzhyperboloid H zwei reelle gleichseitige Rotationskegel legen. In Folge dessen liegt auch der Krümmungsmittelpunkt P von (m) in D in derselben Richtung von D aus wie der Punkt O.

Die Leitstrahlen des Punktes D für irgend einen doppeltberührenden Kegelschnitt l müssen nun dem Früheren zufolge die verlangten Normalen in D an $[k]$ sein. Der Winkel φ, den jeder dieser Leitstrahlen mit der Geraden (DO) einschliesst, folgt aus der bekannten Formel $DP = \frac{DO}{\cos^2 \varphi}$, nach welcher der Krümmungshalbmesser von l in D construirt werden kann

Man hat somit nur den Kreis zu legen, welcher den Krümmungshalbmesser DP zum Durchmesser hat und in O die zu DP normale Sehne zu errichten. Die Geraden, welche die Endpunkte dieser Sehne mit D verbinden, sind bereits die gewünschten Normalen. Auf denselben liegen die Brennpunkte sämmtlicher Kegelschnitte, welche (m) in D osculiren und anderwärts noch berühren.

Hätte man die Krümmungskreise von $[k]$ im Doppelpunkte D zu ermitteln, so würde man zunächst (m) durch einen Kegelschnitt m ersetzen, welcher mit (m) in D vier consecutive Punkte gemein hat, und es wäre dann unsere Sorge, diesen durch einen anderen Kegelschnitt $\mathfrak{m}$ zu ersetzen, welcher ihn in D gleichfalls hyperosculirt und überdies noch o an einer anderen Stelle berührt.

Verbinden wir zu dem Behufe D mit dem Mittelpunkte von m, so ist die Verbindungsgerade ein gemeinschaftlicher Durchmesser aller die Curve (m) in D hyperosculirenden Kegelschnitte. Construiren wir weiter in Bezug auf die soeben gefundenen Normalen, welche zugleich die Leitstrahlen auch von $\mathfrak{m}$ für den Punkt D sind, den zu dem soeben erwähnten gemeinschaftlichen Durchmesser conjugirten Strahl, so gibt dieser alsdann die Richtung der Hauptaxe von $\mathfrak{m}$ an. Zieht man mithin durch O die Parallele zu diesem Strahl, so trifft dieselbe die beiden Normalen in den Mittelpunkten der fraglichen Krümmungskreise.

5. Von den letzten Constructionen soll hier eine Anwendung auf die Ringfläche R folgen. Beim Schnitte $[k]$ einer Ringfläche R mit einer Tangentialebene E derselben werden in der Regel auch die Tangenten in dem Berührungspunkte D an die Schnittcurve auf verschiedene, interessante Arten construirt. Unsere Erwägungen liefern nicht nur die Construction von Normalen, sondern auch die Construction der beiden Krümmungskreise d_1, d_2 für den Doppelpunkt D der Schnittcurve $[k]$ in sehr einfacher Weise.

Der Einfachheit der Darstellung halber projiciren wir die Ringfläche orthogonal in die Meridianfläche, welche

durch die Rotationsaxe a zur Schnittebene normal errichtet wird.[1]

Es sei — Fig. 1 — Q der Mittelpunkt der die Ebene E in D berührenden, von R umhüllten Kugel, q ihr grösster Kreis, welcher als ein Meridiankreis in unserer Projectionsebene der Ringfläche angehört. Die wahre Gestalt der Schnittcurve $[k]$, welche hier eine Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten

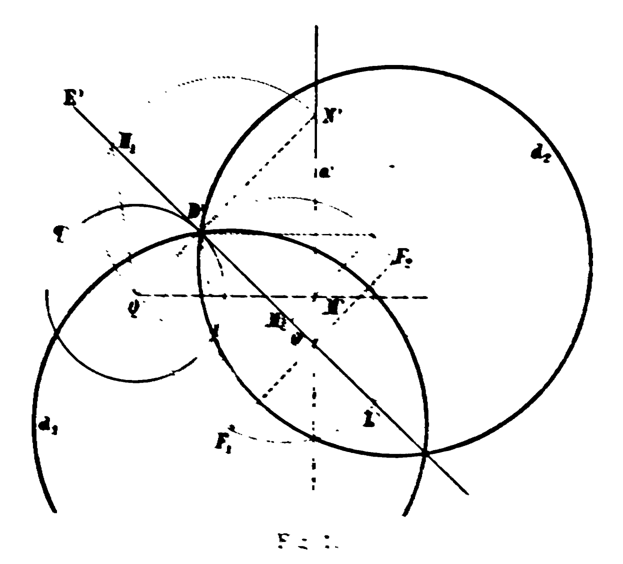


Fig. 1.

[illegible]

d_1 und d_2 den Kegelschnitt m_1 durch diesen Krümmungskreis ersetzen. Es sei L der Mittelpunkt dieses Kreises. Wir fällen von D' die Senkrechte auf a' bis sie $(M_1 M')$ schneidet; die Parallele durch den so erhaltenen Schnittpunkt zu a' schneidet (DO) bereits im Punkte L.

Weiter handelt es sich darum, den Kegelschnitt l zu ermitteln, welcher mit m in D vier consecutive Punkte gemein hat und o noch anderwärts berührt. Für diesen Kegelschnitt l ist O der Mittelpunkt, also DO eine Halbachse der Lage und Grösse nach. Da L Krümmungsmittelpunkt von l in D ist, so enthält der über DL als Durchmesser in unserer Ebene E beschriebene Kreis bekanntlich auch die reellen Brennpunkte F_1, F_2 von l. Diese Brennpunkte erhalten wir also, wenn wir die Senkrechte durch O zu DO mit dem erwähnten Kreise zum Schnitte bringen.

Diese Brennpunkte F_1, F_2 sind nun bereits die Mittelpunkte der Kreise d_1, d_2.

Eine Modification dieser Construction und ihrer Ableitung möge hier noch erläutert werden.

Wir wissen, dass die Tangenten an unsere Schnittcurve in D die Erzeugenden irgend eines Hyperboloids sind, welches sich in D unserer Ringfläche anschmiegt. Wir wählen hier in der üblichen Weise den Schnittpunkt N der Normale (QD) mit a als Mittelpunkt und die durch ihn zur Tangente in D an den Meridian q parallel gelegte Gerade als Axe eines derartigen einschaligen Rotationshyperboloids. Für die Meridianhyperbel desselben gibt DN die Länge der reellen Halbaxe und die mittlere geometrische Proportionale zwischen DN und QD die Länge der ideellen Halbaxe. Dreht man also die Gerade (QN) um (DO), bis sie in die Ebene E hineinfällt nach $Q_1 N_1$ und errichtet nun in E über der Strecke $Q_1 N_1$ als Durchmesser einen Kreis, so wird derselbe von der Geraden (DO) in zwei Punkten H_1, H_2 geschnitten. Die Geraden $(H_1 N_1)$ und $(H_2 N_1)$ geben die Richtungen der Tangenten, die Geraden $(H_1 Q_1)$, $(H_2 Q_1)$ die Richtungen der Normalen unserer Schnittcurve $[k]$ im Doppelpunkte D an.[1]

[1] Chr. Wiener a. a. O., S. 164, De la Gournerie Traité de géometrie descriptive u. A.

Die Kreise d_1, d_2 gehören mit o einem Büschel an, und da sie in Bezug auf (DO) symmetrisch sind, so muss ihr zweiter Schnittpunkt der dem Punkte D auf o diametral gegenüberliegende Punkt sein, und die Senkrechte von O auf (DO) ist ihre Centrallinie, welche die Normalen in D an $[k]$ in den Mittelpunkten von d_1, respective d_2 trifft.

Wie aus den Mittelpunkten von d_1 und d_2 die Krümmungsmittelpunkte irgend einer Projection der Schnittcurve in dem entsprechenden Doppelpunkt ermittelt werden, ist hinreichend bekannt.

6. Denken wir uns weiter irgend einen Kegelschnitt w und in seiner Ebene eine Gerade a. Durch Rotation dieses Kegelschnittes um die Gerade a entsteht eine Rotationsfläche W, die ebenfalls vierter Anordnung ist, da sie, wie gleich gezeigt werden soll, durch centrische Collineation in eine Kreisringfläche transformirt werden kann.

Durch den Kegelschnitt w ist eine Schaar von zu ihm confocalen Kegelschnitten bestimmt. Ferner liegt irgend ein Kreis in der Ebene von w auf verschiedene Arten mit w in centrisch collinearer Lage. Verbindet man ein Collineationscentrum derselben mit dem Mittelpunkte des Kreises, so gibt es einen Kegelschnitt in unserer Schaar, welcher diese Verbindungsgerade gerade in dem Collineationscentrum berührt und einer anderen Eigenschaft zufolge den Kegelschnitt w in Punkten schneidet, in denen die Tangenten an w die zwei möglichen Richtungen der Collineationsaxen für das angenommene Centrum liefert.

Construirt man also die zu a senkrechten Tangenten von w und legt durch ihre Berührungspunkte den einzigen möglichen zu w confocalen Kegelschnitt x, so schneidet dieser a in zwei Punkten X_1, X_2, von denen jeder als Collineationscentrum betrachtet werden kann zwischen dem Kegelschnitt w und den Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Tangente an x im Collineationscentrum liegen und welche die von diesem an w gelegten Tangenten berühren. Wählen wir einen solchen Kreis w_1, beispielsweise für X_1 als Collineationscentrum, so ist noch die Collineation zwischen w und w_1 in zweierlei Art möglich; bei der einen ist die Collineationsaxe $\mathfrak{x}_1$ senkrecht zur Geraden a.

Beachten wir die letztere, so ergibt sich aus ihr, dass die Fläche W mit der Ringfläche W_1, welche durch Rotation des Kreises w_1 um a erzeugt wird, centrisch collinear für X_1 als Collineationscentrum und die durch $\mathfrak{x}_1$ zu a normal gelegte Ebene als Collineationsebene ist.

Dasselbe würde für X_2 als Collineationscentrum gelten.

Ist insbesondere a parallel zu einer Axe von w, so geht die centrische Collineation in eine Affinität über.

Aus unserer Betrachtung erkennt man, dass die projectiven Eigenschaften der Kreisringfläche sich auf die Fläche W übertragen lassen.

So erhalten wir z. B. folgenden Satz:

Die durch Rotation eines Kegelschnittes um eine in seiner Ebene liegende Gerade erzeugte Fläche wird von jeder sie doppelt berührenden Ebene nach zwei Kegelschnitten geschnitten.

Die Übertragung der Constructionen bezüglich der Kreisringfläche auf die Fläche W begegnet insoferne graphischen Schwierigkeiten, als die erläuterte Collineation zwischen beiden nicht immer reell ist, was schon daraus hervorgeht, dass die Endpunkte der durch a halbirten Sehne von w bei der Rotation einen Doppelkreis auf der Fläche W beschreiben, welcher ebenso gut reell wie imaginär sein kann, in allen Fällen aber dem absoluten Kreis auf der Ringfläche entsprechen muss.

7. In weiterer Anwendung unserer Betrachtungen wollen wir noch folgende Aufgabe lösen.

Eine Rotationsfläche Z wird von einer sie im Punkte D berührenden Ebene E geschnitten; es sind die Krümmungskreise d_1, d_2 der Schnittcurve im Punkte D zu ermitteln.

Wir setzen voraus, dass die Rotationsfläche durch ihre Meridiancurve z gegeben ist. Der Einfachheit der Darstellung halber projiciren wir in die durch D gehende Meridianebene, wie früher. Weiter sei — Fig. 2 — Q der zu D gehörige Krümmungsmittelpunkt von z und $\mathfrak{Q}$ der zu Q gehörige Krümmungsmittelpunkt der Evolute von z. Dadurch sind die vier in D consecutiven Punkte von z vollkommen zum Ausdruck gebracht.

Behufs unserer Aufgabe können wir die Meridiancurve z durch irgend einen Kegelschnitt ersetzen, welcher z in D hyperosculirt. Macht man $QL = \frac{1}{3}\mathfrak{Q}Q$, so ist, wie bekannt, (DL) ein gemeinschaftlicher Durchmesser für alle derartigen Kegelschnitte. Jeder Kegelschnitt, welcher z in D osculirt und seinen Mittelpunkt auf (DL) hat, besitzt mit z dieselben vier

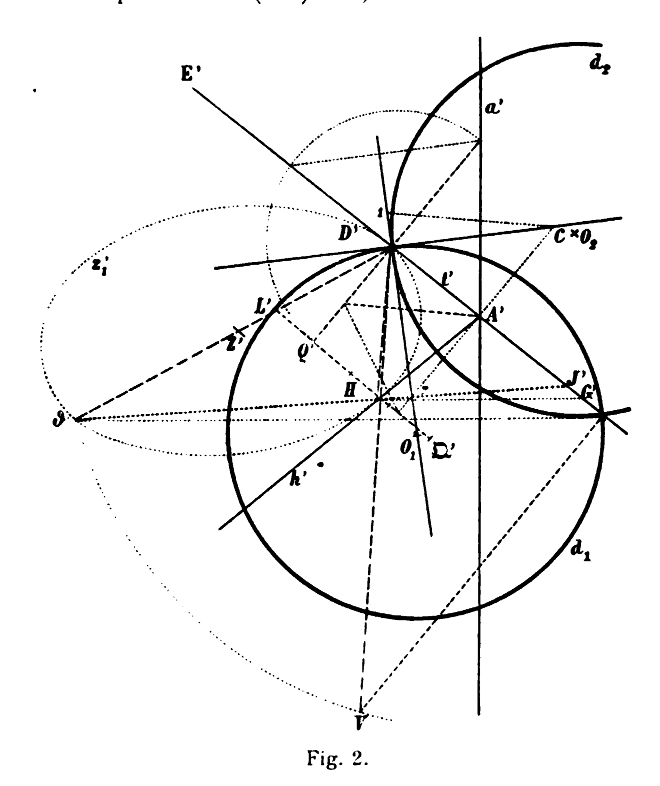


Fig. 2.

in D unmittelbar aufeinanderfolgende Punkte. Unter diesen Kegelschnitten befindet sich ein einziger z_1, welcher die zur Tangente t in D an z in Bezug auf die Rotationsaxe a orthogonalsymmetrische Gerade h berührt. Diesen Kegelschnitt z_1 wollen wir für unsere Construction verwenden. Denn, wenn z_1 von h im Punkte H berührt wird, dann berührt unsere Ebene E, da sie zur Meridianebene von D normal ist, die durch Rotation von z_1 um a erzeugte Fläche Z_1 nicht nur im Punkte D, sondern

auch in dem Gegenpunkte G von H in Bezug auf a; in Folge dessen schneidet E die Fläche Z_1 nach zwei zu einander in Bezug auf (DG) symmetrischen Kegelschnitten v, w, welche die Schnittcurve von E mit Z in D osculiren.

Unsere Aufgabe geht also schliesslich darauf aus, den Krümmungskreis eines Kegelschnittes in einem Punkte desselben zu construiren.

Bei unserer Darstellung wird der Schnitt mit E in derjenigen Lage abgebildet, welche er annimmt, nachdem er um (DG) in die Ebene $[Da]$ gedreht worden ist.

Hat man irgend einen Kegelschnitt, welcher z in D hyperosculirt, so sind seine Axen, die Tangente t und die zugehörige Normale (DQ), Tangenten einer sogenannten Steiner'schen Parabel, welche die Normale (DQ) im Krümmungsmittelpunkte Q berührt. Diese Parabel ist nun durch ihre Leitgerade (DL), die Tangenten t, (DQ) und den Berührungspunkt Q der letzteren vollkommen bestimmt; sie ist also für alle die erwähnten Kegelschnitte dieselbe. Daraus folgt, dass die Axen aller z in D hyperosculirenden Kegelschnitte Tangenten an die betrachtete Parabel sind.

Auf Grund dieser Bemerkung lässt sich der Berührungspunkt H leicht ermitteln.

Wir denken uns vorerst denjenigen in D hyperosculirenden Kegelschnitt z_2, dessen eine Axe durch den Schnittpunkt A der Tangente t mit der Rotationsaxe a geht. Diese Axe wird als Tangente der vorigen Parabel nach dem Satze von Brianchon gefunden. Man legt etwa durch A die Parallele zu (DQ) und von deren Schnittpunkte mit $(Q\mathfrak{Q})$ errichtet man die Senkrechte zu (DL); der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit (DQ) ist ein zweiter Punkt der fraglichen Axe. Nun ist z_1 mit z_2 centrisch collinear für D als Centrum und t als Axe der Collineation. Daraus folgt, dass die Senkrechte von D auf die ermittelte Axe von z_2 die Gerade h im gewünschten Punkte H schneidet.

Um einen der Kegelschnitte v, w, etwa den ersten, zu ermitteln, construiren wir zunächst seine Tangente in D_1, vortheilhaft auf die in Art. 5 angegebene Weise.

Die Verbindungsgerade von A mit dem Mittelpunkte der Strecke DH würde (DL) im Mittelpunkte Z des Kegelschnittes z_1

treffen. Wir ziehen es aber vor, statt dessen den zweiten Endpunkt ϑ des Durchmessers (DL) von z_1 zu construiren. Diesen erhalten wir, wenn wir $AJ = DA$ auf E' auftragen und den Punkt J mit H verbinden. Die Verbindungsgerade schneidet (DL) bereits im Punkte ϑ.

Wählt man auf z_1 einzelne Punkte, so entsprechen ihnen auf der Rotationsfläche Z_1 Parallelkreise, von denen jeder die Ebene E in zwei Punkten schneidet. Es ist leicht zu entscheiden, welcher von diesen zwei Punkten dem Kegelschnitt v angehört. Die Gerade (DH) theilt nämlich den Kegelschnitt z_1 in zwei Theile. Auf dem Kegelschnitte v liegen nun die Schnitte der Ebene E mit den Parallelkreisen, welche den Punkten auf dem einen Theil von z_1 zugehören, auf der einen Seite von t, die Schnittpunkte mit den Parallelkreisen, welche den Punkten auf dem anderen Theile von z_1 zugehören, auf der entgegengesetzten Seite von t. Für den zweiten Kegelschnitt w gilt es umgekehrt. Dieses Entsprechen der Theile auf z_1 den durch t gebildeten Theilen auf v geht aus der Lage der Tangente (DC) von v in D sofort in unzweideutiger Weise hervor.

Zunächst ist hier leicht einzusehen, dass die Normalebene zu a durch den Mittelpunkt Z die Ebene E in der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte von v und w scheidet. Denken wir uns weiter irgend einen Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von z_1, so erkennen wir, dass die Parallelkreise welche den Endpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ desselben entsprechen, den Kegelschnitt v auch in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden; man erkennt dies sofort, wenn man die Lage der vier Punkte von z_1 in den zu a normalen Ebenen durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und die ihnen auf v entsprechenden vier Punkte näher ins Auge fasst.

Dies vorausgeschickt, wollen wir den auf v liegenden Schnittpunkt V des durch ϑ gehenden Parallelkreises ermitteln. Zu dem Behufe denken wir uns durch diesen Parallelkreis eine Kugel gelegt, welche ihren Mittelpunkt in A hat, und ermitteln auf derselben denjenigen Kreis, dessen Durchmesser gleich der Sehne ist, welche die Ebene E mit dem Parallelkreise von ϑ bestimmt; der Halbmesser dieses Kreises gibt die Entfernung des Punktes V von t an. Um diesen Punkt in der früher erwähnten gedrehten Länge von $[k]$ darzustellen, haben wir bloss

von ϑ' auf a' die Senkrechte bis zum Schnitte mit E und von hier die Senkrechte zu E' zu errichten; diese wird von dem Kreise, der in A seinen Mittelpunkt hat und durch ϑ' geht, in dem gedrehten Punkte V getroffen.

Aus unserer Betrachtung folgt, dass DV der Grösse und Lage nach ein Durchmesser von v ist.

Dadurch ist der Kegelschnitt v durch seine linearen Bestimmungsstücke vollkommen gegeben, und wir können somit den Krümmungskreis d_1 desselben für den Punkt D leicht construiren.

Die Construction gestaltet sich besonders einfach, wenn wir den folgenden Zusammenhang berücksichtigen.

Der Schnittpunkt P der Geraden HD mit der Rotationsaxe a ist zum Punkte A harmonisch conjugirt in Bezug auf die durch D und H zur Axe a normal gelegten Ebenen. Die Normalebene von P, in welcher der Doppelkreis von Z_1 liegt, schneidet t im Punkte $\mathfrak{P}$, welcher alsdann zu A harmonisch conjugirt ist, in Bezug auf die Punkte D, G. Denken wir uns weiter die zwei Punkte von v, welche in der zur Projectionsebene $[Da]$ normalen Meridianebene, also auf der in E durch den Punkt A zur Tangente t gelegten Senkrechten (AC) liegen.

Die Tangentialebenen in diesen Punkten an Z_1 müssen durch die Gerade $(P\mathfrak{P})$ gehen und schneiden die Ebene E in den Tangenten von $\mathfrak{P}$ an v. Es ist somit die Gerade (AC) die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in Bezug auf v. Dies gilt zunächst für den Fall als (AC) den Kegelschnitt reell schneidet, lässt sich aber sogleich in bekannter Weise auch auf den Fall übertragen, wenn dies nicht geschieht.

Daraus folgt, dass sich die Tangenten von v für die Punkte D und G auf der Geraden (AC) schneiden. Der Schnittpunkt selbst wurde hier mit C bezeichnet.

Was nun die Ermittlung des Kreises d_1 als Krümmungskreises von v in D anbelangt, so geschieht dieselbe nach dem Satze, dass die zu den Strahlen des Büschels durch D normal conjugirten Geraden in Bezug auf v eine Parabel umhüllen, welche die Normale an v in D in dem Mittelpunkte O_1 des gesuchten Kreises d_1 berührt. Für diese Parabel sind die Tangente und die Normale in D an v, ferner die Gerade (CA)

Tangenten, und DV ist ihre Leitgerade; der Berührungspunkt O_1 der Normale (DO_1) mit der Parabel kann ohneweiters gefunden werden.

Dies liefert dann folgendes Resultat.

Wird die Normale an v in D von der Senkrechten durch C auf (DV) im Punkte 1, von der Geraden (AC) im Punkte 2 geschnitten, so ist die Strecke $\overline{1},\overline{2}$ gleich dem Halbmesser DO_1 von d_1.[1]

Da der zweite Krümmungskreis von d_2 zu d_1 in Bezug auf t symmetrisch ist, so ist er dadurch auch schon ermittelt.

---

[1] Man vergleiche diesbezüglich C. Pelz: Krümmungshalbmesserconstructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes in den Sitzber. der k. böhm. Ges. der Wiss. 1979, ferner diese Sitzungsberichte, Bd. CII, Abth. II. a., S. 1233, u. f.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(II. Mittheilung)

von

Prof. **Franz Exner**, c. M. k. Akad., und **E. Haschek.**

(Mit 5 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. März 1896.)

Seit dem Erscheinen unserer I. Mittheilung[1] steht uns ein Rowland'sches Originalgitter zur Verfügung, das ungleich Besseres zu leisten vermag, als das bisher von uns benützte. Das Gitter hat einen Krümmungsradius von 152 *cm* und zählt 538 Linien auf den Millimeter. Es ist wesentlich lichtstärker als das frühere, so dass die Expositionszeit auf wenige Minuten herabgesetzt ist. Die Schärfe und Definition der Linien lässt nichts zu wünschen übrig; die stärksten Linien im violetten Theile des Eisenspectrums weisen bei vollkommen scharfer Begrenzung nur eine Breite von 0·3 AE. auf. Doppellinien in scharfen Spectren, wie z. B. Wo, Pt, Mn u. dergl., die nur um 0·1 AE. von einander abstehen, erscheinen noch deutlich getrennt. Da in Folge dessen zahlreiche Linien unserer ersten Messung sich in Doppellinien oder Liniengruppen auflösten, und ausserdem in Folge der wesentlich grösseren Lichtstärke zahlreiche neue Linien sichtbar wurden, so unterzogen wir die sämmtlichen Elemente unserer I. Mittheilung einer neuerlichen Messung.

Die Aufnahmen wurden sämmtlich im zweiten Spectrum gemacht; um das störende Ultraviolett des dritten Spectrums zu beseitigen, genügte die Einschaltung eines Glases, das

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIV (1895, October).

Strahlen bis zur Wellenlänge $\lambda < 3200$ absorbirte; um das Blau und Violett des ersten Spectrums, das im äussersten ultravioletten Theile des aufzunehmenden Bezirkes über $\lambda = 2500$ bis 2000 fällt, zu eliminiren, deckten wir den Spalt theilweise durch Glas ab. Dadurch erscheinen die ultravioletten Linien des zweiten Spectrums verkürzt, die blauen und violetten des ersten Spectrums dagegen in normaler Länge und können so leicht ausgeschieden werden. Allerdings ist dabei bei linienreichen Spectren die Gefahr einer Verdeckung einer schwachen ultravioletten Linie durch eine starke blaue nicht ausgeschlossen. Die verhältnissmässig kurze Brennweite des Gitters bedingt eine merkliche Krümmung des Bildes; da wir ein Durchbiegen der Platten vermeiden wollten, so nahmen wir den gemessenen Bezirk von $\lambda = 4800$—2000 immer auf je vier Platten von 21 *cm* Länge auf, deren mittlere Hälfte zur Messung verwendet wurde. Leider zeigte auch unser Gitter die üble Gewohnheit der »Gespenster«; allerdings treten dieselben nur bei scharfen und sehr starken Linien auf und sind insoferne weniger störend, als sie nach Distanz und Intensität vollkommen symmetrisch zu den Linien stehen. Ihre Distanz beträgt bei $\lambda = 2300$ 3·2 AE. und bei $\lambda = 4600$ 6·5 AE. Die allerstärksten Linien zeigen ausserdem noch in der halben Distanz schwache secundäre Gespenster.

Die Messung selbst geschah wieder in objectiver Weise mit Hilfe der Projection. Das Bild des Spectrums wurde in 30facher Vergrösserung so auf einen Schirm geworfen, dass sowohl das zu messende Spectrum, als auch das beiderseits einphotographirte Vergleichsspectrum, als welches wir ausschliesslich das Eisenspectrum benutzten, je auf eine in halbe Centimeter getheilte Scala fiel. Die Standardlinien wurden hierbei so eingestellt, dass ihre Wellenlänge (nach Rowland'schen Angaben) mit den Scalentheilen übereinstimmten; es konnten dann die unbekannten Wellenlängen ohne jede weitere Rechnung von der Scala abgelesen werden.

Zur Beurtheilung der erreichten Genauigkeit diene Folgendes: In sechs verschiedenen Aufnahmen haben wir unter Anderen folgende acht Luftlinien mitgemessen, wobei sich die nachstehende Tabelle ergibt:

λ	A	B	λ	A	B
4607·32	0·08	±0·08	4153·57	0·13	±0·11
4596·28	0·06	0·05	3995·18	0·03	0·03
4319·85	0·08	0·08	3954·50	0 00	0·00
4190·00	0·07	0·06	3919·30	0·07	0·08

Hier stehen unter λ die Mittel der Wellenlängen aus je sechs Messungen, unter *A* die durchschnittliche Abweichung der einzelnen Zahlen vom Mittelwerthe, unter *B* der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Messung. Obwohl die Luftlinien keineswegs zu den scharfen Linien gehören, beträgt der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Messung im Durchschnitte nur 0·06 AE.

Zum weiteren Vergleiche haben wir die höchst verlässlichen Zahlen von Kayser und Runge für das Silber- und Kupferspectrum und die von Rowland für das Mangan herangezogen. Obwohl Silber und Kupfer zu den relativ linienarmen Spectren gehören, so finden sich doch im Bogenspectrum (Kayser und Runge) beim Silber 38 und beim Kupfer 172 Linien, welche mit solchen unseres Funkenspectrums als identisch anzusehen sind. Indem wir die Zahlen von Kayser und Runge als richtig ansehen, ergibt sich für das Kupferspectrum bei unseren Messungen ein mittlerer Fehler von 0·12 AE. Bei dem Umstande, dass die Kupferlinien zumeist, besonders im Blau und Violett, sehr unscharf und breit sind, und dass von uns jede Linie nur einmal gemessen wurde, muss diese Genauigkeit als eine ganz befriedigende angesehen werden. Für das Silber erhalten wir gleicherweise einen mittleren Fehler von 0·10 AE., wobei jedoch bemerkt werden muss, dass unter den verglichenen 38 Linien sich vier ausserordentlich breite und verwaschene finden, für welche Kayser und Runge selbst eine Fehlergrenze von 0·5—2·0 AE. angeben. Lässt man, wie es für den vorliegenden Zweck gerechtfertigt ist, diese vier Linien aus dem Vergleiche weg, so ergeben die restirenden 34 einen mittleren Fehler von 0·07 AE. In unserem Mangan-

spectrum finden sich 26 Linien, die auch von Rowland als Manganlinien im Sonnenspectrum gemessen wurden; mit den Rowland'schen Zahlen verglichen, zeigen die unseren einen mittleren Fehler von 0·06 AE.

Aus dem Vorstehenden glauben wir den Schluss ziehen zu dürfen, dass der wahrscheinliche Fehler unserer einzelnen Messung, insoferne es sich nicht um sehr unscharfe Linien handelt, kleiner als 0·1 AE. ist.

Bezüglich der nachfolgenden Tabellen wäre noch Folgendes zu bemerken: Dieselben stellen lediglich einen Nachtrag dar zu jenen unserer I. Mittheilung. Es sind darin nur Linien aufgenommen, welche dort noch nicht beobachtet wurden, oder solche, deren Wellenlängen bei der ersten Messung in Folge der mangelhaften Definition des damals verwendeten Gitters um mehr als 0·1 AE. von der neuen Bestimmung differiren, oder endlich solche, welche durch die neueren Aufnahmen in zwei oder mehr Linien aufgelöst wurden. In diesen Fällen finden sich die Zahlen der früheren Messung in der mit *i* überschriebenen Rubrik der Intensitäten eingeklammert angeführt; alle Zahlen der früheren Messungen, welche in den folgenden Tabellen nicht in Klammern vorkommen, sind daher bis auf 0·1 AE. richtig und nur der Raumersparniss wegen hier nicht nochmals mit abgedruckt. Die unter der Rubrik *i* beigefügten Zeichen behalten dieselbe Bedeutung wie früher: Die Intensitäten sind mit 1—6 bezeichnet, wobei 1 zur stärksten Intensität gehört; ein + bedeutet, dass die Linien verwaschen, d. dass sie doppelt, u. dass sie umgekehrt sind.

Bezüglich der Linien $\lambda = 3933·8$ und $\lambda = 3968·6$, welche in allen von uns bisher untersuchten Spectren vorkommen, müssen wir bemerken, dass dieselben nicht, wie wir irrthümlicherweise glaubten, dem Wolfram angehören, in dem sie allerdings mit ganz besonderer Stärke auftreten, sondern dass es Calciumlinien sind, wovon wir uns durch eine Aufnahme des Ca-Spectrums überzeugten. Weitere Linien, die eventuellen Verunreinigungen angehören, werden sich erst ausscheiden lassen, bis der grösste Theil der Elemente untersucht sein wird.

Auf den beigefügten Tafeln geben wir die Spectren der untersuchten Elemente nach den Originalplatten und in Original-



grösse reproducirt wieder. Es soll dadurch die Möglichkeit geboten werden, sich durch einen Blick von dem Charakter eines Spectrums und der Lage der Hauptlinien in demselben zu überzeugen.

Silber (Nachtrag).

Die Zahl der Linien ist sowohl im Silber-, als im Kupferspectrum[1] keine sehr bedeutende: Im Intervall λ = 4668·8 bis 2113·0 haben wir 493 Linien gemessen. Die Schärfe derselben lässt viel zu wünschen übrig und nimmt im Allgemeinen mit abnehmender Wellenlänge zu. Aus der Tabelle 1 unserer I. Mittheilung sind die folgenden Linien als Luftlinien zu streichen: 3918·7, 3912·9, 3906·2, 3839·7, 2928·7.

λ	i	λ	i	λ	i
4668·8	5	4055·9	6+	3838·8	5+ br.
4509·8	6	54·9	6+	30·3	6+ br.
4443·4	6+	45·7	6+	25·9	6
11·0	6	3985·3	5 (84·9)	20·4	6
4396·0	6+	73·3	3 (72·7)	15·8	6+
84·9	6	67·8	6	10·5	5+ (10·7)
55·4	6	49·5	6	3759·8	6+
36·8	6	43·0	6+ br.	58·5	6+
11·2	5 (11·4)	20·2	6	45·8	6+
4227·2	6+ br.	14·5	5+	40·3	6+ br.
12·2[2]	4+ 10 AE. (09·4)	07·7	5+ br.	37·3	6+
		3863·8	6	35·0	6
4182·7	6+ 2 AE.	60·0	6	32·5	6+
59·2	6+	56·5	5+ 2 AE.	20·1	6
13·7	6+	51·0	6+ br.	09·5	6
4086·0	5 (85·5)	48·0	6+	3674·0	5+ (74·7)
81·7	6+	43·0	6+ br.	55·0	6+ 3 AE (54 2)
57·9	6 (57·7)	41·0	6+		

[1] Vergl. auch die seither erschienenen Messungen des Cu- und Ag-Spectrums von J. M. Eder und E. Valenta (Denkschr. der k. Akad. Wien, Bd. 53, 1896).

[2] Umgekehrt; die Linien selbst scharf und 2 AE. br.

λ	i	λ	i	λ	i
3639·7	5 (40·2) Pb	3295·6	6+	3207·3	6+ (07·5)
23·5	6+	93·0	6 br. (92·5)	03·8	6+
19·0	6	89·0	6+ (89·2)	00·9	5+ } (00·5)
16·5	5 (16·2)	80·7[1]	1 (80·6)	00·0	6+ }
3596·3	6	74·6	6	3198·1	6+
81·5	6	68·6	6	96·1	6+
70·4	6	67·3	6	93·6	6
57·2	6+ (57·7)	65·8	5+	91·9	6 (91·5)
19·0	6+	64·3	6+	87·8	6 (87·5)
13·5	5 (13·2)	62·6	6+	85·8	6
05·3	6+ (05·7)	58·5	5+	85·0	5 (84·7)
01·8	5 (02·2)	57·6	6+	81·6	6 (81·3)
3495·3	6	56·3	6+	80·7	4 (80·5)
76·1	5 (75·9)	54·9	6+	79·3	6+ (79·0)
71·0	6+	53·7	6+	77·7	6+
69·3	5 (69·7)	52·8	6 } (52·5)	76·3	5
67·9	6+	52·3	6 }	75·2	5
45·7	6+	49·8	6 } (49·5)	72·1	6
29·8	6+	49·2	6 }	70·5	5
21·7	6+	47·6	5	67·9	6
05·0	5+ 2 AE. (05·5)	45·9	6	66·3	6+ br.
		45·0	5 (44·5)	58·6	6+
3397·8	6+ (98·0)	43·1	6 Pb	57·6	6+
83·1[1]	1 (83·3)	41·3	6	55·8	6
73·0	6+ br.	37·6	6	55·3	6
67·2	6 (67·5)	36·5	6	49·9	6
45·0	6+	33·2	5+ br. (33·0)	46·3	6
43·3	6	31·3	6	42·6	6
33·9	6+ (33·5)	30·0	5 } (29·5)	41·9	6
32·0	5	28·9	6 }	34·6	6+ br.
29·3	6+	27·9	6	30·1	5+
21·7	6	25·1	6	23·9	6
18·3	6+	21·4	6+	22·8	5
15·5	6+	18·6	6+	17·9	6
12·8	6+ (12·6)	16·8	6 (16·5)	15·6	6
01·6	5+ (01·8)	15·6	5	14·6	6
3299·8	6— (99·5)	11·9	6+	13·4	6+
97·8	6+	08·1	6+	02·8	6

[1] Umgekehrt.

λ	i	λ	i	λ	i
3101·7	6	2878·9	6	2617·2	6 (16·9)
3099·3	6	77·8	6	12·0	6
96·5	6 d.	72·1	6	02·1	6
94·8	6+	70·6	6	2599·4	6
93·1	6+	63 5	6	86·0	6+
92·0	6+	62·3	6	80·8	2 (80·6)
86·4	6+	57·3	6	75·5	6+
83·1	6+	52·4	6	63·0	4 } (62·8)
81·1	6+	52·1	6	62·6	6 }
72·6	6+ br.	49·6	6	60·8	6
67·9	6	48·3	6	59·0	6
67·0	6	45·0	6	57·5	6
64·9	6	44·1	6	53·3	5 (53·6)
52·6	6	40·0	6	22·7	6
51·1	6	37·8	6	07·3	5
47·6	6	37·2	6	2497·3	6+ br.
47·1	6	33·2	5 Pb	85·7	5 (85·9)
38·3	6	24·5	4+ (24·1)	83·8	6
37·5	6	20·9	6	73·8	3 } (73·8)
34·2	6	02·1	6 Pb	73 0	6 }
28·6	6	2799·8	3 (99·5)	68·8	6 (68·5)
24·1	6	75·2	6	63·8	6
21·2	6	67·6	2 (67·4)	62·3	5 (62·1)
20·8	6	61·8	6	61·2	6
10·8	6	49·5	6	60·2	5 } (59 1)
09·3	6	47·1	6	58·8	6 }
02·6	6	46·6	6	56·7	5
01·1	6	43·9	4	53·3	4 (53·0)
2994·4	6	39·6	6	49·7	6
90·6	6	35·8	6	48·0	3 (47·6)
83·6	6	32·6	6+	46·3	5
82·3	6+	11·1	5	44·3	5 (44·0)
73·3	6	07·4	6	39·4	6+
67·1	6	2675·9	5	33·0	6 } (32·6)
49·1	6	63·2	6 Pb	31·5	6+ }
30·1	6+	37·6	6+	30·3	6
20·1	4 (19·7)	28·8	4 (29·4)	29·6	4 } (29·3)
2896 4	4 (96·2)	22·0	6	28·3	5 }
85·6	6	20·8	6	22·7	6 } (22·5)
82·3	6	19·5	6+	22·0	6 }

λ	i	λ	i	λ	i
2420·2	4 (19·8)	2328·2	6+	2233·1	6
14·9	5	25·2	5 } (24·8)	32·8	6
13·2	3 (13·0)	23·5	6 }	29·7	5 (29·4)
11·4	4 (11·0)	20·3	5 (20·1)	26·4	5+ (26·1)
09·0	6	18·5	6	20·0	6 } (19·6)
08·0	5 (07·5)	17·1	5 (16·9)	19·0	6 }
05·1	5 (04·8)	12·5	6+ (12·1)	11·5	6
02·7	5 (02·5)	09·7	5 (09·4)	06·2	6+ (05·8)
2395·7	5 (95·5)	2296·2	6 } (95·8)	04·7	6+
94·1	6	95·5	5 }	03·8	6+
93·0	6 } (92·8)	91·1	6 (90·8)	02·4	6+ (02·0)
92·5	6 }	89·8	6	2192·1	6
90·7	5 (90·4)	86·6	6 (86·3)	90·0	6
83·2	5 (83·0)	83·2	6	87·0	5
82·2	6	82·8	6 } (82·2)	81·8	6
75·0	5+ 4 AE.	81·7	6 }	71·0	6 } (70·6)
73·6	6 (73·8)	80·2	5 (79·8)	69·8	6 }
67·2	6	78·6	6	66·8	6+
64·0	5 (63·8)	77·7	6 } (77·3)	64·0	6
62·2	5 (62·0)	77·1	6 }	63·2	6
61·2	6	75·5	5 (75·3)	62·2	6 (61·8)
60·7	6	73·4	6	49·5	6
58·8	5 (58·3)	72·4	6	48·9	6
57·9	4 (57·7)	65·3	6+ 2 AE.	47·5	6
56·3	6	57·6	6	46·0	6+ br. (45·5)
55·6	6	56·7	6+	43·1	6
55·1	6	53·9	5+ (53·5)	38·3	6+ 2 AE.
54·7	5	52·0	6	29·5	6
43·8	6 (43·6)	50·3	6+	26·5	6+ 2 AE.
42·0	6 (41·8)	43·4	6+ br.	21·0	6+ br. (20·3)
39·1	5 (38·9)	42·1	6	13·0	6+ br. (13·5)
32·3	6	40·7	6 (40·1)		
31·4	5 (31·1)	33·8	6		

Kupfer (Nachtrag).

Im Kupferspectrum wurden von uns zwischen $\lambda = 4704{\cdot}8$ und $\lambda = 2105{\cdot}0$ im Ganzen 444 Linien gemessen. Bezüglich der Schärfe gilt dasselbe wie bei Silber. Aus der Tabelle II unserer I. Mittheilung sind folgende Linien als Luftlinien aus-

zuscheiden: 4650·4, 4642·7, 4592·1, 4553·5, 4508·4, 4460·6, 4434·5, 4426·0, 4345·6, 4207·1, 4190·1, 4185·7, 4103·5, 4072·4, 3939·8, 3882·3, 3864·3, 3856·3, 3839·0, 3712·8, 3365·6, 3354·3.

λ	i	λ	i	λ	i
4704·8	4	3866·1	6+	3655·9	5 (56·1)
4698·0	6+	62·0	6+	54·6	6+
51·3	1 (52·4)	51·1	6+br. } (50·3)	52·3	6+
4587·2	3 (88·2)	48·1	6+br. }	48·4	6
56·2	5 (56·8)	25·3	6	45·3	6+ (45·6)
40·0	4+ (40·4)	20·9	6+	35·9	5 (36·1)
31·2	4 (31·5)	13·6	6+	32·6	6
25·5	6+	12·0	6+	29·8	6+
20·3	6+ br.	09·6	6+ } (09·0)	27·3	5 (27·6)
13·5	6+ br.	07·6	6+ }	24·3	6 (24·6)
09·8	4 (10·2)	05·3	5	20·6	6+
06·2	5	00·1	6+ br.	3589·1	6+
4480·7	4 (80·9)	3791·4	6+	46·4	6
37·5	6+ 2 AE.	77·3	6+	45·0	6
15·8	6	75·1	6+	29·3	6+
4396·2	6+	64·9	6+	27·6	4 (27·4)
55·5	6+	62·6	6+	20·1	4 (19·9)
48·2	6	59·6	6	14·6	6+
29·0	6+	54·8	6+	00·3	6+
4253·8	6+	52·3	6	3498·3	6+
28·2	5	45·4	6+	92·1	6+
4178·3	5	34·2	5	87·8	6
44·2	6	20·6	6+	83·9	3 (83·7)
04·8	6	15·1	6+	76·2	3 (75·8)
4057·1	6+ br.	11·9	6	72·4	6+ br. (71·8)
03·1	6+	03·2	6	59·7	6
3968·6	6 Ca.	3695·4	6+	55·0	5
64·6	6+	86·6	4 (86·8)	40·8	6+
61·6	6+	81·5	6	20·4	6+
40·6	6+ 3 AE.	77·0	5 (76·8)	02·2	5 (02·0)
28·6	6+	65·8	6	3395·4	6+
25·3	6+	64·2	6+	84·9	6+
21·3	6+	59·4	6 (59·8)	81·3	4+ (81·5)
07·6	6	56·8	6	75·6	6+

λ	i	λ	i	λ	i
3365·4	4	3186·2	6+	3021·7	6
49·4	5 (49·2)	84·7	6+	15·0	6
44·7	6	81·7	6+	12·0	6
42·6	6	76·0	6+ br.	10·9	5
27·2	6+	71·4	6+	07·4	6+ 2 AE.
24·2	6+	69·8	5	2997·5	5
22·9	6+	68·4	6+	89·2	6+
21·9	6+	65·5	6	83·9	6+
18·8	6	60·2	6	79·2	6+ br.
15·6	6+ 2 AE.	58·9	6+	78·4	6+
01·2	6+	57·5	6+	75·6	6+
3293·9	6+	56·9	6+	61·2	2 (61·5)
93·1	6 (92·8)	54·7	6+	2883·1	6 (83·3)
88·4	5+ br.	51·6	6+	74·4	6+
84·5	6	49·7	6+	58·2	6+ br.
82·7	5 (82·9)	47·9	6+	37·6	4 (38·1)
77·4	6	44·9	6+	24·4	2 (24·8)
76·4	6	38·4	6+ br.	13·1	6
74·1	1 (74·2)	35·2	6+ br.	2777·2	6+ br.
68·4	6	32·4	6+	70·1	2 (70·3)
66·1	5	28·9	5 (28·6)	66·6	5 (67·0)
62·7	6	20·6	6+	62·9	6+
47·7	1 (47·8)	18·3	6+	51·4	6
38·9	6+	16·4	5+	45·5	5 (45·7)
35·9	5 (35·7)	13·6	6+	40·1	6+
34·1	6	03·7	6	37·6	6+
28·2	6	00·1	5 (00·3)	35·6	6+ br.
26·7	5	3094·1	5	33·6	6+ br.
24·9	5	88·4	6	31·9	6+ br.
23·6	5	82·7	6 d.?	25·7	6+
20·9	6+	81·8	6	23·9	6+
11·7	6+	73·9	5	21·8	5 (22·2)
08·5	5	65·9	6+	18·9	4 (19·3)
07·4	6+	55·9	6+	13·6	3 (14·1)
04·4	6+ br.	53·9	6+	03·2	3 (03·9)
01·8	6+ br.	47·1	6+	01·1	3 (01·7)
3194·2	4 (94·4)	38·5	6	2696·4	6
92·2	6+	25·0	6+	89·4	2 (90·1)
89·4	6+	23·5	6	79·9	6+
87·8	6+	22·7	6	66·4	4 o. (66·)

λ	i	λ	i	λ	i
2658·6	6+	2533·1	6	2346·2	6 (46·4)
49·7	6+	29·6	3 (29·8)	36·4	6+ (36·6)
47·7	6+	26 9	5 (27·2)	2279 8	6
46·4	6+	25 4	6 (25·7)	73·3	6
44·0	5 (44·3)	18·9	6+ (19·1)	69·1	6
41·6	6+	12·1	6	50·3	6
21·0	6+	08·8	5+ (09·1)	49·3	6 (49·5)
02·8	6+	2496·4	6+ (96 6)	46 0	6
00 5	3 (00·7)	89·8	3 (90·1)	44·1	6
2599·0	4 (99·2)	86·1	4 (86·3)	42·7	5 (43·0)
92·8	6	82·5	5 (82·7)	29·0	6 (29·3)
90·7	4 (91·0)	73·6	5 (73·9)	27·9	6+
87·6	6	47·3	6+ (47·6)	27·0	6+
86·8	6	44·6	5 (44 9)	18·2	5 (18 5)
81·2	6	40·1	6+	15·3	5+ br.(15·5)
80·2	6	36·1	6+ (36·4)	2195·8	6+ (96·0)
73·4	6 (73·9)	05·5	6 (05·9)	92·3	5+ (92·5)
71·9	6 (72·4)	03·7	4 (03·9)	79·5	5 (79·8)
71·4	6	00·3	4 (00·5)	61·5	6 (61·8)
69·5	6+ br.(69·7)	2393·0	6	49·1	6 (49·3)
66·4	6 (66 9)	92·0	6	36·1	6+ (36·3)
50·6	6	76·6	5 (76·8)	34·3	6 (34·8)
45·0	1 (45·4)	70·0	2 (70·4)	12·0	6 (12·3)
38·9	6 (39·1)	68 3	6	05·0	6
35·5	6 (35·7)	56·8	5 (57·2)		

Mangan (Nachtrag).

Mangan liefert schon eines der linienreicheren Spectren; zwischen λ = 4823·9 und λ = 2111·7 wurden von uns 1550 Linien gemessen. Dieselben zeichnen sich durch grosse Schärfe aus. Aus der Tabelle III der I. Mittheilung sind die folgenden Linien als Luftlinien auszuscheiden: 4416·3, 4414·8, 4282·6, 4189·8, 4185·3, 4176·3, 4152·8, 4145·6, 4119·0, 3919·5, 3134·9.

λ	i	λ	i	λ	i
4823·9	2	4466·9	6+ (66·0)	4337·5	6+
4783·6	3	62·3	3 (62·0)	35·9	6+
73·2	6	61·4	5 } (61·3)	28·9	6+
68·2	6	60·6	6 }	27·9	6+
66·6	4	58·4	5 (58·1)	26·8	5 (26·6)
66·0	4	57·7	5 } (57·5)	25·9	6 (25·7) Fe
64·9	6+	57·2	6 }	23·5	6+
62·5	4	56·0	5	21·4	6+ (20·9)
61·7	5	55·5	5 } (55·3)	15·4	6+
55·8	5	55·2	5 }	14·5	6+
54·2	3	53·1	5 (52·9)	08·1	5 (07·9) Fe
49·4	6+	41·2	6+	05·9	6+
46·0	6+	36·5	4 (36·3)	03·1	6+
39·2	5	22·9	6+	00·4	6 (00·2)
38·4	6+	20·0	5 (19·7)	4294·4	6+
34·1	6+	18·1	6+	90·1	6
30·4	6+	15·2	6+ Fe	88·1	6+ (87·7)
27·7	5	12·1	5 (11·7)	84·1	6+ } (84·0)
09·8	5	08·2	6 (07·7)	83·9	6 }
02·1	6	04·8	6 (04·5) Fe	81·9	6
01·2	6	4395·9	6+	81·2	4 (81·0)
4671·8	6	93·4	6+	79·7	6
4595·5	6+ br.	89·9	6+	75·9	6+
86·2	6+ br.	88·1	6+	71·9	5 (71·5) Fe
48·6	6	84·7	6	63·6	6
44·6	6+	83·6	5 (83·4) Fe	60·5	6 Fe
42·5	6	82·8	6 (82·6)	59·2	6 (59·6)
34·4	6+	81·7	5 (81·4)	50·9	6 Fe
29·9	6	79·6	6	48·1	6+
25·4	6+ br.	79·3	6 (79·1)	47·1	6+
23·4	6+ br.	77·6	6+	45·6	6+
19·1	6+ br.	75·1	5 (74·8)	44·4	6+
03·7	6 (03·9)	65·3	6+	42·5	6
02·1	4 (02·3)	63·4	6+	39·7	5 (39·5)
4496·7	6+	56·6	6+	35·2	3 (35·0)
79·6	6 } (79·3)	48·5	6+	32·4	6
78·8	6 }	46·6	6+	30·3	6+
76·5	6+	44·1	5 (43·9)	26·5	6
73·0	5 (72·8)	42·7	6+	11·8	5 (11·5)
70·4	5 (70·1)	38·2	6+	05·5	6+

λ	i	λ	i	λ	i
4204·1	6+	4111·8	6	4016·7	6
03·1	6+	10·9	5 (10·7)	12·0	6
00·3	6+	08·6	6	11·6	6
4195·9	6+	05·4	5	11·1	6+
84·4	6+ br.	03·5	5	09·9	6+
82·4	6+ br.	00·1	6+	08·7	6+
77·4	6+	4099·9	6+	08·0	6
74·4	6+	99·6	6+ br.	07·1	6
71·7	6+ br.	95·3	5 (95·1)	05·3	6 (05·5)Fe
71·0	6+ br.	92·6	6+ (92·4)	03·4	6+ br.
66·2	6+	90·9	6	01·2	6+
64·9	6+	90·2	5 (89·8)	00·2	6+
58·7	6+	86·7	6+	3997·3	5 } (97·0)
57·1	5 (56·8)	83·8	3 (83·5)	96·5	6 }
55·5	6 (55·3)	81·6	6+ (80·7)	92·5	6
54·6	6+	71·9	6 Fe	91·6	6
51·1	6+ br.	70·4	5 (70·7)	90·8	6+
48·9	5 (48·6)	68·2	6 (68·0)	90·0	6+
47 6	6 (47·3)	67·6	6+	88·7	6
44·1	6 Fe	66·4	6 (66·2)	87·5	6
41·1	5 (40·5)	65·2	5 (64·9)	87·2	5 } (87·2)
40·3	6+ (39·7)	63·7	4 (63·5)Fe	86·9	5 }
37·1	6+	61·9	5 (61·6)	84·2	6
36·9	5 (36·3)	59·6	6	82·8	6
35·0	5 (34·5)	58·1	6 (58·3)	82·5	5
34·6	6	54·5	6	82·2	6
32·4	6	52·6	5 (52·4)	81·6	6
32·2	6 Fe	51·9	5 (51·7)	81·4	6
31·2	5 (30·6)	50 9	6	80·9	6
28·2	5 (27·7)	45·9	5 (45·6)Fe	80·2	6
26·5	6	41·5	3 (41·3)	78·9	6+
25·9	6	37·6	6+	76·0	5 (76·2)
25·6	6	34·5	3 (34·8)	73·3	6
23·5	6 } (23·0)	33·7	5 } (33·6)	70·2	6
23·4	6 }	33·1	3 }	69·3	6 Fe
22·8	6 }	31·9	6	68·5	5 Ca
22·5	6	30·9	2 (30·7)	62·6	6+
14·5	6	21·0	6	58·5	6+
13·9	6 } (13·5)	20·2	6	52·2	6
13·2	6 }	18·1	2 (18·4)	44·0	6+

λ	i	λ	i	λ	i
3943·2	6+ (43·0)	3888·7	6 Fe	3795·2	6 Fe (94·8)
42·2	6	87·3	6 Fe	93·0	6+ br.
41·4	6	86·4	5 Fe (86·6)	90·3	4 (89·8)
38·5	6+	79·2	6+ } (79·0)	88·1	6 Fe
37·8	6	78·7	6 Fe }	86·9	6
35·7	6	78·1	6 Fe	85·7	6 (85·5)
33·8	5 Ca (33·9)	73·3	6	78·5	5 (78·2)
31·8	6	72·6	6 } (72·4)	76·6	6+
29·8	6	72·2	6 }	74·8	6+
28·6	6	65·7	6 Fe (65·9)	74·1	6
28·2	6 (28·0)	60·0	5 Fe (60·2)	73·2	6+ (73·5)
24·3	6 (24·5)	56·5	5 Fe (56·8)	71·6	6 r (71·2)
23·6	6	54·7	6 } (54·0)	69·3	6+
22·0	6+ (22·3)	53·5	6 }	68·5	6
20·5	6 Fe	52·7	6	68·0	6
17·7	6+	50·0	6 Fe (50·3)	67·4	6 Fe (67·2)
16·8	6+	40·0	4 } (39·7)	66·5	6
14·5	6+	39·5	6 }	65·8	6 Fe
11·6	6 } (11·5)	37·2	6	64·1	5
11·4	6 }	36·6	6	63·8	6 (63·5)
10·6	6	34·4	4 } (34·1)	60·0	6+
08·3	6+	33·9	4 }	58·4	5 Fe (58·0)
07·8	6+	29·8	5 (29·6)	56·8	6 (56·4)
06·7	6+	28·0	5 Fe (27·7)	54·7	6+
05·0	6+	26·1	5 Fe (25·8)	50·8	6
04·5	6	24·7	6 Fe (24·9)	50·6	6 (50·3)
03·7	6	24·1	4	49·6	4 Fe (49·2)
03·2	6 Fe	23·7	3 (23·5)	48·4	5 Fe (48·0)
02·6	6	20·6	5 Fe (20·4)	46·8	6
3899·5	6	13·1	6 Fe	46·2	6
98·2	6	10·8	6	45·7	5 Fe (45·4)
97·7	6	09·7	4 (09·4)	43·7	5 (43·3)
97·5	6	06·8	1 (06·4)	42·5	6+
96·4	6	05·0	6+	41·3	6+
95·8	6 Fe	02·1	5	40·2	6+ br.
95·6	6	00·8	5 (00·2)	37·4	5 } (37·0)
95·0	6	3799·5	5 (99·1)	37·3	5 }
92·8	6	98·7	6+ br.	35·0	5 Fe (34·7)
91·8	6	97·8	6+ br.	33·5	6 Fe (33·0)
89·6	6 (89·9)	96·7	6+ br.	32·1	5 (31·8)

λ	i	λ	i	λ	i
3731·2	6	3670·6	6	3601·4	6
30·2	6+	70·0	6	3593·5	6+
29·6	6	69·4	6	90·8	6
29·4	6	68·0	6+	89·3	6+
29·1	5 (28·8)	65·7	6	85·5	6
22·7	6 Fe (22·5)	65·0	6	83·8	6
21·1	6+	60·6	5 (60·3)	80·5	6+
20·1	4 Fe (19·9)	58·6	6	79·8	6
19·1	4 (18·8)	58·0	6	76·5	6+
15·5	6+ (15·1)	56·7	6	72·0	6
11·8	6	55·5	6	70·0	2 } u. (69·8)
10·1	6	54·7	6	69·7	3
09·5	6	53·6	6+	60·0	6
08·3	6	53·0	6+	59·7	6
07·0	6	51·7	6+	58·7	6 Fe
06·3	4 } (05·9)	49·7	6+	57·1	6+
05·8	6	48·8	6	55·2	6
03·7	6+	48·0	5 Fe (47·8)	48·1	1 u. (48·0)
02·0	6	43·0	6+	36·2	6+
00·5	6+	41·5	6+	35·5	6+
3696·7	5 } (96·4)	40·3	6+ br.	26·4	6
96·2	6	38·0	6+ br.	24·8	6 (25·0)
94·3	6	36·5	6	21·5	6 Fe
93·8	4 } (93·6)	35·8	6	15·2	6
93·0	6	34·8	6	14·0	6 Fe
91·1	6	31·6	5 (31·4)	12·0	6
90·6	6	29·9	5 (29·7)	10·1	6
87·7	6 Fe	27·6	5 (27·2)	3495·3	6+
86·5	6+	26·5	6+	94·5	6+
85·2	5+	25·4	6+	93·6	6
85·0	6+ (84·8)	21·6	6+	93·1	6
83·7	6+	19·3	4 (19·1)	92·3	6
82·2	5 (82·0)	18·8	5 Fe	90·6	6 Fe
80·4	6	15·5	6	82·2	6
80·2	6 (80·0)	08·7	6+ } (08·7)	76·8	6 Fe
78·7	6	08·5	3	75·5	6 Fe
77·8	6	06·7	6+	74·2	1 (73·9)
77·2	5 (77·0)	05·8	6	70·1	6
76·0	6	03·8	6	66·8	6+
72·0	6	01·8	6	66·0	6 Fe

λ	i	λ	i	λ	i
3463·7	6	3373·7	6+	3316·3	6+
61·7	6+	72·7	6+	14·7	6+ (14·9)
60·5	1 (60·2)	72·0	6+	14·3	6+
52·5	6+	70·5	6+	14·0	6+
51·7	6+	69·2	6+	13·3	6+
51·4	6+ (51·2)	68·2	6+	13·1	6+
50 8	6	64·0	6+ } (63·2)	12·7	6+
49·5	6+ br.	63·0	5 }	12 3	6+
44·5	6	61·2	6+	11·7	6+
43·9	6 Fe	60·0	6+	11·5	6+
42·1	1 (41·8)	59·3	6+ } (58·6)	11·2	6+
41·1	6 Fe	58·3	5 }	07 7	6 (07·9)
39·7	6	56·0	6+	07·0	6
35·2	6	55·4	6+	06·6	6 Fe
34·8	6	51·5	6+	05·3	6
34 3	6	49·1	6+	03·2	6 (03·7)
33·7	6	48·3	6+	01·7	6+
29·3	6	47·5	6+	3298·1	5 (98·3)
29·0	6	45·0	5+ br.	96·8	5 (97·0)
28·2	6	43·7	6	93·7	6+ br.
27·3	6 Fe	41·8	6+	92·6	6+ br.
24·0	6+ br.	41·3	6+	90·9	6+ br.
22·7	6+ br.	41·0	6+	88·2	6+1·5 AE br.
20 8	6	38·7	6+	87·2	6+
20·2	6 } (19·7)	37·3	5 (37·5)	85·7	6+
19·5	5 }	36·3	5 (36·6)	80·7	6
18·3	6+	35·3	6	78·4	6
17·1	6+	31·6	5+ } (31·0)	78·0	6
14·7	6	30·7	5 }	76·7	6
04·7	6+	28·5	6	76·1	6
01·6	6	28·0	6	73·9	5
3394·8	6	26·1	6+	72·9	6
92 6	6+ (Fe)	25·4	6+	71·1	6
89·7	6+	25·0	6+	70·3	6
87·7	6+	24 6	6+	69 4	6
83·5	6+	22·7	6+	69·3	6
81·6	6+	21·8	6+	68·7	6 (68·9)
80·5	6+	18·7	6+ br. (17·9)	67·7	6 (67·9)
76·2	6+			64·2	6+
74·8	6	17·3	6+ (17·9)	63 0	6+

λ	i	λ	i	λ	i
3261·1	6	3189·2	6	3110·1	6 (09·9)
58·3	5 (58·6)	88·5	6	09·5	6+ br.
53·9	6	87·7	6		(09·9)
52·8	4 (53·0)	85·3	6	09·0	6+
48·4	4 (48 6)	84·7	6	06·6	6+
47·6	4	83·9	6 } (83·6)	06·1	6+
46·2	6+	83·4	6 }	03·0	6+
45·0	6+	83 3	6	02·3	6 } (01·9)
42·6	6+	79·5	6+	01·4	6 }
41·8	6+	78·5	5 (78·7)	00·3	6
40·5	6 } (40·4)	75·7	6+	3099 5	6
40·3	6 }	74·7	6+	98·1	6
39·0	6	73·3	6	97·9	6
38·8	6	72·0	6	97·1	6 } (96·6)
37·3	6	70·7	6	96·3	6 }
34·8	6+ 1 AE. br.	69·8	6	96·1	6
33·8	6+ br.	68·3	6+	89·8	6+
30·2	6	65 5	6	88·5	6+
28·2	3 (28·0)	60·0	6	85·8	6+
26·1	6 } (25·9)	59 3	6	83·8	6+
25·7	6 }	58·6	6+	82·8	6 } (82·6)
24·7	5 (24·9)	57·7	6+	82·3	6 }
23·3	6	52·0	6+	82·1	6
11·8	6	51·4	6+	76·4	6
11·3	6	49·9	6 (49·7)	75·2	6
06·8	6	46·2	6	67·3	6 Fe
06·5	6	45·7	6	66·4	6
03·7	6	42·5	6	62·7	6 } (62·4)
02·5	6	32·3	6+	62·2	6 }
01·7	6	26·6	6	61·2	6+
01·2	6	26·1	6	57·4	6+
00·5	6+	23·6	6	56·7	6+
3198·9	6	21·0	6	55·7	6+
97·0	6	20·7	6	53·3	6+
96·2	6	18·3	6	51·3	5 (51·6)
94·3	6+	17·3	6	47·6	6 Fe
92·9	6+	13·7	6+	46·3	6 (46·7)
91·4	6	13·1	6+	45·6	5 (45·8)
90·7	6	11·2	6	43·3	6 } (43·2)
90·0	6	10·6	6	43·1	6 }

λ	i	λ	i	λ	i
3042·8	6	2996·1	6+	2924·6	6+
42·2	6	95·1	6+ } (94·6)	24·0	6+
41·2	6 } (40·8)	94·3	6	23·3	6+ } (22·9)
40·6	6	93·5	6+	22·6	4
39·6	5+ (39·8)	92·3	6+	21·3	6
38·5	5 } (38·3)	89·7	6	20·6	6+
38·0	5	84·7	6+ br.	17·3	6+
37·3	6		(84·9)	14·6	6 (14·9)
35·3	5 (35·5)	80·7	6+ br.	11·0	6+
34·7	5 (35·0)	76·9	5 } (76·7)	09·0	6+
34·2	6	76·5	5	08·8	6+
33·5	5 (33·7)	74·1	6+	07·2	6 (07·4)
33·0	6+	73·2	6 Fe } (72·8)	05·3	6 (05·6)
29·3	5+ } (29·2)	72·6	6	04·7	6 (05·0)
29·1	5+	72·4	6+	02·8	5 (03·1)
25·7	6	71·2	6+	02·2	6+
25·2	6	70·2	6+ br.	01·0	6+
22·7	6 (22·9)	68·5	6+ br.	2898·9	6+ } (98·8)
21·7	6	66·8	6 (67·0)	98·7	4
20·9	6	64·6	6	96·1	6
20·4	6	63·7	6	95·3	6 } (95·1)
18·5	6+	60·0	6	94·8	6
17·5	6+	58·8	6 (59·1)	93·8	6 (94·0)
14·7	6 (14·9)	57·0	6	92·4	4 (92·6)
14·6	6	51·8	6 } (51·4)	89·5	3 (89·8)
13·4	6	51·2	5	88·2	6
12·7	6+	45·8	6	87·8	6
11·7	6+ } (11·4)	42·8	6	86·6	4 (86·8)
11·2	6	41·5	6 (41·9)	85·1	6
11·1	6	41·0	6	83·3	6
08·0	6 Fe	40·3	6	81·5	6 } (81·3)
07·1	6+ Fe	37·2	6 Fe	81·1	6
03·1	6	34·6	6	79·9	6 } (79·7)
02·0	6	34·3	6	79·5	3
00·9	6 Fe	33·1	2 (33·2)	75·8	6
2999·5	6+	30·4	5 (30·7)	75·0	6 (75·2)
98·7	6+	29·0	6	73·5	6+
97·8	6+	27·3	5	70·7	6
97·1	6+	26·5	6 Fe	69·7	6+
96·5	6+	25·5	6	69·0	6+

λ	i	λ	i	λ	i
2868·2	6+ br.	2804·1	6	2768·1	5 (68·4)
66·7	6+	02·8	6	65·7	6
61·8	6+ br.	02·5	6	64·2	6
58·5	6+ br. (58·3)	02·0	6+	63·9	6
57·0	6	01·2	5 (01·0)	62·5	5+ br. (62·1)
55·2	6 } (55·1)	2799·2	6	61·1	5 (60·9)
55 1	6 }	97·6	6	60·5	6
54·3	6	95·2	5 } (95·1)	58·6	6
54·2	6	94·9	5 }	58·2	6 (58·0)
48·0	6+	93·7	6	57·3	6+
38·6	6+	93·3	6	56·3	6
36·4	6+	91·2	6 } (91·1)	54·3	6+ (54·0)
35·5	6+	91·1	6+ }	53·5	6+ } (53·3)
31·5	6+	90·4	6+	53·2	6 }
30·6	6	90·2	5 (89·9)	52·5	6+
23·3	6	89·3	6+ br.	51·6	6+
22·4	6 }		(89·9)	50·2	5 Fe (50·0)
21·9	6 } (22·0)	88·2	6 Fe	48·7	6
21·8	6 }	86·6	6	48·0	6
21·4	6	85·3	6	47·4	6
20·7	6	83·8	6 Fe	45·7	6
20·2	6	82·3	5 (82·1)	45·5	6
18·8	6	81·7	6+	45·0	6
18·7	6	80·6	6+	44·7	6
17·7	6 } (17·5)	80·3	6+	43·2	5 Fe (43·0)
17 3	6 }	79·2	5 (78·9)	40·9	5 } (40·7)
16·3	5	78·0	5 } (77·8)	40·3	6+ }
15·0	4 (15·4)	77·6	6+ }	39·0	6+
14·0	6+ } (13·9)	75·5	6	38·6	6+
13·3	6 }	75·1	6	37·7	5 (37·5)
13·0	6 }	74·5	6	37·2	5 (37·0)
12·6	5 } (12·6)	74·0	6	34·1	6
12·3	5 }	73·7	6	33·4	6
11·3	5 (11·5)	73 2	6	32·7	6
08·6	6	72·7	6	31·9	6
08·3	6	72·3	6	30·9	6+
07·9	6 } (07·7)	71·3	6	29·9	6+
07·5	6 }	69·9	5	28·8	4 (28·5)
06·1	6	69·1	6	27·7	4 (27·3)
04·3	6	68·7	5 (68·4)	26·1	4 (25·8)

λ	i	λ	i	λ	i
2725·1	6	2696·2	6+ (96·0)	2663·5	6
24·6	4 (24·3)	95·6	5	62·9	5 (62·6)
24·0	6	93·8	5	60·9	6
23·8	6 Fe	92·7	5	60·1	6
23·2	6	92·0	6+	59·8	6
22·9	6	91·4	6+	56·4	5
22·2	4 (21·8)	90·7	6	56·1	4 (55·8)
20·0	5	90·1	5 (89·9)	55·0	6
19·9	5 (19·3)	86·1	4 (85·9)	53·8	6 (53·6)
19·4	5	84·0	5+	52·7	4 (52·5)
19·1	5	83·1	6+	52·0	6
18·5	6+	82·6	6+	51·1	4 (50·9)
17·6	5 (17·4)	82·0	6+	48·1	5
16·9	5 (16·7)	81·6	5 (81·3)	47·6	6
16·3	6+ Fe	81·0	5 (80·7)	43·9	6
15·9	6	80·6	5	43·2	6
15·7	6	80·2	5	42·5	6
15·0	6+	79·5	5 (79·1)	41·8	6
14·7	6	78·9	6	40·0	3 (39·8)
14·1	6+ (13·8)	78·1	5	38·7	5+
12·4	6	77·6	5 (77·3)	38·3	4 (38·1)
11·7	4 (11·5)	77·0	6	38·0	5
10·7	5	75·7	5	37·2	6
10·5	5 (10·1)	75·2	5	37·0	6+
10·1	5+	75·0	5 (74·7)	34·6	6
09·7	6+	74·7	5	34·4	6
08·7	5+ (Fe)	73·6	4 (73·4)	33·9	6
08·5	4 (08·3)	72·8	3 (72·6)	33·4	6
07·7	5 (07·5)	72·1	5	33·1	6
06·8	6	71·4	6	32·5	3 (32·3)
04·8	6	71·0	6	32·0	5
04·1	5 (03·8)	70·8	6	31·4	5
03·6	6	70·0	6	31·1	5
03·1	6	69·7	6 (69·3)	30·6	6
01·7	3 (01·3)	68·2	6 (67·8)	30·1	6+
01·2	4	67·2	4 (66·9)	29·6	5
2699·3	5 (98·9)	67·0	4	27·3	6
98·3	6	65·5	5	27·1	6
97·7	6	64·4	5 (64·0)	26·6	5
97·3	6	63·7	6	24·9	5

λ	i	λ	i	λ	i
2624·1	5	2593·3	5	2553·9	6
21·9	6 Fe	92·1	6	53·1	5 (53·3)
20·3	6 }	91·9	6	52·9	6+
20·2	6 } (20·1)	91·3	5	52·1	6
19·6	6 }	89·7	5	51·5	6
19·4	6	87·6	6 } (87·5)	50·2	6
17·6	5 Fe	87·4	6 }	49·8	6
17·1	6	86·6	6	49·2	6
16·6	5	86·1	6+	48·3	5
15·9	6+	85·5	6+	48·0	6
15·6	6+	84·3	6	47·6	6
14·2	6	82·4	6+	47·5	6
12·7	6	81·7	6	47·0	6
12·2	6	78·4	6	46·7	6
11·0	6	76·1	1 u. (76·3)	46·5	6
10·8	6	75·4	6+	45·1	5 (45·3)
09·6	5	72·4	6	44·7	6+
08·8	5	70·2	6	44·2	6
08 5	5	69·4	6	44·0	6
08·1	6	68·6	6	42·6	6
07·9	6	68·4	6	42·1	6+
07·4	6	67·3	6	41·0	5 (41·2)
07·2	6 Fe	67·0	6 Fe	40·8	6
06·9	6 } ,(06·8)	66·1	6	40·3	6
06·7	6 }	64·2	6	40·0	6
06·2	6	63·5	6 Fe	39·4	5+
04·4	5	62·4	6	38·9	5+ (39·1)
03·2	6	62·0	6	37·6	6
03·1	6	61·7	6	37·3	6 Fe
02·1	6	61·0	6	36·8	6 Fe
01·9	6	60·7	6	36·3	6
01·2	6	60·0	6	36·0	6
00·7	6	59·3	5 }	35·0	6
2599·6	6 Fe	58·6	6 } (58·6)	33·4	5 } (33·0)
99·0	5 } (98·8)	58·4	5 }	32·8	5 }
98·4	5 }	58·1	6	29·6	6
97·6	6	56·3	5	29·2	6
94·8	6 (94·6)	55·7	6	29·1	6
93·9	5 } (93·8)	55·2	6	27·5	6
93·7	5 }	54·9	6	27·2	6

λ	i		λ	i		λ	i	
2526·4	6		2487·0	6		2434·9	6+	
26·2	6		85·1	6	(85·3)	34·2	5+	
24·7	6—		84·4	6		33·7	5	(33·5)
24·1	6—		83·0	6		33·0	6	
23·1	5		82·8	6		32·4	6	
22·6	6		82·2	6		31·4	6+ br.	
21·7	6		81·1	6		30·1	6+	
21·1	6—		80·3	6		29·6	6—	
20·2	6		77·4	6—		28·0	3+	u.
20·1	6		75·6	6		27·6	4+	(27·8)
19·6	6		73·7	6—	(73·9)	25·9	6— br.	
18·1	5	(18·3)	72·9	5	(73·1)	23·9	5+	
17·4	6		69·4	6		23·1	6+	(22·8)
16·8	5	(16·9)	67·1	6—		22·4	6	
16·7	5		66·3	5		21·7	6—	
16·2	6		65·4	6—		21·0	6+	
15·6	6		64·2	6		20·0	6	(19·7)
15·5	6		61·9	6		19·3	6	
15·0	6		61·0	6		18·1	6	(17·9)
14·1	5		60·8	6		17·1	5+	
13·1	6—		60·1	6—		13·9	6—	
11·8	6 Fe		58·8	4—	59·[illegible]	12·9	6	
09·2	6		58·1	6—		11·2	6	
09·0	6		57·0	6—		10·7	4	(10·5)
08·4	6		55·5	6		09·4	5	
07·0	6		53·7	5		08·1	6	
06·6	6		53·2	4	53·[illegible]	07·8	6	
06·1	6—		52·6	3		07·3	6	
05·4	6—		49·9	6		06·1	6+	
2497·3	5+		48·9	6—		03·7	6—	[illegible]3·5
97·1	5—	96·9	48·0	6—		02·2	6	02·[illegible]
96·[illegible]	6—		45·7	6—		01·7	6	
95·7	6—		44·7	5	44·5	00·7	6	(00·3)
94·0	6—		43·7	6—		2399·6	6	
92·7	6		43·[illegible]	6—		99·1	6	
92·4	6—		4[illegible]·6	6	4[illegible]·3	98·1	6—	
91·6	6		39·4	6		97·6	6—	
91·[illegible]	6		38·2	2 u.	37·7	95·5	6	
90·7	6		37·6	4		89·2	6—	89·0
88·2	6		36·8	6—		88·8	5	

λ	i	λ	i	λ	i
2387·9	6+	2348·4	6 (48·4)	2308 4	6
87·5	6+	41·4	6 } (41·1)	05·1	6 (05·4)
85·3	6	40·8	6 }	2299·8	6
74·5	6	33·4	6	99·2	6 (99·4)
73·9	6	32·4	6	93·6	6+
65·5	6	19·6	6	70·4	6
65·4	6	19·1	6	20·8	6
59·2	6	14·1	6	2177·1	6
48·9	6	13·0	6	11·7	6+
48·5	6 (48·4)	09·1	6+		

Wolfram (Nachtrag).

Die Zahl der Linien im Wolframspectrum ist eine sehr bedeutende. Wir haben zwischen $\lambda = 4694 \cdot 1$ und $\lambda = 2161 \cdot 2$ nicht weniger als 3300 Linien gemessen. Dieselben sind sehr scharf, zeigen aber verhältnissmässig geringe Intensitätsunterschiede, wie überhaupt die letzteren mit der Linienzahl im Allgemeinen abzunehmen scheinen. In der Tabelle IV unserer I. Mittheilung sind die folgenden Linien als der Luft angehörig zu streichen: 4396·1, 4336·9, 4327·3, 4325·7, 4319·7, 4317·0, 4189·3, 4185·0, 4153·4, 4145·7, 4085·2, 4041·5, 3882·1, 3007·0. Ferner ist zu bemerken, dass die Linien 3968·7 und 3933·8 nicht dem Wo, sondern dem Ca angehören.

λ	i	λ	i	λ	i
4694·1	5+	4679·3	6	4671·6	6
92·0	5+	78·8	6	68·7	6
87·9	6	77·9	6	66·0	5
83·7	5	76·9	6	65·0	6+
82·8	6	75·4	6+	64·1	6+
81·4	6	75·2	6+	63·2	6+
80·8	3	72·4	6	62·1	6
79·8	6	71·9	6	61·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
4661·4	6	4600·6	6	4542·0	6
60·0	3	00·1	5	40·3	6
57·6	4	4598·4	6	39·8	6
55·5	6+	92·6	4	36·6	5
54·4	6	88·8	4	35·0	5
50·9	5+	87·8	6+	34·6	5
46·3	6	86·9	5	32·3	6
45·3	6	86·1	6	30·5	6
45·1	6	85·5	6+	29·8	6
42·7	5	84·8	6+	28·6	6+
40·4	6	82·2	6	27·3	6
38·0	6+	79·8	6+	22·9	6+
37·4	6+	78·3	5	20·0	6+
36·2	6	75·2	6+	19·1	6
34·8	5	72·8	6	17·4	6
33·3	6+	72·6	6	16·5	6+
32·7	6+	71·9	6	15·8	6+ (15·5)
31·8	6+	70·6	4	14·1	6+
29·9	6	69·3	6+	13·1	5
29·5	6	67·6	6+	12·8	5 (12·5)
29·0	6	67·3	6+	09·6	6
28·6	6	66·3	6	09·3	6
27·8	6+	65·4	6	08·9	6
27·4	6+	64·1	6	08·4	6
27·1	6+	63·7	6	04·8	5
26·3	6+	62·1	6	04·0	5
25·4	6+	61·6	6	03·1	6
23·9	6+	60·4	6	02·3	6
23·5	6	59·0	6	00·3	6
20·8	6	56·8	6	00·2	6
16·6	6+	55·3	6+ } (54·5)	4498·6	5
15·0	6	54·1	2 }	97·8	6
13·5	4	52·6	6	97·0	6
10·0	5	51·9	5	96·4	6+
09·0	6+	50·4	6	95·4	6
06·6	6+	49·8	6+	94·0	5
04·8	5	45·6	6+	92·4	6
03·5	6+ br.	44·6	6+ } (44·0)	90·0	6
01·6	6+ br.	43·6	5 }	89·1	5
01·0	6	42·9	6	88·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
4487·8	6	4442·5	6	4396·9	6
87·5	6+	41·9	5	95·1	6
85·3	6	39·8	6	94·5	6
84·3	3 (84·5)	39·0	5	93·8	5
82·0	6	38·5	6	90·9	6+
81·5	5	37·6	6	89·9	5
80·3	6	37·0	5	87·9	6+
79·0	6	35·8	6	87·5	6
78·6	6	35·1	6 Mo	86·7	6
76·0	6	33·7	6+ } (33·5)	84·8	4 (85·1)
75·7	6	33·1	6 }	81·8	6+ Mo
75·0	6+ Mo	32·2	6	80·1	6
74·1	5	30·9	6+	79·3	6
73·0	6	29·0	6	77·5	6+
72·6	6	28·6	6	73·8	6+
72·0	6	27·6	6+	73·0	6+ } (72·7)
71·6	6	25·6	6	72·5	5 }
69·9	6	25·1	6	71·8	6
68·8	5	23·8	5	70·8	6
66·9	5	22·8	6+	68·7	6
66·5	5	22·6	6	65·9	4 (66·1)
65·8	6	21·9	5	64·7	4 (64·9)
63·5	6	21·1	6	61·6	5
63·1	6	20·6	5	61·1	6
62·6	6	19·4	6	60·0	6+
60·6	5	18·9	6	59·3	6+
59·3	6+ br.	18·6	6	58·6	6+
58·4	6	15·8	6	58·0	6+
58·2	6	13·4	6	56·5	6+
56·2	6	13·2	6	55·2	5 (55·0)
54·9	6	11·5	6	47·0	5
52·3	6 (52·5)	11·1	6	46·3	6
50·4	6	10·0	6	45·9	6
49·9	6	09·6	6+	45·1	6
49·0	5	08·8	6 } (08·5)	43·2	5
45·2	5	08·3	4 }	42·4	6
44·6	6	06·1	5	41·3	6+
44·2	6	03·5	6	39·5	6
43·1	6	02·8	6	39·1	6
42·8	6	00·3	6+ (00·1)	38·6	6

λ	i	λ	i	λ	i
4338·2	6+	4287·0	6+	4249·5	6
30·7	5	85·0	5 (85·3)	48·8	6
26·9	6+	83·8	6	48·2	6
25·1	6+	83·0	6+	47·6	6
24·6	6	82·0	6	47·3	6
22·9	6	81·4	6+	46·0	6
21·5	6+	80·5	6+	45·6	6
20·4	6+	79·0	6	44·5	4 } (43·9)
18·6	6	78·5	6	43·8	6 }
16·8	5	77·8	6	43·4	6 (43·0)
16·3	6+	77·4	6	41·5	4 } (41·1)
15·3	6+	76·0	6	41·0	6 }
13·1	6+	75·5	4 } (75·3)	40·8	6
12·8	6+	75·0	6 }	40·4	6
12·3	6	74·6	4 (74·4)	40·1	6
11·0	6+	73·7	5	38·6	6
10·2	6	72·3	6	36·6	6 (36·8)
10·0	6	71·8	6	35·5	6
09·3	6	70·9	6 } (70·7)	34·4	5
09·0	6	70·8	6 }	33·0	6
07·6	5	69·9	5	32·6	6
06·3	6	69·5	3 } (69·3)	31·9	6
05·8	6	68·8	6 }	31·8	6
05·6	6	68·1	6	31·4	6 } (31·3)
05·1	6+	67·9	6	31·3	6 }
02·6	6	66·6	5 (66·4)	30·0	6+
01·1	6	65·0	6	29·1	6
4299·0	6+	63·5	4 (63·1)	28·5	6 } (27·8)
97·6	6	60·3	4 } (60·0)	27·6	6 }
97·2	6	59·9	6 }	26·8	3 } Ca
95·7	6	59·4	4 } (59·0)	26·4	6 } (26·2)
94·6	2 (94·4)	58·5	6 }	25·7	6 }
94·1	5	57·3	6	25·0	5 }
93·0	6+	57·0	6 (56·8)	24 9	5 } (24·5)
92·8	6+	55·6	6	24·1	6+ }
92·0	6+	54·3	5	22·2	5
91·5	6+	54·1	6 (53·8)	22·0	6 } (21·6)
90·1	6 } (89·7)	52·6	6+	21·5	6 }
89·3	6 }	51·8	6+	20·7	6
88·4	6	50·1	6+	20·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
4219·5	4	4180·4	5 (80·2)	4142·3	5
19·2	6 } (18·8)	78·7	6	41·6	6
18·7	6	78·0	6+	40·9	6
16·0	6	77·0	6	40·4	6
15·5	3	76·9	6	40·1	6
15·1	6 } (15·0)	76·0	6	39·3	6
14·5	6	75·6	4 } (75·1)	38·5	6
14·0	6	74·6	6+	38·3	6
13·5	6	72·9	6+	38·1	6
12·9	6	72·1	6	37·6	5
11·5	6 } (11·0)	71·9	6	37·5	4 } (37·3)
10·4	6	71·1	4 (70·7)	36·5	6
10·3	6 } (10·0)	68·7	4 } (68·3)	34·7	6+
09·7	6+	68·3	6	33·6	5
07·0	4 } (06·6)	66·9	6	32·3	6
06·3	5	66·2	6	30·9	6
05·6	6+	65·7	6+ } (65·2)	30·6	6 } (30·4)
04·5	4	64·9	6	30·2	6
02·0	6	64·0	6	27·0	6 } (26·8)
01·3	6	63·0	6+	26·9	5
00·9	6	61·6	6	23·0	6
00·5	6	61·0	6	22·7	6
00·1	6	60·4	6	22·0	6
4199·7	6	60·0	6	20·8	6
98·9	6	59·0	6	19·0	6
98·7	6	57·1	5	14·8	6
98·3	6	54·8	5	14·2	5 } (14·0)
97·9	6	53·2	6	13·9	6
97·4	6	52·6	6	12·4	6
97·3	6	51·8	6	11·8	5
93·9	6+	51·1	6	09·8	4
93·0	6+	50·6	6	08·5	6
89·3	6	50·0	6	07·9	6
87·0	6+	49·8	6	06·8	6
86·0	6	49·5	6 } (49·4)	04·0	6
85·5	6	49·3	6+	01·8	6
83·7	6	48·3	6	01·0	6
83·6	6 } (83·2)	46·8	5	4099·2	5 (98·9)
83·0	6+	45·3	5 (45·1)	97·2	6
81·5	6	44·6	6	96·6	6

λ	i	λ	i	λ	i
4095·8	6	4052·5	6	4011·1	6
94·3	6+	51·5	6	11·0	6
93·3	6	50·1	6+	10·3	6
92·5	6	48·5	6 } (48·0)	09·7	6
91·3	6	48·1	6 }	07·0	6
91·2	6	46·8	6	05·7	6
90·8	6	44·1	6	05·3	6
90·3	6	42·5	6	04·1	6
89·6	6	41·7	6	03·8	6
88·9	5 } (88·6)	41·2	6	02·8	6
88·5	5 }	40·7	6	01·5	6
87·6	6	40·0	6	00·7	6
87·1	6	39·5	6	3998·7	6
84·5	6+	35·3	6 } (34·7)	98·2	6
83·9	6+	33·9	6 }	97·8	6
83·1	5 (82·9)	32·5	6+	97·3	6
81·6	4 } (81·2)	31·6	6	97·1	6
81·3	6 }	31·4	6	95·0	6
79·5	6	30·0	6	93·8	6
79·1	6 } (78·9)	29·7	6	92·5	6
78·3	6 }	29·0	6 }	88·8	6
77·9	5	28·9	6 } (28·9)	88·5	6
75·7	6	28·4	6+ }	88·0	6
73·2	6	25·6	6 }	87·5	6 } (87·3)
73·1	6	25·1	6 } (25·3)	87·1	6 }
70·7	5	24·9	6 }	86·3	6+
70·0	3	22·8	6	84·9	6 } (84·4)
67·0	6	22·1	6 (21·8)	84·2	6 }
65·5	6	20·8	6	83·3	4 (83·1)
65·0	5	19·7	6+	80·7	5 } (80·5)
63·8	6 (64·0)	19·3	5 (19·1)	80·0	6 }
60·9	6+ } (60·5)	17·0	6	77·8	6
60·3	6 }	16·2	6	76·5	6+
59·2	6+	15·3	4 (15·1)	75·9	6
58·0	6	13·9	6	75·5	6
57·5	6	13·8	6	72·5	6
56·8	6	13·2	6	72·0	6
55·8	6	12·2	6	69·3	6
55·2	6	12·0	6	62·4	6
53·5	6	11·8	6	61·7	5

λ	i	λ	i	λ	i
3960·8	6	3917·8	6	3879·7	6
60·1	6+	17·6	6	79·4	6
59·5	6+	15·5	5+ (15·3)	79·2	6
58·9	6	14·3	6+	78·7	6
57·6	6	13·8	6	78·3	6
57·2	6	13·5	6 } (13·2)	77·9	6
55·7	5	13·0	6 }	77·5	5 (77·2)
53·8	6	11·5	6 (11·7)	76·2	6+
53·5	6	09·4	6	76·0	5
53·2	5 } (53·1)	07·5	6	74·7	5
53·0	6 }	07·3	6 (07·0)	73·1	5
52·3	6	06·1	6	72·8	5+ (72·6)
52·0	6	06·0	6	71·8	6+
48·8	6	05·8	6 (05·6)	70·8	6+
48·3	6 } (47·9)	04·2	6	69·6	6+ } (69·1)
48·2	5 }	03·5	6	68·7	6 }
46·5	6	03·1	6 Mo	67·7	6
44·3	5 (44·0)	02·0	6	67·5	6
42·5	6	01·5	6	66·2	6+
42·0	6	01·0	6 (00·7)	65·5	6
41·7	6	00·0	6 (99·7)	64·6	5 } (64·3)
41·1	6	3899·0	6	63·8	6 }
40·6	6	98·2	5 (97·8)	63·0	6
38·3	6	97·2	4 (96·9)	62·7	6
37·8	6	95·8	6+	61·3	6 } (61·2)
37·2	5	94·2	6 } (93·9)	61·2	6 }
35·5	5	93·7	6 }	60·1	5 } (60·0)
35·2	6 (35·0)	93·0	5	59·5	5 }
31·7	6	91·0	6	59·0	6
31·1	6	89·5	6+	57·6	6
30·7	6	88·7	6+	57·5	6
30·5	6 (30·3)	88·2	6 (88·0)	57·0	5 } (56·7)
26·2	6	86·9	6	56·6	5 }
25·3	6	86·5	6 (86·3)	56·2	6 }
24·9	6	84·2	6	55·7	6 } (55·7)
24·6	6 (24·4)	84·0	6	55·5	6 }
23·1	6	83·5	6+	54·8	6
22·9	6	82·7	6+	54·0	6
18·8	6	81·6	4 (81·2)	53·0	6
18·5	6	80·3	6	51·7	4 (51·5)

λ	i	λ	i	λ	i
3636·8	6	3603·9	6	3569·7	6
35·4	6+	03·0	6+	69·3	6
35·2	6+ Mo	01·7	6	69·1	6 } (68·5)
33·8	6	01·2	6	68·2	5 }
33·4	6	00·6	6+ (00·8)	67·6	6
32·7	6	3599·0	6	65·8	6
31·5	6	97·8	6	65·7	6
31·0	6	95·6	6	65·5	6
30·9	6	95·2	6	64·5	6
30·4	6	95·0	6	64·2	6
30·2	6	94·6	6	63·6	6 (63·8)
29·1	5	94·1	6	62·6	5 (62·8)
26·5	6	93·6	6	61·5	5 (61·8)
25·8	6	90·9	6	59·0	6
25·5	6	90·5	6+	58·5	6
25·1	6	89·9	6	58·4	6
24·3	6	89·7	6+	57·3	6
23·6	6	88·7	6+	57·2	6
23·1	6	87·1	6	56·1	6
22·9	6	86·3	6+	55·8	6
21·4	6	85·8	6+	54·6	6
20·7	6	85·3	6+	54·1	6
20·0	6	85·0	6	54·0	6
19·6	6	84·8	6	53·0	6
19·3	6	83·5	5 (83·7)	52·3	6
16·9	6	82·8	6 (83·0)	51·6	6 } (51·3)
16·5	6	82·7	6	51·0	6 }
16·2	6	82·0	5 (82·2)	50·8	6
15·6	6	79·8	6+	50·2	6
15·0	6	78·6	6+	48·3	5
14·6	6	77·6	6	46·5	6
11·0	6+	76·0	6	44·6	5
08·9	6	75·3	5	44·3	6
07·6	6+	74·0	6	43·3	5
07·3	5 } (07·0)	73·5	6	42·3	6
06·7	6 }	72·7	6	41·7	6
06·4	6	72·2	6	41·3	6+
05·6	6	71·0	6	40·8	6
05·2	6	70·3	5	40·4	6
04·1	6	69·8	6	40·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
3539·5	6	3510·6	6	3477·2	5
38·6	6 (38·8)	10·1	5	76·6	5
38·2	6	09·4	5	76·0	5
37·5	5 (37·7)	09·1	6 } (08·9)	74·2	6+
36·3	4 (36·5)	08·7	3 }	73·0	6
35·6	5	08·0	6	72·4	6
35·4	6	07·3	6	71·9	6
34·5	5 (34·8)	06·6	6	70·5	6+
32·8	6	06·3	6+	70·2	6+
32·7	6	04·9	6	68·3	5
31·4	6	04·8	6	68·0	6
31·1	6	03·7	4 (03·9)	67·6	6
30·9	6	03·1	6	67 0	6
30·7	6	02·2	6	66·5	6
28·9	6	01·4	6+ } (00·7)	66·0	6
28·8	6	00·3	6 }	65·2	6
28·1	6	3499·7	6	64·6	5
27·8	6	98·9	6 } (98·6)	63·6	3 } (63·2)
26·9	5	98·2	6 }	62·7	6+ }
25·7	5 (26 0)	98·0	6	62·2	6+
24·6	6 Mo	96·9	6	61·7	6
24·3	6	96·0	6	60·3	6
23·6	6 } (23·4)	95·8	6	59·8	6
23·2	6 }	93·2	6+ br. (93·4)	59·6	6
22·2	6 } (22·2)	91·2	5	58·8	6
22·1	6 }	90·3	5	58·4	6
21·0	6	89·9	6	57·8	6
20·2	6+	89·5	6+	56·5	6
18·9	6	88·7	6	55·1	5
18·6	6	88·6	6	54·0	6
17·5	6	87·1	6	52·9	6+
17·1	6 }	85·5	6	52·6	5 } (52·2)
16·3	6 } (16·5)	85 3	6	52·0	6 }
16·1	6 }	83·5	6	51·9	6
15·1	6 } (14·5)	82 8	6	51·3	6
14·3	6 }	81·5	6	50·8	6
13·0	6	80·6	6	50·3	6
12·2	5 } (12·0)	80·3	6	50·0	4 }
11·8	6 }	79·0	6+	49·5	6 } (49·6)
11·3	5	78·0	5	49·0	6 }

λ	i	λ	i	λ	i.
3448·4	5	3415·4	5+	3386·7	6 } (86·4)
48·2	6 } (48·1)	14·7	6	86·2	6 }
48·0	6 }	13·6	5 (13·4)	86·0	6 } (85·8)
47·0	6	12·8	5	85·1	6 }
46·6	6	12·0	6+	84·5	6
45·8	6	11·0	6	84·4	6
45·6	6	09·3	6+	84·0	6
45·3	6	06·9	5 } (06·8)	83·3	5
44·7	6	06·7	5 }	82·4	6
44·2	6	06·2	6	82·0	6
43·2	5	06·1	6	81·2	5
42·1	6	05·3	6	79·8	6
41·0	6	04·8	6	79·3	5 } (79·1)
38·8	6+	04·3	6	78·7	6 }
38·2	6	04·2	6	78·4	6
35·7	5	03·8	6	78·3	6
33·9	6	02·8	6 Mo	77·5	6
32·6	6+	02·2	6 } (02·1)	77·0	6
32·3	6+	01·9	3 }	75·3	6
31·7	6+	01·5	6	74·3	6
30·8	5+ } (30·6)	01·0	6	73·4	6
30·4	6 }	00·7	6	73·0	6
29·7	5 } (29·6)	00·2	6	72·4	5 } (72·2)
29·4	6 }	3398·3	5	71·7	6 }
27·8	5	97 7	6	71·3	6
26·3	6	97·4	6	70·7	6
26·0	6	96·5	6	70·4	6
25·6	6	96·0	6	70 0	6 } (69·9)
24·9	6+	95·0	6	69·9	6 }
24·6	5 (24·4)	94·6	5	69·2	6
23·3	6	93·7	6+	68·3	6+
22·8	6	93·1	6	67·8	6
21·4	6	92·5	6	67·5	6
20·2	5	91·7	6	66·8	5
19·3	6	91·3	6	66·5	6
18·6	6	90·5	5+	66·0	6
18·4	6	89·7	6	65·3	6
17·7	6	89·0	5 (88·7)	64·9	6
17·6	6	87 8	5	64·0	5 } (63·8)
16·7	4 (16 5)	87·0	6	63·5	5 }

λ	i		λ	i		λ	i	
3362·5	6		3335·6	6		3300·5	6	
62·1	6		34·0	6		3299·7	6	(99·9)
59·3	6		31·7	5		98·8	6	(98·5)
59·2	6		30·8	6+		98·3	5	
57·8	6		28·2	6		97·5	5	(97·7)
57·2	6		27·8	6		96·3	6	
56·5	6+ br.		27·2	6	(26·4)	95·2	6	
55·9	6		26·3	5		94 3	6+	
55·5	6		26·2	6		93·8	5	
55·1	6		25·7	6		93·0	6	
54·7	5	(54·4)	25·0	6		91·7	6	
54·2	6		24·2	6		91·5	6	
54·0	6		23 5	6		91·1	6	
53·8	6		22·6	6		91·0	6	
53·1	5		21·7	6		90·6	6	
52·5	5		21·2	6	(21·2)	90·3	6	
52·0	6		21·1	6		90·1	6+	
51·6	6+		20·5	6		88·8	6+	
50·2	6		20·4	6		88·0	6+	
49 6	6		19·6	6		87·3	6+	
49·4	5	(48·9)	18·7	6		85·8	5+	
49·0	5		18·5	6		83·7	5+	
48·4	5		18·0	6		82·0	5	
47·8	6		17·0	6		80·2	6+	
47·2	6		16·1	6		79·5	6+	
46·2	6	(45·9)	15·2	6		77·8	6	
45·8	5		13·6	6		77·6	6+	
45·6	6		10·3	5	(10·5)	77·0	6	
44·5	6		09·6	6		76·5	6+	
43·5	4	(43·4)	09·2	6		75·7	6+	
43·2	4		08·3	5	(08·5)	73·2	6+	(73·4)
41·3	6		05·5	6		72·0	6	
40·3	6		04·6	5	(04·6)	71·7	6+	
39·7	6		04·5	6		70·3	6	(70·2)
39·1	5	(38·9)	03·8	6		70·2	6	
38·7	5		03·3	6		69·7	6	
38·3	6		03·0	6		69·0	6	(68·8)
38·0	6+	(37·7)	02·0	6		68·6	6	
36·7	5		01·3	6	(01·2)	68·3	5	
36·1	6		01·0	5		66·7	5	

λ	i	λ	i	λ	i
3266·0	5	3229·7	6 Mo	3205·6	6
65·2	5	29·5	6 } (29·2)	05·3	6
64·2	6	29·0	6	04·5	6 } (04·0)
63·2	6	27·9	6	03·7	6
62·0	6	27·7	6	03·3	4 } (03·0)
61·2	6	26·7	5 (26·4)	02·2	6
60·8	6	24·9	6	02·0	6
60·3	6	24·0	6	01·7	5 } (01·1)
59·4	6	23·3	6+	00·5	6+
57·8	6 (58·0)	22·7	6	00·1	6
56·1	6	22·1	6	3199·4	6
55·7	6 } (55·3)	21·3	5	99·0	5
55·0	5	21·1	6+ } (20·8)	98·4	5 (98·0)
54·3	5	20·2	6	97·5	5 (97·1)
52·5	6+	20·0	6	96·5	6
50·2	6	18·9	6	96·0	6
48·7	6	18·7	6 (18·3)	95·8	6
47·9	6	17·6	6 (17·2)	94·7	5+ br } (94·1)
47·6	6	16·3	5 (15·9)	93·8	5
45·4	6	15·7	4 } (15·1)	93·2	6
43·5	4 } (43·1)	15·3	5	93·0	6
43·2	5	14·4	6	92·3	6
42·1	5	14·1	6	92·2	6
41·4	6	13·4	6	91·6	5
41·2	6	13·2	6	91·0	5 (90·8)
40·0	6+	12·1	6	89·3	5 } (88·8)
38·9	6	11·9	6	88·5	6
38·5	6	11·2	6	88·0	6 (88·2)
38·3	6	10·9	6	87·8	6
37·2	6	10·7	6	87·1	5 } (86·7)
36·0	6	10·0	5 } (09·5)	86·4	6
35·9	6	08·6	6	85·0	6
35·1	6	08·3	6	84·4	6
34·6	6	08·2	6 } (08·0)	84·0	6
33·8	6	07·8	6	83·5	6 } (83·0)
33·3	5 } (33·0)	07·6	6	82·8	6
32·6	6	07·3	5 } (07·0)	82·2	6
32·2	6	06·7	6	81·8	6
31·6	6	06·4	5 } (06·0)	80·8	6
30·9	6	05·7	6	80·2	6

λ	i		λ	i		λ	i	
3179·5	4+	(79·0)	3149·9	5	(49·7)	3118·3	6	
78·7	6+		49·8	6		17·5	5	
78·1	5	(77·5)	48·1	6		16·0	6+	(15·7)
77·2	5		47·9	6		15·4	6	
76·7	6		46·8	6		15·3	6	
76·0	4		46·3	5		13·6	6	
75·1	6		45·7	5		13·3	6	
74·7	6		45·5	6		12·7	5	
73·6	6		44·5	5	(44·8)	12·4	6	
72·8	6		43·3	5		12·3	6	
71·6	6		43 0	6		11·8	6	
71·4	6		42·9	6		11·1	5	
70·2	6		41·3	5		10·6	5	(10·4)
70·0	6		40·3	6		08·6	5	
68·5	6+		40·2	6		08·3	6	
67·9	6		39·4	6	(39·2)	07·9	5	
67·7	6		38·7	6		07·5	6	
67·0	6	(66·7)	37·9	6		07·2	5	
66·5	6+		37·6	6		06·5	5	
65·7	6	(65·5)	37·2	6		06·1	6	
65·4	6		35·9	6		05·9	6	
64·8	6		35·8	6		04·9	6	
64·5	6		33·8	5		04·3	6	
64·4	6		32·6	6		03·7	6	
63·5	5		31·2	6		03·4	6	
62·2	6		30·4	6		03·0	6+	
62·0	6		29·7	5		02·2	5	(02·4)
61·3	6		29·0	5		01·2	6	
60·7	6		27·7	5		00·7	5	(00·4)
60·1	4		27·3	6		00·2	6+	
59·0	4+ br.		26·3	5		3099 0	6	
57·0	6+	(56·5)	25 7	6		98·7	6	
55·7	6		25·3	6	(25·0)	98·4	6	(98·0)
55·5	6		24·5	6+		96·5	6	
55·2	6		21·9	6+ Mo		96·0	5	
54·2	6		21·0	6		95·3	6	(95·1)
52·8	6		20·7	6		95·0	6	
52·4	5		20·1	5		94·7	6	
51·6	6		19·6	6		94·0	6	
51·3	5		19·4	6		93·6	5	

λ	i		λ	i		λ	i	
3093·3	6		3065·0	6		3038·0	6	
92·3	6		64·1	5		37·7	6	
91·9	6		63·3	6		37·4	6	
91·7	6		63·0	6		36·7	5	(36·1)
91·2	6		62·8	6		35·4	6	
90·7	6		61·7	5		35·2	6	
90·5	6		61·0	6		34·2	6	
89·2	6		59·8	6		33·9	6	
89·1	6		59·7	6		33·7	5	(33·1)
88·3	6		59·1	6		32·5	5	
88·1	6		58·5	5	(58·0)	32 0	5+	(31·5)
87·5	5		57·5	6		31·0	5	
86·4	5		56·2	6+		30·3	6	
85·4	6		55·7	6		29·9	6	
85·0	5		55·5	6		29·5	6	
84·4	6		55·1	6		28·9	6	
83·6	5		55·0	6		28·7	6	(28·2)
83·2	6	(83·0)	54·1	6		27·8	6	
82·2	5		53·5	5		27·3	6	
81·9	5	(81·5)	51·8	6		26·7	5	
81·1	5		51·3	4	(50 8)	25·9	6	
80·7	6		50·6	6		25·2	6	
79·3	6		50·0	5		24·9	6	
79·0	6		49·8	5	(49·1)	24·5	4	(23·9)
77·6	3	(77·0)	49·0	6		23·6	6	
76·9	6		48·6	5		22·9	6	
76·0	5		47·6	5		22·7	6	
75·3	6+		47·1	5	(46·5)	22·6	6	
74·0	5		46 5	5	(46·1)	21·7	6+	(21·5)
73·3	5	(73·0)	45·6	6		21·0	6	
72·7	5		45·2	6		20·7	5	
71·8	5		44·4	6		20·3	6+	(20·1)
71·3	5	(71·0)	43·7	5	(43·5)	19·6	6	
69·3	5	(68·8)	42·2	6+		19·4	6	
68·6	6		41·8	5	(41·3)	18·6	5	(18·1)
68·2	6		41·0	6+		17·9	6	
67·9	5		40·3	6		17·4	5	
67·6	5	(67·1)	39·6	5		17·1	6	(16·9)
67·0	5	(66·7)	39·3	5	(38·9)	15·6	6	
65·1	6		38·7	6		14·9	6	

λ	i		λ	i		λ	i	
3014·6	6		2992·0	5	(91·8)	2969·0	6	
13·7	6		91·5	6		68·0	5	
13·2	6		90·7	6		67·1	6	
12·1	6		89·5	6		67·0	6	
11·7	6		88·8	6		66·7	6	
11·2	6		88·6	6	(88·2)	66·2	6	
11·0	6		87·3	5	(87·0)	65·6	6	
10·7	5		86·4	6		65·0	6	
09·6	6		86·1	6		64·5	5	
08·8	5		85·9	6	(85·7)	62·6	6	
08·0	6		84·9	6		61·8	6	
06·5	6		84·5	6		61·0	5	(60·7)
06·3	6		84·2	6		60·3	6	
05·3	6		83·6	6		60·1	6	
04·8	6		83·2	6		60·0	6	
04·2	6		82·6	6		59·0	6+	
04·0	6		82·3	5		58·0	6	
03·7	6		81·6	6		57·4	6	
03·0	6		80·7	6+		57·3	6	(57·0)
02·8	6		79·9	5		56·8	6	
02·2	5	(02·0)	78·3	6		56·5	6	
01·9	6		78·0	6		55·3	6	
00·9	6		77·6	5		55·0	5	
00·6	5		77·2	5	(77·0)	54·0	6	
00·3	6	(00·0)	76·9	6		53·9	6	
2999·6	6		76·5	5	(76·0)	53·0	6	
98·7	5	(98·3)	75·7	6+		52·3	4	(51·9)
98·0	6		75·1	6		51·0	6	
97·7	6		74·4	5		50·5	5	(50·2)
97·6	6	(97·4)	73·3	6		49·2	6	
96·9	6		73·1	6	(73·0)	48·5	6	
96·5	6		72·9	6		48·3	6	
96·0	6		72·5	6		47·8	6+	
95·7	6		71·7	6		47·5	6	
95·4	6		71·4	6		47·0	5	
95·3	5		71·0	6		46·0	6+	
94·8	5		70·4	6		45·3	6	
94·7	6	(94·3)	70·0	6		44·6	5	
93·6	5		69·8	6		43·5	6	
92·9	6		69·1	6		43·2	6	

λ	i	λ	i	λ	i
2942·7	6	2917·0	6+	2893·0	6
42·3	6 } (42·0)	16·7	6 } (16·2)	92·6	6
41·6	6 }	15·6	6 }	92·2	6
41·4	6	15·2	6	91·6	6
41·1	6	14·7	6	91·1	6
40·8	6	14·4	6	90·7	6 } (90·3)
40·3	5	12·6	5	89·9	5 }
39·0	5+ (39·3)	12·3	6 } (12·0)	89·5	6 } (89·1)
37·7	6	11·7	5 }	88·8	6 }
37·2	6	10·5	5 } (10·0)	88·4	6
36·7	5 } (36·2)	09·3	6 }	87·7	6
35·7	6 }	08·6	5	87·0	5
35·3	6	08·3	6 } (08·0)	86·5	6 (86·3)
35·0	5 (34·7)	07·6	6 }	85·8	6
33·0	6	07·4	6	85·6	6
32·7	6	06·5	5	85·0	6
32·0	6	05·7	6	84·3	5 } (83·8)
31·6	6 } (31·3)	05·3	6	83·3	6 }
31·0	6 }	05·0	6	82·5	5
30·0	5 (29·8)	04·7	6	81·7	5 } (81·1)
29·1	6	04·3	5 (03·7)	80·8	6 }
28·7	6	03·7	5 (03·1)	80·3	6
28·2	6	02·7	6	79·6	6
28·0	6	02·3	6	79·3	6 Mo
27·9	6 } (27·3)	01·8	6	78·4	6
27·1	6 }	01·3	5	78·3	6 } (77·7)
27·0	6 (26·4)	01·0	6	77·1	6 }
25·9	5 (25·4)	00·2	6	76·3	6
25·1	5 (24·7)	2899·0	6	76·1	6
24·1	6	98·7	6	75·6	6 }
23·6	5	98·4	6	75·3	6 } (75·1)
23·2	6	97·7	6	74·7	6 }
22·0	6	97·3	6	74·0	6
21·2	6	96·5	5	73·5	6 } (73·0)
21·1	6	96·1	5	72·8	6 }
19·6	6	95·0	6	72·0	6
19·1	6	94·3	6	71·5	6
18·7	5	93·8	6	71·0	6
18·3	6 } (18·1)	93·6	6	70·8	6
17·7	6+br }	93·1	6	69·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
2868·7	5 } (68·4)	2847·4	6 (47·8)	2819·2	5 (19·8)
68·0	6 }	47·3	5 } (46·9)	18·2	5 } (17·7)
67·8	6 } (67·7)	46·3	6 }	17·5	6+ }
67·5	6 }	45·8	6	16·3	5 } (16·0)
66·8	6	45·1	6	15·5	6 }
66·7	6	44·7	6	14·9	5 } (14·5)
66·5	6	43·9	6+	14·3	6+ }
66·2	6 } (66·0)	42·8	6 (43·0)	13·3	5
65·9	6 }	42·7	6 } (42·2)	12·3	5
65·5	6	41·7	5 }	10·0	5
65·0	6	41·2	6	09·0	5
64·7	6 }	40·8	6	08·0	6
64·2	6 } (64·2)	40·0	5	07·9	6 Mo
63·7	6 }	39·0	6	06·7	6
63·3	6	38·6	6+	06·1	5 }
62·6	6	37·9	6	05·7	6 } (05·7)
62·3	6	37·5	6	05·2	6 }
61·6	6	37·0	6	04·9	6
61 3	6	36·3	6	04·7	6
61·1	6 } (60·7)	35·8	6	04·3	6
60·3	6 }	35·3	6+	04·0	6
59·6	5 } (59·1)	34·3	5 } (34·0)	03·7	5
58·7	6 }	33·7	5 }	03·3	6 }
58·5	6	33·3	6 } (33·4)	03·1	6 } (03·0)
58·2	6	33·2	6 }	02·7	6 }
57·8	6	32·6	6	02·5	6
57·7	6	32·0	6	02·2	6
57·3	6 (57·1)	31·4	5 } (31·0)	01·6	6
56·2	5	30·2	5 }	01·3	5 (00·8)
55·6	5 } (55·2)	30·0	6 } (29·5)	00·2	6 (99·8)
54·9	6 }	28·7	6+ }	2799·3	4 } (98·9)
54·6	6	27·5	5 (27·1)	98·5	6+ }
53·6	5	26·6	5 (26·1)	97·6	6+
52·3	5	25·3	6	97·1	6+
51·1	6	25·0	6+	96·3	6
50·9	6	24·3	6+	95·7	5 (95·4)
49·7	6	23·9	6+	93·8	6
48·3	6	22·6	5 (22·2)	93·2	6
48·2	6 Mo	20·7	5	92·8	6 } (92·4)
48·0	6 (47·8)	20·0	5 (19·8)	92·0	6 }

λ	i	λ	i	λ	i
2791·9	6 (91·5)	2760·6	6 (60·7)	2728·1	6+
90·6	5	59·6	6	27·7	6 (27·4)
90·3	6	59·5	6	26·7	5 (26·4)
89·3	5 } (89 0)	57·9	6	25·5	6
88·7	6 }	57·3	6 } (57·1)	25·2	6
88·2	6	56·8	6 }	24·5	6
86·5	5	55·1	6	20·6	5+ } (20·4)
85·8	5 } (85·5)	53·3	5 } (53·3)	19·9	6 }
85·3	6 }	53·2	6 }	19·0	6
84·4	6	51·6	6	18·1	5
84·2	6	50·8	6	17·2	6
83·9	6	50·4	6	16·9	6
83·3	6	50·2	6	16·4	5 (16·0)
82·7	6	49·4	5 d. } (49·2)	15·4	5 } (15·1)
82·3	5 (82·0)	49·0	6 }	14·5	6+ }
80·5	5	48·4	5	14·0	6 } (13·7)
79·5	6	47·0	6	13·5	6+ }
78·8	5 } (78·5)	46·9	6 } (46·7)	12·7	5+
78·1	6 }	46·5	5 }	10·9	5 } (10·6)
77·7	6	43·3	6	10·4	6 }
76·7	5	43·2	6	08·9	6
75·2	6	43·0	5 } (42·8)	08·7	5
74·7	5	42·6	5 }	07·1	6+ (07 5)
74·2	6	42·1	6	06·8	5
72·8	6	41·3	6	06·0	6
71·2	6 } (70·9)	41·0	5 } (40·7)	05·8	6 } (04·2)
70·7	6 }	40·3	6 }	03 6	5 }
70 2	6	39·7	5+	03·2	5 } (02·8)
70·0	6	38·6	6+	02·2	4 }
69·2	6	37·9	6+	01·6	5
68·5	5	37·0	6	00·6	5
68·2	6 } (68·0)	36·7	6	00·3	6
67·7	6 }	35·9	6+	2699 4	5+ br.
67·2	5 (66·9)	34·8	5 (34·6)		(98·6)
66·5	5 (66·2)	31·2	6+	98·6	6 } (98·6)
65·5	6	30·9	6+	98·1	5 }
65·0	5	30·0	6 } (29·5)	97·2	6
64·5	4 } (64·0)	29·3	6 }	96·0	6+ } (95·5)
62·7	6+ }	29·0	6	95·1	6+ }
60·8	6 (60·7)	28·5	6	94·7	5

λ	i		λ	i		λ	i	
2694·6	5		2659·9	6		2628·1	6	
94·2	6	(93·2)	59·4	6		27·8	6	
92·7	6+		58·2	4	(58·0)	26·9	6+	
92·0	6+	(91·5)	58·0	6		26·5	6	
91·2	5		57·5	6		26·3	6	
88·4	5	(87·9)	56·7	6		25·7	6+	
87·7	6		56·2	6		25·2	6+	
87·2	5		55·7	6		22·9	6	
86·6	6		54·7	6		22·3	5+	
85·5	6		54·5	6		21·7	5	
85·3	6		53·7	5		20·8	5	(20·6)
84·6	6	(84·4)	52·1	5	(51·9)	20·2	4	
83·8	5		51·5	6		18·0	6	
83·4	5		51·1	6		17·2	6	
80·8	6		50·4	6		16·7	6	
79·9	4	(79·7)	50·0	6		15·4	4	(15·6)
79·2	6		49·8	6		14 4	6+	
78·1	5		47·2	6		13·8	5	
76·5	6		46·9	6		13·1	6	
76·1	5	(75·7)	46·2	6		12·8	5	
75·4	6		45·7	6		11·9	5	
74·9	6		44·7	6		11·4	6	
74·3	6		44·1	6		10·7	6	
73·2	6		43·3	5	(43·2)	10·3	6	
72·9	6		43·1	5		08·4	6	
70·6	5	(70·4)	39·6	6		07·1	5	(06·4)
69·5	5	(69·2)	39·2	6		06·5	5	
68·2	6		38·7	6		06·4	6	
67·9	6		38·3	6		05·9	6	
66·7	5	(66·4)	37·2	6		05·5	6	
66·2	5		36·7	6+		04·5	6	
65·9	6+		35·4	5	(35·6)	04·2	6	
65·2	6		34·9	6		03·6	6	
64·6	4	(64·3)	34·0	5		03·1	4	(02·9)
64·1	6		33·2	6		02·6	4	
63·7	6		32·9	6		02·1	6	
63·0	6		31·4	5		01·5	5	(01·7)
62·4	6		29·6	6+		01·2	6	
61·8	6+		29·1	5	(28·9)	00·9	6	
60·8	6		28·3	6		2598·9	5	(98·7)

λ	i	λ	i	λ	i
2598·5	5 (98·7)	2572·4	6 } (72·5)	2548·9	6
97·9	5	72·2	4 }	48·7	6
96·2	6+	71·4	4 (71·7)	48·4	5
95·6	6	69·8	6	47·8	6
94·9	6	68·7	5	47·0	6
93·8	6	67·8	6 } (67·8)	46·2	5
93·4	6	67·7	6 }	45·3	6 } (45·1)
92·9	6	67·4	5	44·7	5 }
92·6	6	66·8	6	43·9	6
89·7	6	66·6	6	43·3	5 (43·5)
88·5	6	66·2	6	41·6	6+ } (41·5)
87·9	6	65·7	6	41·4	6 }
87·5	6	64·4	6+ d.	40·9	5+
87·2	6	63·7	5	39·8	5 } (39·6)
86·6	6	63·4	6 } (63·2)	39·2	5 }
86·3	6	63·0	4 }	38·9	6
85·7	6	62·5	5	38·8	6
85·1	6	62·2	6	38·2	6
84·2	5	61·9	6	37·5	6
83·3	6	61·5	6	36·6	6
82·5	6	60·7	6	36·4	5
82·3	6	59·9	6 } (59·7)	35·5	6
80·3	6	59·4	5 }	34·7	5 (34·9)
79·8	6	57·9	5	34·0	5 (34·5)
79·5	4 } (79·5)	57·4	6	33·5	6
79·2	4 }	57·1	6	33·1	6 } (33·0)
78·7	6	56·9	6	32·8	6 }
78·2	6	56·6	6	32·7	6
77·8	6	55·9	6 } (55·2)	32·2	6
77·5	6	55·0	4 }	31·9	6
77·2	6 }	54·8	5	30·9	5
76·7	6 } (76·7)	54·6	5	30·6	6
76·2	5 }	53·7	6	29·7	6
76·0	5	53·1	5	29·6	6
74 9	6+	52·2	5 (52·5)	29·2	6 } (29·1)
74·1	6+	52·0	6	29·0	5 }
73·8	6	51·3	5 (51·5)	28·6	5
73·4	6	51·0	6 } (50·4)	28·2	6
73·2	6	50·1	6 }	27·7	6
72·7	6 (72·5)	49·9	6	26·2	5 (26·5)

λ	i	λ	i	λ	i
2525·7	6	2502·0	6 (02·4)	2477·7	4 (78·0)
25·5	6	01·8	6	77·2	5
25·0	6	01·0	6	76·6	6+
24·8	6 } (24·4)	00·8	6	75·7	6 } (75·8)
24·1	5 }	00·1	5 } (99·8)	75·6	5 }
23·5	6	2499·7	6 }	74·3	6 } (74·4)
23·4	6	99·2	5	74·2	6 }
22·9	6	98·9	6	73·9	6+
22·8	6	98·2	6+	72·4	6 } (72·0)
22·3	6+	97·5	5 (97·7)	71·7	5 }
21·1	6	96·6	5 (96·8)	69·9	5 (70·1)
20·4	6	95·5	6	69·2	6
20·0	6	95·3	6	68·4	5
19·0	6	94·9	6	67·4	6
18·6	6	94·1	6+	66·5	5 (66·7)
18·1	5	92·9	5 (93·2)	65·9	6
17·3	5 (17·5)	92·3	5	65·6	5
17·0	6	91·7	6 } (91·1)	65·2	6
16·1	5	90·6	5 }	64·6	5
15·7	6	90·2	6	64·2	6
15·3	5 }	89·9	6 }	64·0	6
14·4	5 } (14·7)	89·2	5 } (89·2)	63·2	5
14·3	5 }	88·7	4 }	62·8	6
13·9	5 } (13·5)	88·2	5	62·3	6
13·2	5 }	87·5	6	61·9	6 } (61·7)
12·7	5	87·3	6	61·4	5 }
12·1	6	86·3	6+	61·2	5
11·7	6	85·6	6+	60·4	6+ (60·2)
11·3	6	84·7	6+ } (84·5)	59·8	6
10·9	6 } (10·7)	84·3	5 }	59·6	6
10·3	4 }	84·0	6	59·2	6 } (59·0)
09·9	6	83·6	5+ br.	58·7	5 }
09·6	6	82·1	5 } (81·8)	58·5	5
08·6	6	81·6	5 }	57·1	5 (57·4)
07·1	6 (07·3)	80·9	6 } (80·4)	56·5	6
06·8	6	80·2	5 }	56·1	6 } (56·0)
06·0	5 (06 2)	79·1	6	55·9	5 }
05·5	6+	78·9	6	54·9	6
04·7	6+	78·7	6	54 8	6
03·6	6+	78·3	6 (78·0)	53·8	6

λ	i		λ	i		λ	i	
2452·9	6		2423·3	6	(23·7)	2395·1	6	
52·0	6		22·5	6		94·4	6	
50·3	6		22·3	6	(22·0)	93·2	6	
49·7	5		21·1	5		93·0	5	(92·7)
48·6	6		20·6	5	(20·3)	91·8	6	
48·2	5		20·0	6+		91·2	6	
47·2	6		19·4	5	(19·1)	90·9	6	
46·4	4	(46·0)	18·2	6		90·4	5	(90·2)
45·5	6		17·9	6		89·8	5	
44·9	6		17·6	5		89·3	6	
44·6	6		16·0	6	(16·5)	88·8	6	
44·2	6		15·7	6		88·6	6	(88·4)
41·6	6		14·8	5		87·7	6+	
41·4	6	(41·2)	14·2	6		86·5	6	
39·9	6		13·3	6		86·2	6	
39·4	6		12·8	6		85·5	6	
38·3	6	(38·1)	11·9	6		85·3	5	
37·4	5	(37·1)	11·6	6		83·5	6	
36·6	6		11·4	6	(11·3)	82·7	6	
35·9	6		11·2	6		82·4	6	(82·1)
35·4	6		10·5	5	(10·3)	82·0	6	
35·0	5	(34·9)	09·5	6		81·8	6	
34·4	6		09·3	6	(09·1)	81·4	6	
34·2	6		08·3	5	(08·1)	81·2	6	
33·1	6		07·8	5		80·9	6	
32·9	6	(32·7)	07·2	6		80·4	6	
32·2	6		06·6	6		80·3	6	
31·6	6		06·3	6		79·7	6	
30·7	6		06·0	6		75·9	6	(75·7)
29·8	6+		05·6	6		74·5	5	(74·3)
28·7	6		05·3	6	(05·2)	73·7	6	
28·3	6		04·9	5		73·4	6	
27·8	6		04·3	5		72·7	5	(72·5)
27·5	5	(27·2)	03·4	6		71·1	6	
26·6	6		02·4	6		70·1	5	
25·9	6+		2399·9	6		69·0	6	
24·9	6		98·1	5	(97·9)	68·4	5	(68·2)
24·6	6		96·2	6		67·8	6	
24·1	6		95·6	5	(95·5)	67·2	6	
23·9	6	(23·7)	95·4	6		66·7	6	

λ	i	λ	i	λ	i
2365·9	6 } (65·7)	2331·6	6	2259·4	6 (59·7)
65·5	6 }	28·4	6 (28·2)	58·4	6 } (57·7)
64·4	5	27·6	6+	57·4	6 }
64·1	6	26·7	6+	55·2	6 (54·9)
63·5	6	23·1	5 (22·9)	51·6	6
62·2	5 } (62·0)	19·0	6 } (18·5)	50·9	6
61·7	6 }	18·0	6 }	50·2	6 } (49·7)
61·3	6 } (61·0)	14·7	6 (14·9)	49·5	6 }
59·4	6 }	14·2	6	45·9	6
58·9	5 (58·7)	13·0	6 (12·8)	45·3	6 (45·1)
58·1	6	09·9	6 (09·7)	43·8	6
57·4	6 } (57·1)	07·1	6	43·0	6+
56·9	6 }	01·9	6 (02·1)	41·4	6 } (41·0)
53·7	6	2299·4	6+	40·2	6+ }
53·5	6	98·9	6	35·6	6+br. (35·4)
51·6	6	98·5	6	31·4	6 (31·2)
51·3	6	91·6	6+	27·0	6+
50·4	6 } (50·2)	90·8	6 (90·4)	26·1	6+ (25·9)
49·9	6 }	88·8	6 (89·1)	22·3	6
49·4	5 (49·1)	84·8	6+	21·7	6
48·2	5+br. (47·9)	84·1	6+	15·5	6
45·0	6 (45·5)	83·4	6+ (83·6)	15·1	6
44·5	6	81·4	6	01·1	6
43·7	5	81·1	6	2198·9	6 (98·7)
41·4	6	80·7	6 (80·4)	98·2	6
36·8	6 (36·5)	78·3	6 (78·7)	97·7	6
36·0	6 (36·2)	75·3	6 (75·5)	96·0	6
35·2	6	70·5	6	94·9	6
34·7	6	66·5	6	86·0	6+
33·9	5 } (33·6)	64·6	6	61·2	6+ (60·7)
33·2	6 }	62·6	6		
32·2	6 (32·0)	60·3	6 (59·7)		

Erklärung der Tafeln.

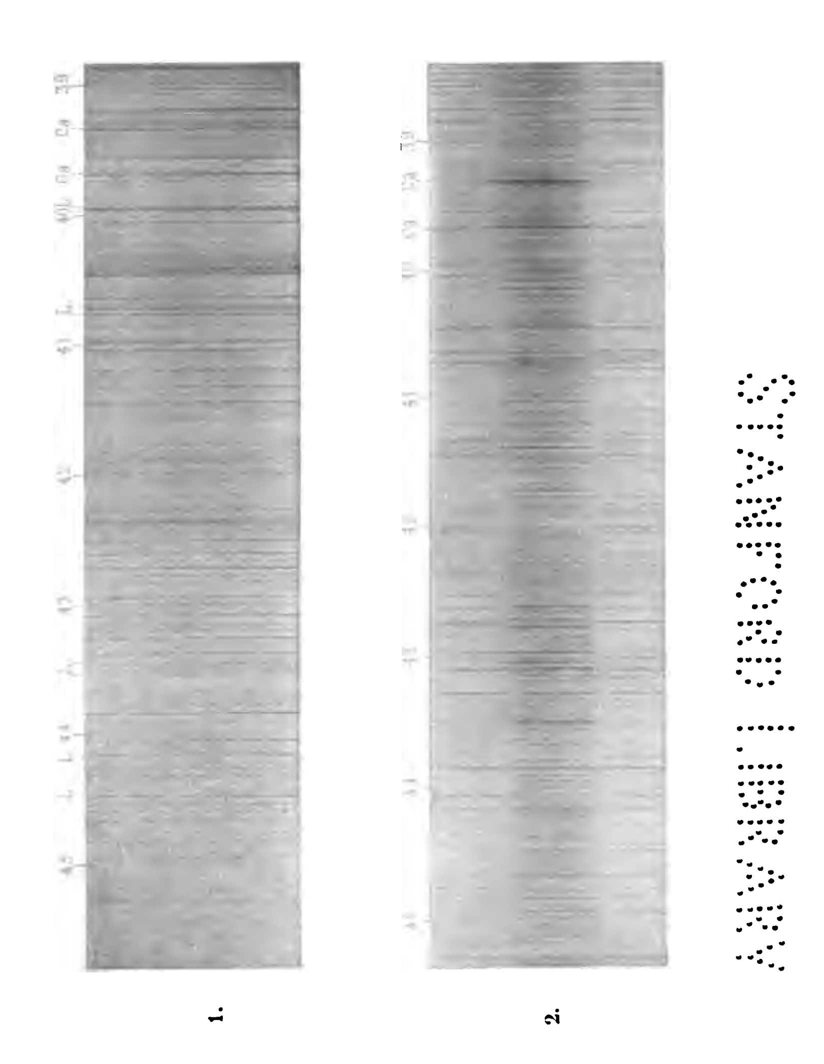
Die Reproductionen der Spectren haben sämmtlich die Originalgrösse der gemessenen Platten und sind ohne jede Retouche wiedergegeben; sie erreichen selbstverständlich bei weitem nicht die Definition der Originale oder selbst der Silbercopien. Es ist gut dieselben durch eine grosse Lupe von 2 bis 3 maliger Vergrösserung zu betrachten. Die beigegebene Scala, die von 100 zu 100 A E fortschreitet, dient nur zur Orientirung über die Wellenlängen.

Auf Tafel I, Fig. 1 ist ein Theil des Fe-Spectrums ohne Benützung der dreitheiligen Blende, in Fig. 2 die entsprechende Partie des Wo-Spectrums mit dem mit Hilfe der Blende einphotographirtem Vergleichsspectrum (Fe) gegeben. In diesen beiden Streifen sind auch die stärksten Luftlinien und 2 Ca-Linien bezeichnet. Auf den folgenden Tafeln zeigen die den kleinsten Wellenlängen entsprechenden Streifen deutlich den Effect der theilweisen Abdeckung des Spaltes durch Glas; die ultravioletten Linien des II. Spectrums, das zur Messung diente, erscheinen verkürzt gegen die blauen Linien des übergelagerten I. Spectrums.





F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

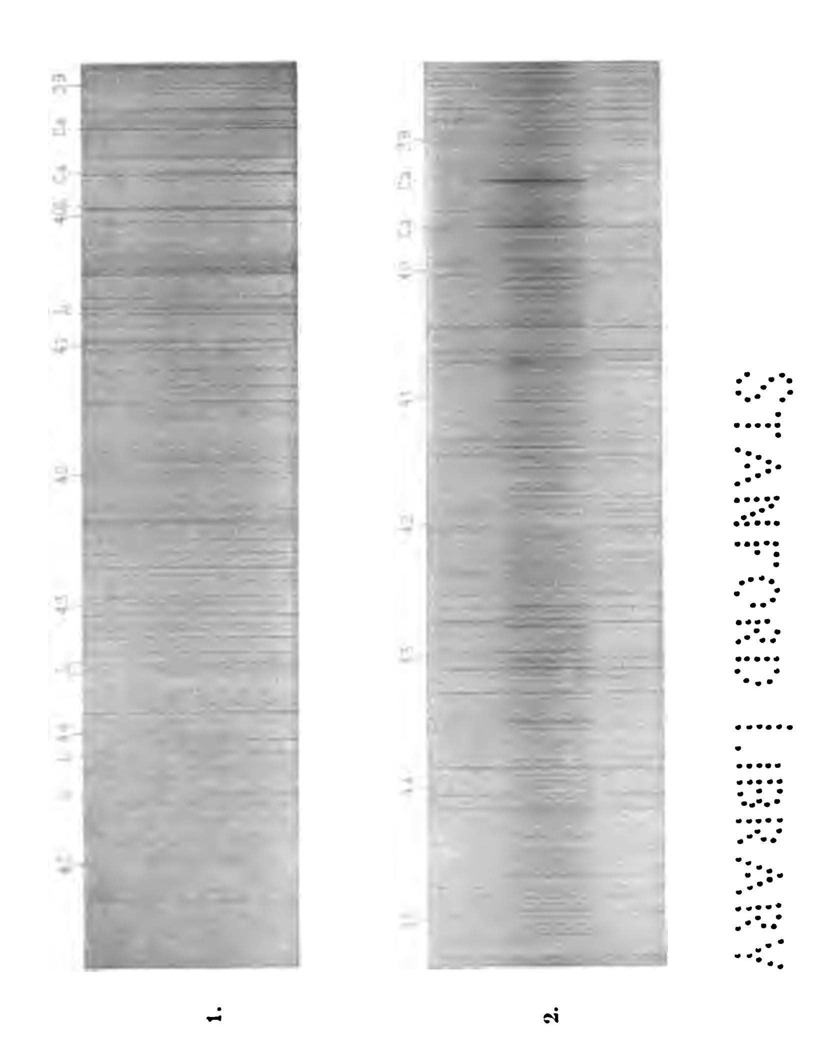


1. 2.

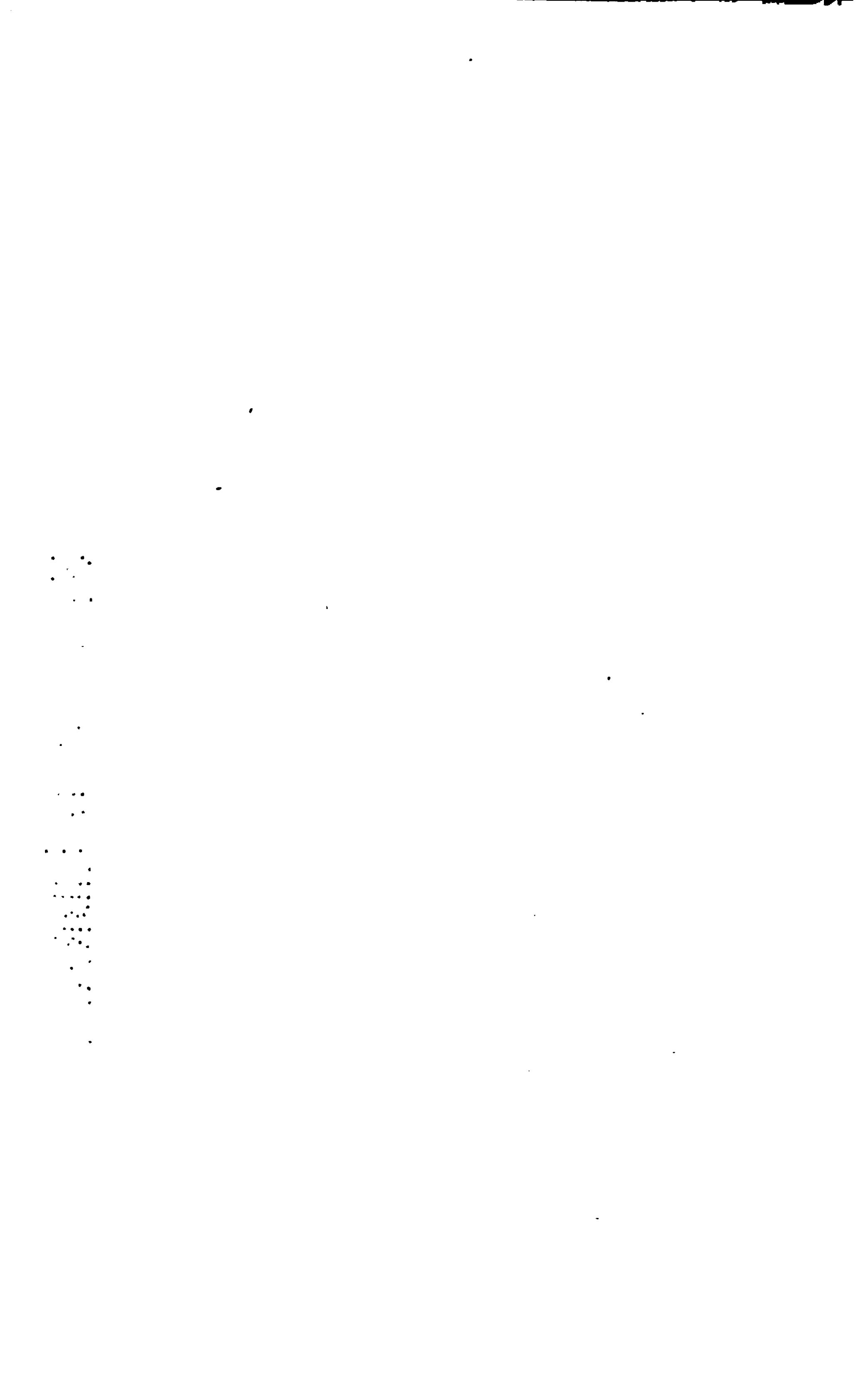
Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



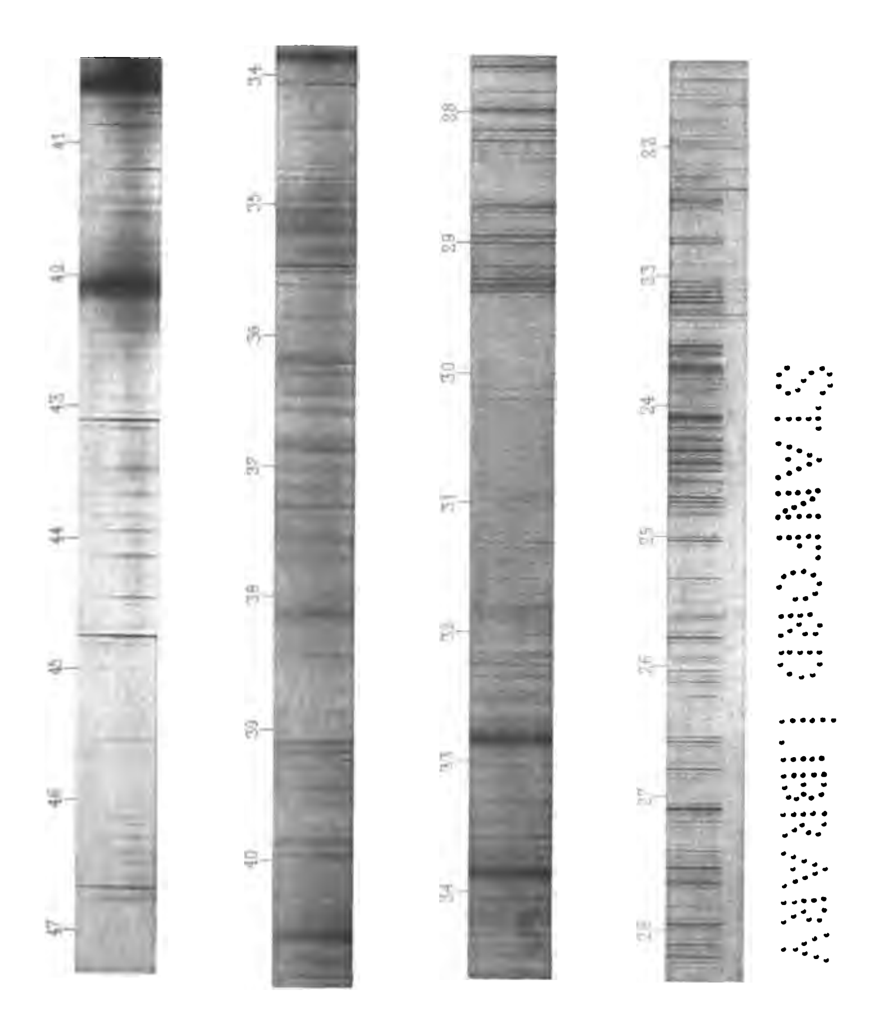
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



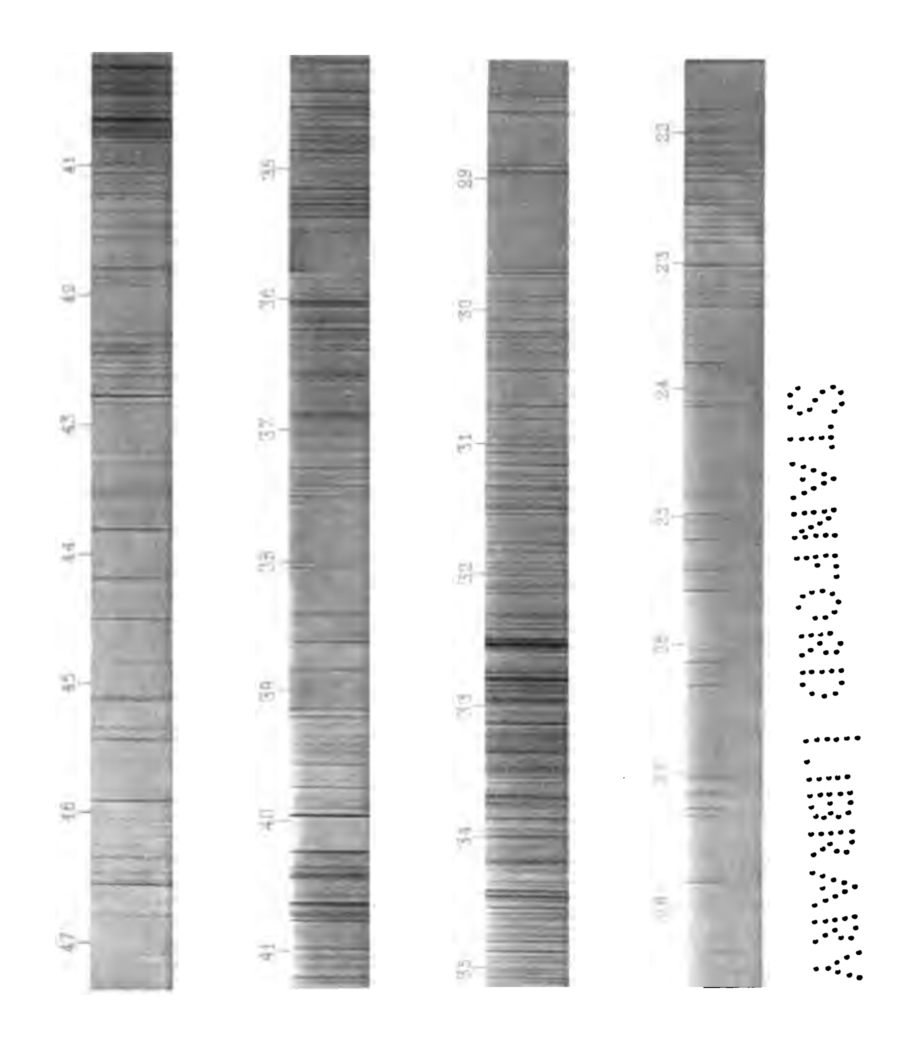
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Silber.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

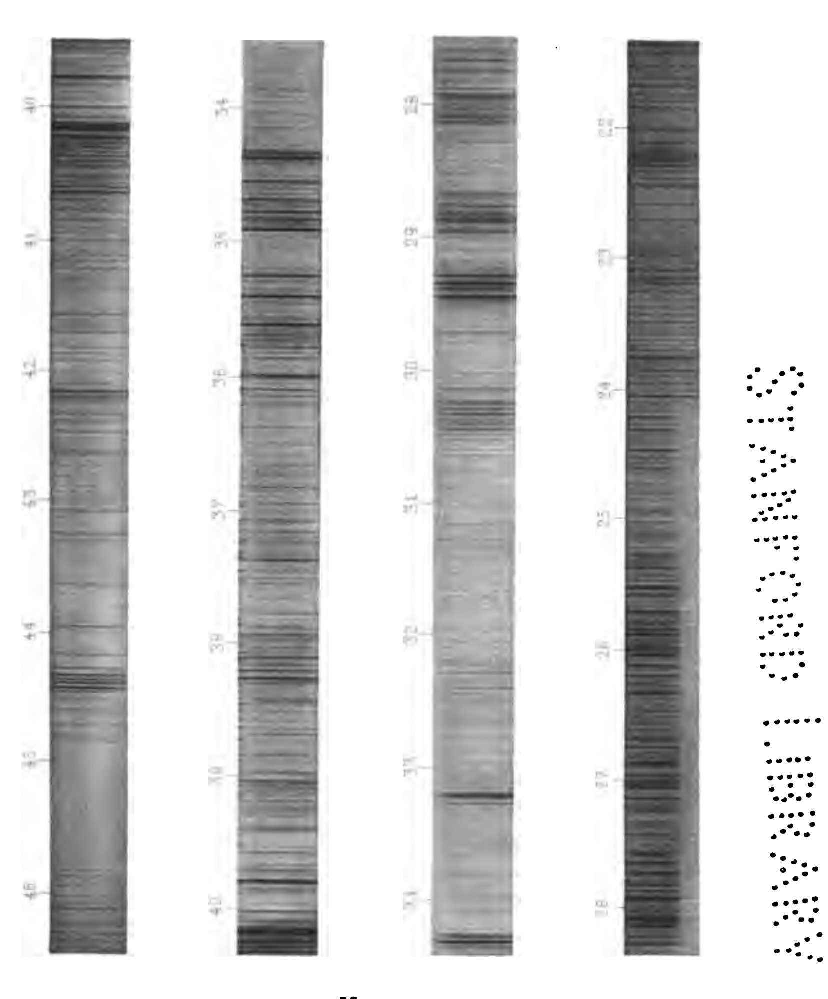
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Kupfer.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

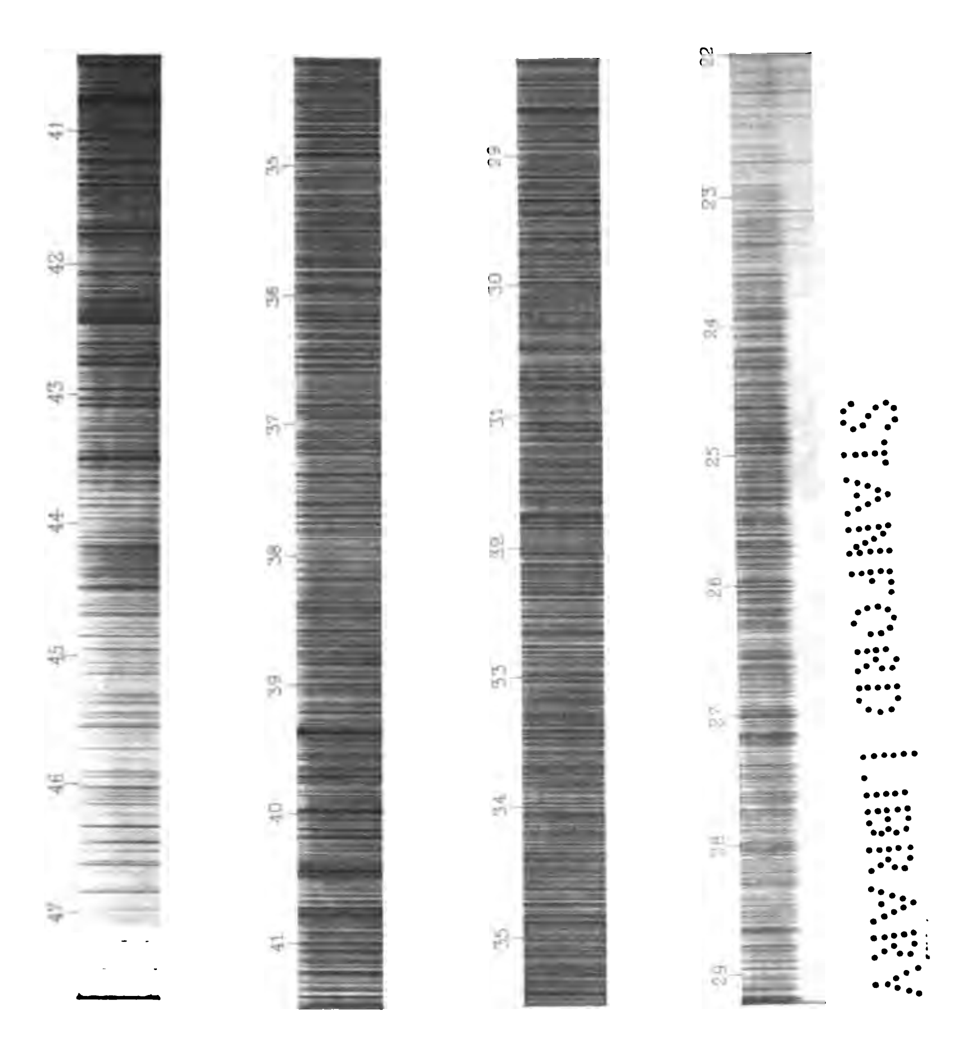
F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Mangan.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Wolfram.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss

von

E. Oekinghaus,

Lehrer an der königl. Baugewerkschule in Königsberg.

(Mit 1 Textfigur.)

Unter den seitens der Gussstahlfabrik Fr. Krupp in Essen herausgegebenen zahlreichen Schiessversuchsberichten ist eine den Physiker besonders interessirende Tabelle über die »Ermittelung von Schallgeschwindigkeiten« von Wichtigkeit, da dieselbe den Einfluss grosser Geschossanfangsgeschwindigkeiten auf die Schallgeschwindigkeit zahlenmässig zum Ausdruck bringt.

Bei den Versuchen kam es darauf an, festzustellen, ob die Schallgeschwindigkeit beim Schuss grösser als die Schallgeschwindigkeit für unbewegte Luft ist. Der Beobachter, in ungefährer Entfernung der Wurfweite, markirte mittelst Telephon den Mündungsknall des Geschützes und mit freiem Ohr die vorbeipassirende Schallwelle, indem er eine Hundertstelsecunden zeigende Uhr beim ersten Moment in Gang setzte, beim zweiten arretirté. Hiedurch gelangte man zur Kenntniss der zwischen beiden Momenten verflossenen Zeit, und es war dann nur noch Sache des Calcüls, auf Grundlage einer Hypothese über das Verhalten der begleitenden Kopfwelle die Bewegungsverhältnisse mathematisch zu bestimmen.

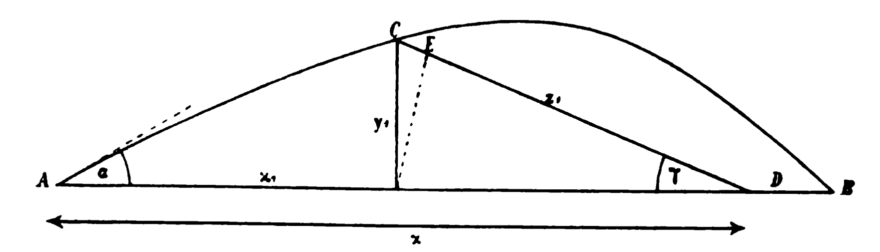
Herr Professor E. Mach, dem wir in akustisch-optischer Beziehung schon so manche Aufschlüsse über das Verhalten der Luft zu den sie durchschneidenden Geschossen verdanken, hat auch zuerst die Ansicht ausgesprochen, dass die knallende Kopfwelle des Projectils mit der Projectilgeschwindigkeit fortschreitet, so lange letztere grösser ist, als die normale Schall-

geschwindigkeit, und hat in seinem Aufsatze (siehe diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1889, S. 1257) »Über die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss etc.« eine Untersuchung darüber angestellt, inwieweit die von ihm ausgesprochene und durch photographische Versuche dargestellte Ansicht durch die Theorie bestätigt wird.

Angeregt durch die Mach'schen Untersuchungen haben wir uns ebenfalls mit dieser Materie beschäftigt, und zwar in der Absicht, erstlich, festzustellen, ob die von uns im »Archiv für die Artillerie- und Ingenieurofficiere des deutschen Reichsheeres« (1893—1896) aufgestellte neue ballistische Hypothese über die Flugbahn der Geschosse auch an diesem Problem die Probe bestehen und damit auch auf akustischem Wege den Beweis zu liefern im Stande sei, dass die Flugbahn (nahezu) eine Hyperbel ist; und zweitens, in Consequenz dieser Theorie zu untersuchen, ob die kleinen Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung, die sich bei Mach noch finden, auf Grundlage einer anderen Methode vielleicht zum Verschwinden gebracht werden könnten.

Inwieweit dies gelungen, mögen die nachfolgenden Entwickelungen zeigen. Da wir am Schluss noch eine Methode zur Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit durch die Schallzeit bringen, so zweifeln wir nicht, dass sich auch die Artilleristen unter den Physikern für dieselbe und vielleicht auch für die oben genannte Theorie interessiren werden.

In nachstehender Figur bedeutet A die Mündung der Kanone, AB die Wurfweite W im Mündungshorizonte, welcher



die Wurfzeit T entspricht. C ist der Punkt $x_1 y_1$ der Bahn, wo die Fluggeschwindigkeit v gleich ist der Schallgeschwindigkeit s.

Die entsprechende Zeit von A bis C sei t_1. Der Beobachter in D sei x Meter von A entfernt. Die Strecke $CD = z_1$ werde vom Schall in t_2 Secunden zurückgelegt, so dass also $t = t_1 + t_2$ die volle Schallzeit bezeichnet, die durch die Beobachtung gegeben ist. Es ist zu beweisen, dass die berechnete mit ihr wenigstens annähernd übereinstimmt.

Aus unserer Hyperbeltheorie entnehmen wir zu diesem Zwecke die nachfolgenden Formeln und bemerken vorab, dass v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses, α die Erhöhung, U_0 die Luftwiderstandsconstante an der Mündung, τ den Tangentenwinkel in C bedeutet.

Durch die Beobachtung sind gegeben: v_0, W, T. Aus diesen einzigen Daten nebst den meteorologischen Elementen und der Schallgeschwindigkeit kann nun die Schallzeit wie folgt berechnet werden:

Vermittelst der Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gT^2}{32W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8W}{v_0 \cos \alpha T}}\right)^2 \tag{1}$$

wird zuerst die Erhöhung α ermittelt, was wenig Mühe macht, da α im Allgemeinen klein und demnach $\cos \alpha$ zunächst $= 1$ gesetzt werden kann.

Alsdann ergibt sich aus

$$U_0 = \frac{3(v_0^2 \sin 2\alpha - gW)}{4W \sin \alpha} \tag{2}$$

die zeitliche Widerstandsconstante der Luft. Die Horizontalcomponente der Geschwindigkeit in der Bahn ist

$$v_x = \frac{v_0 \cos \alpha}{\left(1 + \frac{U_0}{3v_0} \cdot t\right)^3}, \tag{3}$$

woraus noch

$$\Delta x = -\left(\frac{v_0}{U_0} + \frac{1}{3}t\right)\Delta v_x, \qquad \Delta y = \Delta x . \operatorname{tg} \tau$$

folgt.

$$s = 330 \cdot 7 \left(1 + 0 \cdot 00183\, t + 0 \cdot 189 . \frac{e}{b}\right) \qquad 9)$$

ist dieselbe von der Temperatur, dem Dunstdruck und damit auch vom Barometerstand abhängig. Da indessen die Temperatur im Allgemeinen mit der Höhe abnimmt, so scheint es zweckmässig zu sein, darauf Rücksicht zu nehmen, wenigstens bei bedeutenderen Flughöhen. Angenommen, dass bei je 100 *m* Höhenzunahme die Temperatur um $\Delta t = 0^\circ 8$ sinkt, so würde z. B. die Abnahme bei 833 *m* Höhe $6^2/_3{}^\circ$ und demnach die dort geltende Schallgeschwindigkeit etwa $0 \cdot 6 . 6^2/_3 = 4$ *m* weniger betragen als unten. Bei 760 *mm* Luftdruck, +20° C. und 85% relative Feuchtigkeit erhalten wir mit Mach aus der obigen Formel unter Benützung von $e = 0 \cdot 85 . 17 \cdot 4$ die untere Schallgeschwindigkeit $s = 344$ *m*, die obere würde hiernach 340 *m* und mit Windgeschwindigkeit 340+8 = 348 *m* anstatt 352 *m* sein. Hiernach müsste dann auch die entsprechende Fluggeschwindigkeit auf 348 *m* reducirt werden, wodurch der Punkt C in der Flugbahn, in welchem Geschoss- und Schallgeschwindigkeit zusammenfallen, etwas weiter nach vorn rückt. Ferner ist zu beachten, dass letztere von dem oberen Punkte bis zum Beobachter wieder stetig zunimmt, und man erkennt, dass eine genauere Berechnung dieser Verhältnisse, die vollständige Kenntniss der Temperatur, des Dunstdruckes, der Windgeschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn zur Voraussetzung haben müsste. Eine einfachere Betrachtung führt zu folgendem Resultate.

Unten sei die Temperatur t_0, auf je 100 *m* Höhendifferenz nehme sie um Δt ab, in der Höhe y ist sie also $t = t_0 - \frac{y\Delta t}{100}$. Der von oben herabkommende Schall durchläuft nun die Strecke z_1, die mit der Horizontalen den Winkel γ bilden möge, mit steigender Geschwindigkeit. Der Theilstrecke z entspricht die Höhe $y = y_1 - z \sin\gamma$, und letzterer die Temperatur $t = t_0 - \frac{\Delta t}{100}(y_1 - z \sin\gamma)$.

Wir nehmen den Werth $i = 1 + 0 \cdot 189 \frac{e}{b}$ als constant an und erhalten als Geschwindigkeitsausdruck des Schalles in der

Strecke z_1

$$s = \frac{dz}{dt} = 330 \cdot 7 \left(i + 0 \cdot 00183 \left(t_0 - \frac{\Delta t}{100} (y_1 - z \sin \gamma) \right) \right),$$

und integrirt und nach t aufgelöst

$$t_2 = - \frac{100 . z_1}{330 \cdot 7 . 0 \cdot 00183 \Delta t . y_1} ln \left(1 - \frac{0 \cdot 00183 \Delta t . y_1}{100 (i + 0 \cdot 000183 t_0)} \right),$$

oder einfacher

$$t_2 = \frac{z_1}{330 \cdot 7 (i + 0 \cdot 00183 t_0)} \left(1 + \frac{0 \cdot 00183 \Delta t y_1}{200 (i + 0 \cdot 00183 t_0)} \right).$$

Letzteren Ausdruck kann man übrigens auch aus dem Mittel zwischen den extremen Werthen

unten ..... $s_0 = 330 \cdot 7 (i + 0 \cdot 00183 t_0)$,

oben ...... $s_1 = 330 \cdot 7 \left(i + 0 \cdot 00183 t_0 - \frac{0 \cdot 00183 \Delta t . y_1}{100} \right)$

erhalten, indem man $s_m = \frac{1}{2} (s_0 + s_1)$ bildet, und man erhält so für die mittlere Schallzeit von C nach D

$$t_2 = \frac{z_1}{330 \cdot 7 (i + 0 \cdot 00183 t_0) \left(1 - \frac{0 \cdot 00183 \Delta t . y_1}{200 (i + 0 \cdot 00183 t)} \right)},$$

was mit dem vorhergehenden Ausdruck bis auf Grössen zweiter Ordnung übereinstimmt.

Für $z_1 = 4353\ m$, $t_0 = +20°$ C., e wie oben, ist demnach die mittlere Schallgeschwindigkeit $\frac{1}{2}(348 + 352) = 350\ m$ und also die Schallzeit $t_2 = 4353 : 350 = 12 \cdot 44$ Secunden.

Nach diesen Bestimmungen ist das zweite Beispiel der Tabelle berechnet worden. Es ist indessen hierzu zu bemerken, dass die obige Temperaturabnahme von 0°8 hypothetisch ist, indem unter Umständen anstatt einer Abnahme sogar eine

Temperaturzunahme mit der Höhe eintreten kann. Nehmen wir indessen für einen zweiten Fall Δt zu $-0^\circ 6$ für 100 *m* Höhenunterschied an, so macht das in 850 *m* Höhe circa 5°, mithin eine Abnahme von etwa $5.0 \cdot 6 = 3\,m$ an der Schallgeschwindigkeit daselbst. Ist dieselbe unten 349 *m*, so ist sie also oben 346 *m* und bei 1 *m* Windgeschwindigkeit 347 *m*, während die mittlere $347 \cdot 5 + 1 = 348 \cdot 5\,m$ beträgt. Nach diesen modificirten Bestimmungen wurde das sechste Beispiel ausgerechnet.

In der nebenstehenden Tabelle haben wir auf Grundlage der genannten Theorie und der Krupp'schen Versuchsergebnisse vorläufig in sieben Beispielen die Rechnungsresultate zum Ausdruck gebracht und dürfte es sich empfehlen, die a.a.O. von Herrn Professor Mach berechneten damit zu vergleichen.

Von Werth ist auch die Kenntnissnahme der von der königl. preuss. Artillerie-Prüfungscommission angestellten »Versuche zur Ermittelung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Geschützknalles und des Werthes von Schalluhren als Entfernungsmesser« (Archiv, 98. Band, 1891).

In der vorliegenden Tabelle sind die Zahlen in den letzten Verticalcolonnen die wichtigsten.

Der Unterschied zwischen der berechneten und beobachteten Schallzeit beträgt bis auf einen Fall noch keine Secunde, im Durchschnitt etwa $^1/_2$ Secunde. Bis auf diese nicht wohl weiter zu vermindernde Differenz ist die Übereinstimmung der Theorie mit den Versuchsresultaten ziemlich befriedigend und dürfte damit die durch die photographische Aufnahme fliegender Geschosse durch Mach und Salcher gestützte Ansicht des ersten, dass die in den Photogrammen erkennbaren Luftverdichtungswellen vor der Geschossspitze als Schallwellen anzusehen sind, einen weiteren Beweis erhalten haben. Übertrifft also die Geschwindigkeit des Geschosses die Schallgeschwindigkeit, so ist die Einwirkung desselben auf letztere eine ganz bedeutende. Es ist nun von Interesse, zu prüfen, inwieweit unsere Berechnungen mit den von Mach ausgeführten übereinstimmen.

Zusammenstellung der Rechnungsergebnisse zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Geschütz	v_0	W	T	α	U_0	s	x	x_1	y_1	z_1	t_1	t_2	t ber.	t' beob.	Diff. $t'-t$
15 *cm* K. *L*/30 G.-G. 51 *kg* . .	501	6431	18·99	12°30'	22 28	334	6500	3673	450	2862	9·09	8·57	17·66	18·15	0·49
15 *cm* K. *L*/30 G.-G. 51 *kg* . .	490	8410	26·73	18 20	16·42	348	8000	3727	833	4353	9·27	12·44	21·71	22·39	0·68
15 *cm* K. *L*/22 G.-G. 34·5 *kg*	532	6703	22·78	15 18	32·67	351	6500	2854	558	3688	6·73	10·50	17·23	17·82	0·59
12·5 *cm* K. *L*/23 G.-G. 18·25 *kg*	468	4044	13·58	9 48	35·99	339	3951	1676	206	2284	4·24	6·73	10·97	11·19	0·22
10·5 *cm* K. *L*/35 G.-G. 18 *kg*.	512	5203	15·17	9 50	30·55	336	5466	3026	315	2460	7·34	7·32	14·66	15·98	1·32
12 *cm* K. *L*/35 G.-G. 26 *kg* . .	545	8273	26·90	17 28	26·40	347	7033	3843	852	3302	9·05	9·47	18·52	19·15	0·63
24 *cm* K. *L*/35 G.-G. 215 *kg*.	548	10338	28·45	17 14	16·30	345	10000	6414	1000	3722	15·06	10·79	25·85	26·52	0·67

Die nachstehende Zusammenstellung beider Resultate hinsichtlich der verbleibenden Differenzen zeigt dies für die ausgewählten 7 Fälle hinlänglich deutlich (vergl. a. a. O. S. 1270 u. f.):

	II_6	II_5	IV	V	VI	XI	XII
Mach.......	0·35	0·53	1·04	1·17	0·97	0·77	0·97
O...........	0·49	0·68	0·59	0·22	1·32	0·63	0·67

Man sieht, dass die beiden ersten Fälle wenig voneinander verschieden sind. Bei IV und V treten kleinere Differenzen auf, dagegen zeigt sich bei VI eine stärkere Abweichung unseres Resultates gegenüber einer geringeren bei Mach. Die beiden letzten liefern wieder günstigere Differenzen. Unter sieben Fällen also ein ungünstiger.

Wie es scheint, hat unsere Theorie die bisher bestehenden Differenzen um ein geringes vermindert. Aber zum Verschwinden sind sie nicht gebracht worden. Eigenthümlich ist es allerdings, dass sie sämmtlich negativ sind, was vielleicht auf einen bei allen Versuchen ständig wiederkehrenden constanten Sinnesfehler schliessen lässt. Herr Prof. Mach gibt in seiner Abhandlung verschiedene Gründe an, die die Ursachen jener vielleicht bedingen. Nach L. Exner beträgt bei Ausführung einer Bewegung nach einem Schall die Reactionszeit 0·136 Secunden, demnach würde dieser freilich wechselnde persönliche Fehler die obigen Differenzen ein wenig und speciell die unter V vermerkte um etwa die Hälfte vermindern. Im allgemeinen sind die Rechnungsergebnisse der Hyperbelhypothese nicht ungünstig.

Die Rechnungen setzen voraus, dass die knallende Kopfwelle noch bei den ermittelten Schallgeschwindigkeiten wahrnehmbar sei. Nach Mach existirt sie nur bei die Schallgeschwindigkeit übersteigenden Projectilgeschwindigkeiten und wird bei Annäherung an die Schallgeschwindigkeit schwächer; vielleicht dürfte die Wahrnehmbarkeit derselben schon bei 360—370 *m*/sec. stattfinden. Berechnungen, die wir hierüber angestellt, ändern die Resultate indessen nur wenig. Es wäre daher sehr wünschenswerth, wenn die Versuche über die Schallverhältnisse fliegender Geschosse wieder aufgenommen

und die Quelle der ständig negativ auftretenden Differenzen vollständig und überzeugend nachgewiesen würde. Das Nächste und Natürlichste ist indessen, die Ursachen dieser Differenzen in der Theorie zu suchen, und demnach vor allem sich nach derjenigen Modification der letzteren umzusehen, durch welche jene möglichst ganz zum Verschwinden gebracht werden. Über diese von uns schon jetzt, wenn auch vorläufig eingeleiteten Untersuchungen werden wir, wenn günstig, seinerzeit kurz berichten.

Aus der Tabelle lassen sich noch leicht manche bemerkenswerthe Thatsachen feststellen, die von Interesse sind. Bei den beiden letzten Versuchen z. B. hat die eine Kanone das doppelte Kaliber der anderen, während Anfangsgeschwindigkeit und Abgangswinkel nahezu dieselben sind. Gleichwohl ist die horizontale Entfernung des Punktes C des Zusammenfallens der Flug- mit der Schallgeschwindigkeit von der Mündung im ersten Falle bei weitem grösser als im zweiten, was seinen Grund in der entsprechend grösseren Querschnittsbelastung und der damit verbundenen langsameren Geschwindigkeitsabnahme hat.

Die Berechnung der obigen Tabelle verlangte einen ziemlich grossen Formelapparat. Bei kleineren Erhöhungen lässt sich indessen eine verhältnissmässig einfache Formel in Anwendung bringen, wenn man statt der Strecke CD ihre Projection in der Horizontalen, also $x - x_1$ substituirt. Bildet man unter dieser Voraussetzung den Ausdruck $t_1 + \frac{x - x_1}{s}$, indem man die entsprechenden Werthe aus den Hauptformeln darin einführt, so erhält man nach einigen Reductionen als Formel für die Schallzeit

$$t = \frac{x}{s} - \frac{3 v_0}{2 U_0}\left(2 + \frac{v_0 \cos \alpha}{s} - \frac{2 + \cos \tau}{\cos \tau^{1/3}}\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \quad 10)$$

Hierin hat der Ausdruck $\frac{2 + \cos \tau}{\cos \tau^{1/3}}$, in welchem τ der Tangentenwinkel im Punkte C ist, die Eigenthümlichkeit, dass er selbst bei grösseren τ sich fast gar nicht ändert, und für die vorliegenden Fälle den constanten Werth 3 (nahezu) behauptet.

Demnach kann man setzen

$$t = \frac{x}{s} - \frac{3v_0}{2U_0}\left(2 + \frac{v_0 \cos \alpha}{s} - 3\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \qquad 11)$$

Die hiernach berechnete Schallzeit ist von der nach den strengen Formeln berechneten umsoweniger verschieden, je kleiner die Erhöhung und das Verhältniss $y_1 : z_1$ ist. Kennt man noch die Werthe von x_1, y_1, z_1, so ist die noch zu addirende Correction $\frac{CE}{s} = \frac{z_1 - (x - x_1)}{s}$, oder annähernd $\frac{y_1^2}{2(x - x_1)s}$.

Die hiernach corrigirte Formel ist demnach

$$t = \frac{x_1 + z_1}{s} - \frac{3v_0}{2U_0}\left(2 + \frac{v_0 \cos \alpha}{s} - 3\left(\frac{v_0 \cos \alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}}\right). \qquad 12)$$

Beispiel. 24*cm* Kanone. $v_0 = 548$, $\alpha = 17° 14'$, $U_0 = 16{\cdot}30$, $s = 345$, $x = 10000$, $x_1 = 6414$, $y_1 = 1000$, $z_1 = 3722$, $\tau = 2° 16'$.

Man erhält nach der ersten oder zweiten Formel

$$t = 25 \cdot 85,$$

was mit der früheren Berechnung übereinstimmt.

Hätten wir, der grösseren Höhe $y_1 = 1000\,m$ entsprechend, eine kleinere Schallgeschwindigkeit als 345 *m* zu Grunde gelegt, so würde eine grössere Schallzeit hervorgegangen und eine bessere Übereinstimmung mit der beobachteten die Folge gewesen sein. Es dürfte sich empfehlen, diesen Umstand, sowie die Thatsache, dass der Wind nicht immer beständig, sondern oft nur stossweise weht und nach oben hin stetig seine Richtung ändert, auch bei cyklonischem Wetter oft genug eine verticale Componente hat, im Auge zu behalten. Einzelne Störungsfunctionen dürften sich zuweilen ausgleichen. Nehmen wir an, dass im obigen Beispiele die Schallgeschwindigkeit nur 342, anstatt 345 *m* sei, so zeigt die Rechnung, dass die nunmehrige Schallzeit 25·97^s, statt der früheren 25·85^s, beträgt, also um 0·12^s zugenommen hat. Um den gleichen Betrag vermindert sich dann auch die Differenz zwischen Rechnung und Beob-

achtung. (Die Verminderung von s bewirkt ein Vorrücken von C um $\Delta x = 115 \cdot 8$, $\Delta y = 4 \cdot 6$, und eine Änderung von $x_1 + z_1 = 10136$ um $\Delta(x_1 + z_1) = 6 \cdot 4\ m$, also in Zeit $\frac{6 \cdot 4}{345} = 0 \cdot 02^s$).

Weiteres Beispiel. (Vergl. Mach, a. a. O., S. 1264). Mit der $12 \cdot 5\ cm$ R-Kanone L/23 Nr. 45 wurde ein Geschoss von $18 \cdot 25\ kg$ mit $468\ m$ Anfangsgeschwindigkeit abgefeuert. Die Wurfweite betrug $2915\ m$, die Schusszeit $8 \cdot 74$ Secunden, die Schallgeschwindigkeit $340\ m$. Die beobachtete Schallzeit wurde zu $7 \cdot 96$ Secunden notirt.

Es soll auf diesen Schuss die Formel 11) angewandt und die berechnete Schallzeit mit der beobachteten verglichen werden.

Vermittelst der Formel 1) erhalten wir zunächst den Abgangswinkel

$$\alpha = 6^\circ\, 2'\, 26'',$$

und vermöge 2)

$$U_0 = 40 \cdot 809\ m$$

welches die (negative) Beschleunigung des Luftwiderstandes auf das Projectil beim Heraustreten aus der Mündung ist. Demzufolge geht 11) über in

$$t = \frac{2880}{340} - 17 \cdot 202\ (2 + 1 \cdot 3688 - 3 \cdot 3309),$$

woraus $t = 7 \cdot 818$, abgerundet $7 \cdot 82^s$ folgt.

Die Beobachtung ergab $7 \cdot 96^s$

Diff. $-0 \cdot 14^s$, Mach hat $1 \cdot 04^s$.

Fügen wir noch

$$+0 \cdot 136^s$$

als persönlichen Fehler hinzu, so folgt

$$\text{Diff. } 0 \cdot 00^s$$

mithin vollständige Übereinstimmung der Theorie mit dem Versuch. Freilich mag hier der Zufall zu Gunsten der Theorie mitgespielt haben.

Die Anwendung der strengen Formeln auf den vorliegenden Fall würde an dem definitiven Resultat nichts ändern.

Methode zur Bestimmung der Geschossanfangsgeschwindigkeiten aus der Schallzeit.

Die vorhergehende Ermittlung der Schallzeit aus den Elementen der Bewegung liefert eine geeignete Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit, wenn die Erhöhung klein genug gewählt ist, um die Differenz CE vernachlässigen zu können.

Um von U_0 unabhängig zu sein, substituiren wir den Werth desselben

$$U_0 = 3\frac{(v_0^2 \sin 2\alpha - gW)}{W \sin \alpha}$$

in die genannte Formel, führen ein

$$Y = \left(\frac{v_0 \cos \alpha}{s}\right)^{\frac{1}{3}},$$

und erhalten durch Auflösen nach Y die höhere Gleichung

$$\frac{x - st}{W} \cdot Y^6 - Y^3 + 3Y = 2 + \frac{g(x - st)}{2s^2 \operatorname{tg} \alpha}. \qquad 13)$$

Hat man hieraus Y berechnet, so erhält man die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit des Projectils aus

$$v_0 = \frac{s}{\cos \alpha} Y^3. \qquad 14)$$

Beispiel. Es soll die Anfangsgeschwindigkeit des 51 *kg* schweren Projectils der 15 *cm* Kanone *L*/30, Nr. 157, aus der bekannten Schallzeit berechnet werden.

Gegeben sind: Die Wurfweite $W = 6431\,m$, die Erhöhung $\alpha = 12°\,30'$, die Entfernung des Beobachters in der Schussebene von der Mündung $x = 6500\,m$, die Schallzeit $18 \cdot 15^s$, die Schallgeschwindigkeit $s = 334\,m$, $g = 10\,m$.

Hiernach erhalten wir

$$0 \cdot 06809\, Y^6 - Y^3 + 3Y - 2 \cdot 08853 = o.$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann in der Weise geschehen, dass man zunächst einen muthmasslichen Werth von v_0 und den entsprechenden für Y einführt. Nach bekannten Methoden ergibt sich dann ein genauerer Werth, im vorliegenden Fall

$$Y = 1{\cdot}1356, \text{ also } Y^3 = \frac{v_0 \cos\alpha}{s} = 1{\cdot}46445,$$

demnach

$$v_0 = 1{\cdot}46445 \cdot \frac{s}{\cos\alpha} = 501\, m,$$

welcher Werth mit dem beobachteten genau übereinstimmt.

Diese Methode wird in allen den Fällen wenig gekrümmter Flugbahnen anwendbar sein, in welchen die Anfangsgeschwindigkeit grösser, die Endgeschwindigkeit kleiner ist, als die gesetzmässige Schallgeschwindigkeit.

XIII. SITZUNG VOM 15. MAI 1896.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter theilt mit, dass Seine k. u. k. Hoheit der durchlauchtigste Curator der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Herr Erzherzog Rainer, gnädigst bekanntgegeben habe, dass Höchstderselbe bei der am 3. Juni abzuhaltenden diesjährigen feierlichen Sitzung der kaiserl. Akademie wegen Abwesenheit in Dienstesangelegenheiten zu erscheinen verhindert sei.

Das c. M. Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine im Laboratorium für analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit von Dr. Julius Zellner, betitelt: »Zur Kenntniss der Rapinsäure«.

Der Commandant S. M. Schiff »Pola« Herr k. u. k. Linienschiffs-Capitän Paul Edler v. Pott übermittelt aus Suez ddo. 5. Mai l. J. einen Thätigkeitsbericht über die Missionsreise S. M. Schiff »Pola« im Rothen Meer während der Campagne 1895—1896.

Herr Regierungsrath Prof. I. Luksch, Mitglied der wissenschaftlichen Expedition S. M. Schiff »Pola«, übersendet aus Port Tewfik (Suez), ddo. 1. Mai l. J., einen vorläufigen Bericht über die physikalisch-oceanographischen Untersuchungen im Rothen Meere vom October 1895 bis Mai 1896.

Schliesslich theilt der Vorsitzende einige briefliche Nachrichten mit, welche ihm von dem Leiter der wissenschaftlichen Arbeiten der Expedition im Rothen Meere, Herrn Hofrath Director Steindachner, über den Erfolg und Abschluss dieser Expedition zugekommen sind.

XIV. SITZUNG VOM 21. MAI 1896.

Der Vicepräsident der Akademie Herr Prof. E. Suess führt den Vorsitz.



Der Vorsitzende gibt der tiefen Trauer Ausdruck über das am 19. Mai erfolgte Ableben des Ehrenmitgliedes der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften

Seiner kaiserlichen und königlichen Hoheit

des durchlauchtigsten Herrn

ERZHERZOGS KARL LUDWIG.

Die Mitglieder nehmen stehend diese Trauerkundgebung entgegen.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. I, Heft I—II (Jänner und Februar 1896).

Das k. u. k. Reichs-Kriegs-Ministerium (Marine-Section) übermittelt ein vom Commando S. M. Schiff »Pola« eingelangtes Telegramm, laut welchem die Expedition aus dem Rothen Meer am 9. Mai 6^h 45^m v. M. glücklich nach dem Hafen von Pola zurückgekehrt ist.

Der Commandant S. M. Schiff »Pola« Herr k. und k. Linienschiffs-Capitän Paul Edler v. Pott übersendete aus Suez ddo. 5. Mai l. J. einen kurzgefassten Reise- beziehungsweise Thätigkeitsbericht der wissenschaftlichen Expedition S. M. Schiff »Pola» in das Rothe Meer im Jahre 1895 bis 1896.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. J. Wiesner überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Wiener Universität von Herrn G. Gjokić ausgeführte Arbeit, betitelt: »Zur Anatomie der Frucht und des Samens von *Viscum*«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben legt eine Abhandlung von Herrn R. Segalle aus dem Czernowitzer Universitätslaboratorium »Über einige Halogensubstitutionsproducte des Resacetophenons und seines Diäthyläthers« vor.

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht eine im I. Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Herrn Friedrich Hirsch: »Über den Chininsäureester und dessen Überführung in *p*-Oxykynurin«.

Herr Prof. Dr. J. Latschenberger in Wien überreicht eine Arbeit, betitelt: »Das physiologische Schicksal der Blutkörperchen des Hämoglobinblutes«.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. VI. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XV. SITZUNG VOM 11. JUNI 1896.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 17, Heft III (März 1896).

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 28. Mai l. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Gabriel Auguste Daubrée in Paris.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Der Secretär legt das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, durch die Buchdruckerei Heinrich Mercy in Prag übersendete Druckwerk: »Die Liparischen Inseln. VI. Alicuri« vor.

D. w. M. Herr Hofrath Prof. Claus übersendet eine Abhandlung von Dr. Tad. Garbowski in Wien unter dem Titel: »Hyperienartige Amphypoden des Mittelmeeres«. Monographisch bearbeitet auf Grund des während der fünf Expeditionen S. M. Schiff »Pola« gesammelten Materiales (1890—1894). I. Theil. »Die Sciniden.«

Das c. M. Prof. Franz Exner übersendet eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn F. Hasenöhrl: »Über den Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante in Flüssigkeiten und die Mosotti-Clausius'sche Formel«.

Herr Dr. K. A. Penecke, Privatdocent an der k. k. Universität in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Marine Tertiärfossilien aus Nord-Griechenland und dessen türkischen Grenzländern«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Die Gravitations-Constante, die Masse und mittlere Dichte der Erde, nach einer neuen experimentellen Bestimmung«, von P. Dr. C. Braun, S. J. in Mariaschein (Böhmen).
2. »Über die Condensation des Benzaldehyds mit Acetessigester mittelst aromatischer Amine«, von Prof. Dr. Br. Lachowicz in Lemberg.
3. »Über zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken, Kometen und Klimaschwankungen«. Vorläufige Mittheilung von Herrn J. Unterweger, Landesbürgerschullehrer in Judenburg.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Theodor Scheimpflug, k. u. k. Linienschiffs-Fähnrich in Wien, vor, welches die Aufschrift führt: »Eine Methode, das Licht zur Zimmer-Arbeit bei der Photogrammetrie zu verwenden«.

Das w. M. Herr Prof. C. Grobben überreicht eine Arbeit aus dem zoologischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. Theodor Adensamer: »Über *Ascodipteron phylorchinae* (nov. gen. nov. sper.) eine eigenthümliche Pupiparenform«.

Das w. M. Herr Prof. Friedrich Brauer überreicht eine vorläufige Mittheilung des c. M. Herrn Directors Th. Fuchs: Über einige Versuche, verschiedene in das Gebiet der Hieroglyphen gehörige problematische Fossilien auf mechanischem Wege herzustellen.

Ferner überreicht Herr Prof. Brauer eine Arbeit von Dr. Rudolf Sturany in Wien, betitelt: »Brachiopoden«, gesammelt auf den Expeditionen S. M. Schiffes »Pola« 1890—1894.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Abhandlung von Prof. L. Schenk vor: »Über Anomalien an Eiern von Echinodermen nach der Befruchtung«.

Herr Hofrath Prof. Dr. v. Lang legt eine Abhandlung der Herren Regierungsrath Dr. J. M. Eder und E. Valenta über »Spectralanalytische Untersuchung des Argons« vor, worin dieselben genaue Wellenlängenbestimmungen der drei verschiedenen Spectren des Argons und von Übergangsformen derselben geben.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine im III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Dr. P. Cohn und F. Fleissner ausgeführte Arbeit: »Über die Trennung des Palladiums von Platin«.

Herr Dr. Ign. Schütz in Göttingen übersendete eine Mittheilung: »Über das Verhältniss des Princips der geradesten Bahn zum Princip der kleinsten Wirkung«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Erzherzog Ludwig Salvator, Die Liparischen Inseln VI. Alicuri. Prag, 1896.

Über den Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante in Flüssigkeiten und die Mosotti-Clausius'sche Formel

von

Fritz Hasenoehrl.

(Mit 5 Textfiguren.)

Aus dem physikalisch-chemischen Institut der k. k. Universität Wien.

I.

Bekanntlich stellt die Mosotti-Clausius'sche Theorie der Dielectrica den Satz auf, dass der in der Volumseinheit eines Dielectricums von Materie thatsächlich erfüllte Raum v durch die Gleichung

$$v = \frac{K-1}{K+2} \tag{1}$$

gegeben sei, wo K die Dielektricitätsconstante bedeutet. Bezeichnen wir die Dichte mit d, so folgt hieraus, dass die sogenannte wahre Dichte oder Maximaldichte durch die Gleichung

$$D = d\,\frac{K+2}{K-1} \tag{2}$$

gegeben ist. Da nun D eine für jede Temperatur und für jeden Aggregatzustand constante Grösse ist, so muss dies auch für die rechte Seite der Gleichung (2) gelten. Daher bietet diese Relation die Möglichkeit, aus einer bei beliebiger Temperatur ausgeführten Bestimmung der Dielektricitätsconstante und aus der für jede Temperatur gegebenen Dichte die Dielektricitätsconstante für jede andere Temperatur zu berechnen. Man erhält

nämlich aus (2) sofort

$$K = \frac{D+2d}{D-d} \tag{3}$$

Ist nun die Änderung der Dichte mit der Temperatur durch die Gleichung

$$d_t = \frac{d_\tau}{1+\alpha(t-\tau)+\beta(t-\tau)^2}$$

gegeben (wo also α und β die cubischen Ausdehnungscoëfficienten bedeuten), so kann man K nach Potenzen von t entwickeln und erhält so mit grosser Annäherung

$$\begin{aligned} K_t = K_\tau - \frac{(K_\tau+2)(K_\tau-1)}{3}\alpha.(t-\tau) + \\ + \frac{(K_\tau+2)(K_\tau-1)}{3}\left[\frac{K_\tau+2}{3}.\alpha^2-\beta\right](t-\tau)^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Die vorliegende Arbeit wurde nun zu dem Zwecke unternommen, durch das Studium des Temperaturcoëfficienten der Dielektricitätsconstante den Giltigkeitsbereich der Mosotti-Clausius'schen Formel für Flüssigkeiten zu untersuchen. Bei Gasen und für den Übergang vom gasförmigen in den tropfbarflüssigen Aggregatzustand hatte schon Lebedew[1] diese Prüfung vollzogen und ein »unerwartet gutes« Übereinstimmen von Theorie und Erfahrung constatirt. Von Flüssigkeiten war in dieser Hinsicht nur Wasser von Heerwagen[2] und Franke[3] untersucht worden, und zwar bestritten beide die Richtigkeit der Mosotti-Clausius'schen Formel für diese Flüssigkeit. Da aber Wasser überhaupt ein anomaler Körper ist, so lag die Möglichkeit offen, dass die obige Relation bei anderen Flüssigkeiten durch die Erfahrung bestätigt werde. Die vorliegende Arbeit war nun zur Hälfte beendet, als zwei Aufsätze erschienen, welche dasselbe Thema behandeln, einer von Linde,[4] der zweite

---

[1] Lebedew, Wied. Ann., 44, S. 288, 1891.

[2] Heerwagen, Wied. Ann., 48, S. 35, 1893; 49, S. 272, 1893.

[3] Franke, Wied. Ann., 50, S. 170, 1893.

[4] Linde, Wied. Ann., 56, S. 546, 1895.

von Ratz;[1] und zwar bestreitet Linde sowohl die theoretische Berechtigung, als auch die praktische Anwendbarkeit der Mosotti-Clausius'schen Formel vollständig und auch Ratz räumt ihr nur eine beschränkte Giltigkeit ein. Da sich nun bei den von mir untersuchten Dielectricis eine sehr befriedigende Übereinstimmnng von Theorie und Erfahrung zeigte, will ich die Ergebnisse meiner Arbeit im Folgenden mittheilen.

II.

Die Methode, deren ich mich bei meinen Versuchen bediente, war die von Gordon in der Modification, die zuerst Lecher[2] in Anwendung brachte. Da sie schon hinlänglich bekannt ist, gebe ich die ganze Versuchsanordnung nur schematisch wieder (siehe Fig. 1). Der von mir benützte Wechselstrom *W* wurde von der elektrischen Centrale Wiens geliefert. Er hat circa 80 Schwingungen pro Secunde. In dem bloss zu diesem Zwecke verwendeten Ruhmkorff-Apparate *R* wurde derselbe auf hohe Spannung transformirt. Als Messcondensator C_1 diente mir ein gläserner Schleifcondensator, welcher vorher mit einem Kreisplattencondensator, dessen Capacität nach der Kirchhoff'schen Formel berechnet werden konnte, geaicht wurde. Mittelst des Nonius konnte man am erwähnten Schleifcondensator eine Verschiebung der Platten um 0·1 *mm* noch ganz sicher ablesen, was einer Capacitätsänderung von etwas

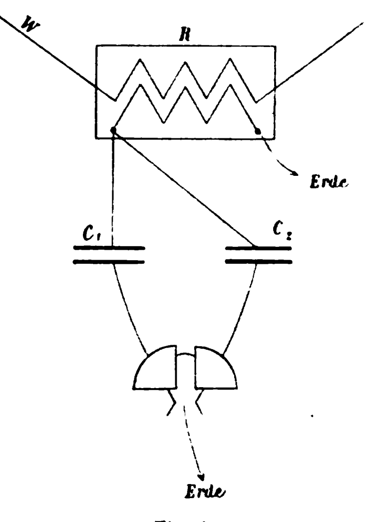


Fig. 1.

---

[1] Ratz, Zeitschr. für phys. Chemie, XIX, S. 94, 1896.

[2] Lecher, Diese Sitzungsber., 99. S. 480, 1890.

weniger als 0·1% entsprach. Dies war auch die Grösse der bedeutendsten Beobachtungsfehler, die sich beim Vergleich der einzelnen Messungen ergaben. Da nun der Maassstab des Nonius eine Länge von 30 *mm* hatte, konnte man die Capacität des Messcondensator um circa 20% variiren. Dies reichte auch stets vollkommen aus, wenn es galt, die Änderungen der Dielektricitätsconstante einer Substanz zu beobachten. Wollte ich jedoch den absoluten Werth der Dielektricitätsconstante eines Mediums bestimmen, so hätte ich eine Capacitätsänderung von circa 50% gebraucht, so dass ich die grobe Einstellung des Condensators verwenden musste, auf welcher nur auf 2 *mm* sicher abgelesen werden konnte. Für die Richtigkeit des absoluten Werthes der von mir angegebenen Dielektricitätsconstanten kann ich daher nur innerhalb der Grenzen von ±4% eintreten, während das Verhältniss der Dielektricitätsconstanten einer Substanz bei verschiedenen Temperaturen — auf das es mir ja hauptsächlich ankam — mit bedeutend grösserer Genauigkeit bestimmt werden konnte.

Als Flüssigkeitscondensator C_2 verwendete ich einen Kreisplattencondensator, dessen messingene Platten auf die Schenkel einer U-förmig gebogenen Glasröhre gesteckt waren. Es hatte diese Montirung den Vortheil, dass in Folge der verschwindend kleinen thermischen Ausdehnung des Glases die Plattendistanz dieses Condensators nur unmerklich variirte. Der Radius der Kreisplatten war circa 3 *cm*, die Plattendistanz 2—3 *mm*, so dass er eine Capacität von circa 130 *cm* repräsentirte. Zur Ausführung der Versuche wurde er in ein mit der betreffenden Flüssigkeit gefülltes Becherglas getaucht, welches sich in einem Sandbad über einem Bunsenbrenner befand. Vor jeder Ablesung wurde die Temperatur durch Umrühren der Flüssigkeit, oder auch durch Auf- und Abziehen derselben in einer Glasröhre regulirt. Das Elektrometer war ein gewöhnliches Thomson'sches Quadrantenelektrometer mit doppelter Plattenlage, deren Distanz so geregelt wurde, dass sich aus Empfindlichkeit und Capacität des Elektrometers ein möglichst günstiges Verhältniss ergab. Condensatoren, Elektrometer, sowie sämmtliche Zuleitungsdrähte waren sorgfältig in mit Stanniol überklebte Pappendeckelgehäuse eingebaut.

Bei jeder Substanz wurde der Temperaturcoëfficient der Dielektricitätsconstante sowohl bei zunehmender, als auch bei abnehmender Temperatur bestimmt. Und zwar zeigte es sich anfangs gewöhnlich, dass der bei steigender Temperatur gemessene Temperaturcoëfficient nicht unerheblich grösser sei, als der bei fallender Temperatur gemessene. Es scheinen beim ersten Ansteigen der Temperatur dauernde Veränderungen in der Flüssigkeit einzutreten, welche von Einfluss auf die Dielektricitätsconstante sind und die nicht allein der Änderung der Dichte zugeschrieben werden dürfen. Durch oftmaliges Erwärmen oder durch längeres Belassen auf einer höheren Temperatur verschwand dieser Fehler stets und ich erhielt denselben Temperaturcoëfficienten, ob ich meine Messungen bei steigender oder bei fallender Temperatur vornahm.

Der ganze Apparat functionirte stets tadellos und scheint mir die ganze Methode wegen ihrer Einfachheit und Genauigkeit bestens anzuempfehlen.

III.

Ich habe vier Substanzen untersucht, und zwar Benzol, Mandelöl, Vaselinöl, Paraffin.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate meiner Messungen angegeben; sie sind folgendermassen zusammengestellt:

Erste Rubrik: Die Temperatur.

Zweite Rubrik: Die beobachteten Werthe der Dielektricitätsconstante K_1; sie sind der Durchschnitt aus 30—50 Messungen, die bei jeder Substanz vorgenommen wurden. Aus diesen Werthen wurde mittelst der Methode der kleinsten Quadrate eine empirische Formel aufgestellt, welche die Dielektricitätsconstante als Function der Temperatur gibt.

Dritte Rubrik: Die aus der empirischen Formel berechneten Werthe der Dielektricitätsconstante K_2.

Vierte Rubrik: Die Differenz $K_2—K_1$ — also der wahrscheinliche Beobachtungsfehler.

Fünfte Rubrik: Die Dichte der Substanz bei der jeweiligen Temperatur d.

Sechste Rubrik: Die nach der Mosotti-Clausius'schen Theorie berechneten Werthe der Dielektricitätsconstante K_3.

Siebente Rubrik: Die Differenz der Werthe von K, die sich aus Theorie und Beobachtung ergeben; also $K_3 - K_2$.

Achte Rubrik: Dasselbe in Procenten der Dielektricitätsconstante; also $\frac{K_3 - K_2}{K_2} . 100$.

Neunte Rubrik: Die nach der Mosotti-Clausius'schen Theorie berechneten Werthe der Maximal- oder wahren Dichte D.

Zehnte Rubrik: Die Änderung der wahren Dichte in Procenten der letzteren; also $\frac{D - D_0}{D_0} . 100$.

Endlich, um das Verhalten der wahren Dichte mit dem der gewöhnlichen Dichte besser vergleichen zu können, gebe ich noch in der

Eilften Rubrik: Die Änderung der gewöhnlichen Dichte in Procenten; also $\frac{d - d_0}{d_0} . 100$.

Zum Schlusse jeder Tabelle ist noch die sub 3 erwähnte empirische Formel und die nach Gleichung (4) gebildete theoretische Formel angegeben.

Zu den in diesen Tabellen zusammengestellten Resultaten ist Folgendes zu bemerken:

1. Benzol.

Die Dichte wurde aus der Formel

$$v_t = v_0(1 + 0 \cdot 0011763\, t + 0 \cdot 0000012775\, t^2)$$

und

$$d_4^{20} = 0 \cdot 8800 \quad \text{(Landolt-Börnstein)}$$

berechnet. Daraus fand sich für den von mir untersuchten Temperaturintervall

$$v_t = v_{10}[1 + 0 \cdot 0012118(t - 10)]$$

— das quadratische Glied kam nicht mehr in Betracht. Die Abweichung der berechneten Werthe der Dielektricitätsconstante von den beobachteten beträgt im Maximum $0 \cdot 33\,^0/_0$. Sie ist (höchstens mit Ausnahme des letzten Werthes) von derselben Grössenordnung wie die Beobachtungsfehler.

Benzol.

t	K_1	K_2	K_2-K_1	d	K_3	K_3-K_2	$\frac{K_3-K_2}{K_2}.10^2$	D	$\frac{D-D_{10}}{D_{10}}.10^2$	$\frac{d-d_{10}}{d_{10}}.10^2$
10	2·1416	—	—	0·8907	—	—	—	3·2312	—	—
15	2·1295	2·1308	0·0013	0·8854	2·1320	0·0012	0·060	3·2343	0·093	0·58
20	2·1187	2·1209	0·0022	0·8800	2·1224	0·0015	0·075	3·2353	0·123	1·16
25	2·1102	2·1119	0·0017	0·8747	2·1128	0·0009	0·045	3·2348	0·108	1·74
30	2·1030	2·1040	0·0010	0·8695	2·1032	—0·0008	0·040	3·2321	0·027	2·32
35	2·0971	2·0968	-0·0003	0·8643	2·0936	—0·0032	0·160	3 2283	—0·087	2·90
40	2·0920	2·0905	—0·0015	0·8592	2·0840	—0·0065	0·325	3·2229	—0 249	3·48

Empirische Formel:

$$K_t = 2\cdot 1416[1-0\cdot 00106(t-10)+0\cdot 0000087(t-10)^2].$$

Theoretische Formel:

$$K_t = 2\cdot 1416[1-0\cdot 000896(t-10)].$$

Mandelöl.

t	K_1	K_2	$K_2—K_1$	d	K_3	$K_3—K_2$	$\frac{K_3-K_2}{K_2}.10^2$	D	$\frac{D-D_{20}}{D_{20}}.10^2$	$\frac{d-d_{20}}{d_{20}}.10^2$
20	2·8330	—	—	0·9182	2·8330	—	—	2·4212	—	—
25	2·8104	2·8117	0·0013	0·9148	2·8212	0·0095	0·38	2·4307	0·38	0·34
30	2·7942	2·7942	—	0·9115	2·8094	0·0152	0 61	2·4356	0·58	0·67
35	2·7809	2·7796	—0·0013	0 9081	2·7977	0·0181	0·72	2·4378	0·66	1·01
40	2·7711	2·7701	—0·0010	0·9047	2·7860	0·0159	0·64	2·4379	0·66	1·35
45	2·7607	2·7635	0·0028	0·9013	2·7742	0·0107	0·43	2·4370	0·66	1·69

Empirische Formel:

$$K_t = 2\cdot 8330[1 - 0\cdot 001628(t-20°) + 0\cdot 0000259(t-20°)^2].$$

Theoretische Formel:

$$K_t = 2\cdot 8330[1 - 0\cdot 000834(t-20°) + 0\cdot 00000014(t-20°)^2].$$

Vaselinöl.

t	K_1	K_2	K_2-K_1	d	K_3	K_3-K_2	$\frac{K_3-K_2}{K_2}.10^2$	D	$\frac{D-D_{20}}{D_{20}}.10^2$	$\frac{d-d_{20}}{d_{20}}.10^2$
20	2·1179	—	—	0·8718	—	—	—	3·2114	—	—
25	2·1104	2·1105	0·0001	0·8684	2·1119	0·0015	0·075	3·2143	0·087	0·4
30	2·1036	2·1038	0·0002	0·8650	2·1060	0·0022	0·110	3·2159	0·135	0·8
35	2·0974	2·0978	0·0004	0·8616	2·1002	0·0024	0·120	3·2169	0·165	1·2
40	2·0920	2·0927	−0·0002	0·8581	2·0944	0·0017	0·085	3·2142	0·084	1·6
45	2·0886	2·0884	−0·0002	0·8547	2·0887	0·0003	0·015	3·2105	−0·027	2·0
50	2·0848	2·0848	—	0·8513	2·0831	−0·0017	−0·085	3·1057	−0·171	2·4

Empirische Formel:

$$K_t = 2\cdot 1179[1-0\cdot 000738(t-20)+0\cdot 0000072(t-20)^2].$$

Theoretische Formel:

$$K_t = 2\cdot 1179[1-0\cdot 000567(t-20)+0\cdot 00000063(t-20)^2].$$

Paraffin

(bei 17° fest, sonst flüssig).

t	K_1	K_2	K_2-K_1	d	K_3	K_3-K_2	$\frac{K_3-K_2}{K_2}.10^2$	D	$\frac{D-D_{60}}{D_{60}}.10^2$	$\frac{d-d_{60}}{d_{60}}.10^2$
17	2·1449	—	—	0·9174	—	—	—	3·3213	—	—
60	1·9615	—	—	0·7806	—	—	—	3·2162	—	—
65	1·9588	1·9586	—0·0002	0·7773	1·9573	—0·0013	0·065	3·2094	0·2	0·4
70	1·9548	1·9551	0·0003	0·7740	1·9532	—0·0019	0·095	3·2052	0·3	0·8
75	1·9512	1·9509	—0·0003	0·7707	1·9489	—0·0020	0·100	3·2015	0·4	1·2
80	1·9460	1·9461	0·0001	0·7674	1·9447	—0·0014	0·070	3·2008	0·45	1·6

Empirische Formel:

$$K_t = 1\cdot9615[1-0\cdot00026(t-60)-0\cdot0000068(t-60)^2].$$

Theoretische Formel:

$$K_t = 1\cdot9615[1-0\cdot000424(t-60)].$$

Benzol wurde in dieser Beziehung schon von Palaz,[1] Negreano,[2] Cassie[3] und Ratz[4] untersucht. Letzterer gibt auch in seiner Arbeit (S. 104) die Temperaturcoëfficienten an, welche diese Beobachter gefunden haben. Es scheint mir jedoch diese Art, die verschiedenen Resultate zu vergleichen,

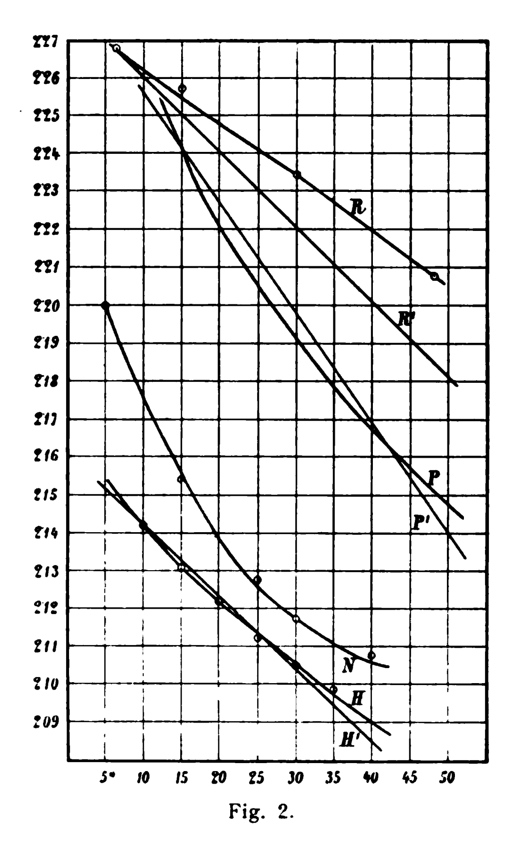


Fig. 2.

nicht sehr zweckmässig zu sein, erstens, weil die Temperaturcoëfficienten von den verschiedenen Autoren zu verschiedenen Temperaturen angegeben sind und zweitens, weil auch die absoluten Werthe der Dielektricitätsconstante nicht unerheblich

---

1 Palaz, Journ. de Physique (2), 5, p. 370, 1885.

2 Negreano, Compt. rend. 114, p. 345, 1892.

3 Cassie, Proc. Roy. Soc. London, 46, p. 357, 1889.

4 Ratz, l. c.

von einander abweichen und in Folge dessen auch der theoretisch gefundene Temperaturcoëfficient nicht für alle gleich ist. Ich habe es daher vorgezogen, den Verlauf der Dielektricitätsconstante graphisch darzustellen (Fig. 2), und zwar bedeuten hier *P, N, R, H* die von Palaz, Negreano, Ratz und mir beobachteten Werthe, während *P', N', H'* die zu jeder Beobachtungsreihe theoretisch gefundenen Curven sind. Die Arbeit von Palaz war mir leider unzugänglich, ich habe daher die Curve dem Aufsatz von Linde[1] entnommen. Da aber der

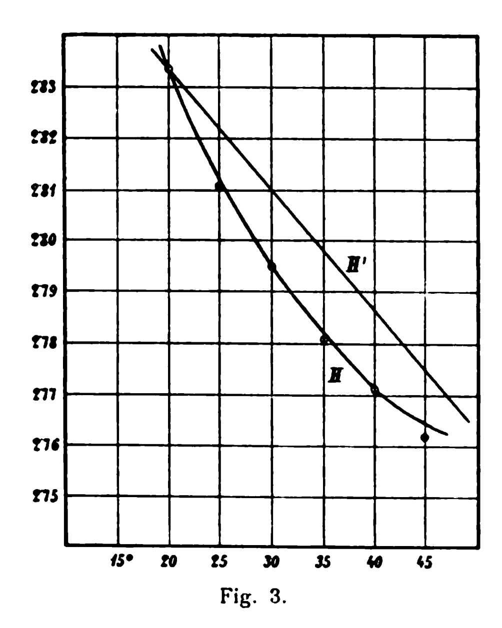


Fig. 3.

absolute Werth der von Palaz gefundenen Dielektricitätsconstante so gross ist, dass er auf meiner Figur nicht mehr Platz gefunden hätte, habe ich hier die um 0·1 verminderte Dielektricitätsconstante aufgetragen. Daher auch das steilere Abfallen der Curve gegen die Abscissenaxe.

2. Mandelöl.

Die theoretischen Werthe sind aus dem für dieses Intervall beobachteten mittleren Ausdehnungs-Coëfficienten 0·00080

---

[1] Linde, l. c.

berechnet. Die Abweichung der berechneten Dielektricitätsconstante von der Beobachtung beträgt hier im Maximum 0·72% (siehe Fig. 3).

3. Vaselinöl.

Der mittlere Ausdehnungscoëfficient zwischen 20° und 50° wurde zu 0·000783 bestimmt. Die grösste Abweichung des theoretischen Werthes vom beobachteten betrug 0·12%. Auf Fig. 4 habe ich wieder mit F die von Fuchs,[1] mit H die

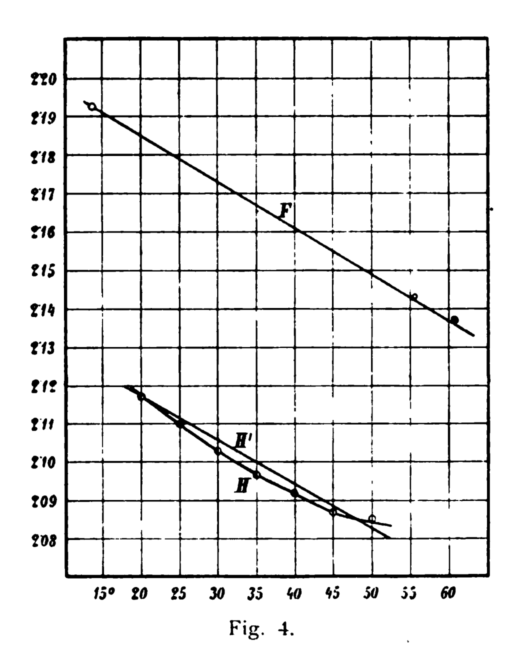


Fig. 4.

von mir beobachteten Werthe bezeichnet. Die Curve von Fuchs läuft mit der theoretischen beinahe identisch; es hat dies jedoch keine grosse Bedeutung, da Fuchs in diesem Intervall die Dielektricitätsconstante nur an zwei Punkten (14° und 55°) bestimmt hat. Linde hat auch die Beobachtungen von Fuchs der theoretischen Betrachtung unterzogen, aber nach seinen Rechnungen schliesst die theoretische Curve mit der

[1] Fuchs, diese Sitzungsber., 98., S. 1240, 1889.

beobachteten einen ziemlich erheblichen Winkel ein; da er aber dieses Resultat nur graphisch mittheilt, weiss ich nicht, in welchem Punkte unsere Rechnungen voneinander abweichen.

Auch Cassie[1] hat die Dielektricitätsconstante des Vaselinöls untersucht und eine Zunahme derselben mit der Temperatur constatirt. Doch scheint dieses Ergebniss ziemlich zweifelhaft.

4. Paraffin.

Der mittlere Ausdehnungscoëfficient ergab sich zwischen 60° und 80° zu 0·00066. Die unter K'_8 stehenden Werthe

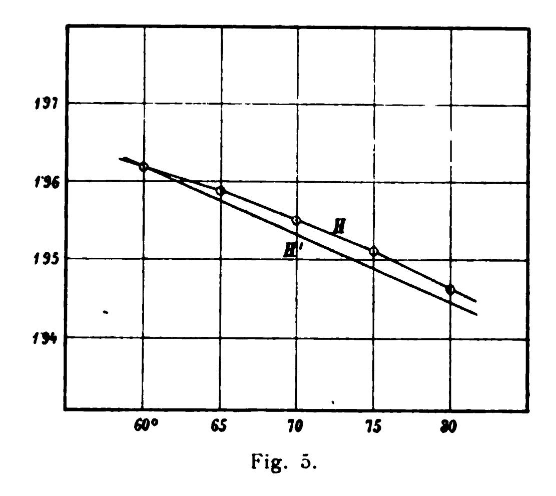


Fig. 5.

wurden aus dem Werthe der Dielektricitätsconstante bei 60° berechnet. Wie man sieht, weichen dieselben von den beobachteten Werthen im Maximum um 0·1% ab (siehe Fig. 5).

Ich habe die Dielektricitätsconstante des Paraffin auch im festen Zustande, und zwar bei 17° gemessen. Um dies zu thun, füllte ich anfangs das ganze Becherglas, in das der Flüssigkeitscondensator tauchte, mit flüssigem Paraffin und liess es darin erstarren. Doch zeigte es sich, dass sich beim gänzlichen Erstarren grosse Luftblasen bildeten, die zu den grössten Fehlern Anlass gegeben hätten. Ich füllte daher das zweite Mal das

[1] Cassie, l. c.

Becherglas ganz allmälig mit Paraffin an, so dass die unteren Partien schon ganz erstarrt und erkaltet waren, ehe die oberen gefüllt wurden. Nach den Versuchen zerschlug ich das Becherglas und liess das Paraffin durch Bestreichen mit der Flamme eines Bunsenbrenners langsam von allen Seiten abtropfen; so konnte ich mich überzeugen, dass sich im Innern thatsächlich keine Luftblasen gebildet hatten.

Die so erhaltene Dielektricitätsconstante des festen Paraffins habe ich oben mitgetheilt; will man daraus den Werth der Dielektricitätsconstante des flüssigen Paraffins berechnen, so erhält man 0·9128, welche Zahl von der beobachteten um 2·17% abweicht.

Paraffin wurde bereits einmal untersucht, und zwar von Arons und Rubens,[1] und zwar erhielten sie für die Dielektricitätsconstante des

festen Paraffins . . . . 1·95
erstarrenden Paraffins . . . . 2·08
flüssigen Paraffins . . . . 1·98.

Vielleicht sind diese Resultate auf die oben erwähnte Fehlerquelle zurückzuführen. Sie liessen auch das Paraffin im Condensator erstarren und erwähnen keine Vorsichtsmassregel, die sie dabei getroffen hätten, um die Bildung der Luftblasen zu verhüten.

IV.

Bevor ich nun meine Schlussfolgerungen über die Giltigkeit der Mosotti-Clausius'schen Formel ziehe, möchte ich noch erinnern, dass dieselbe nur unter gewissen Voraussetzungen abgeleitet werden kann. Man muss nämlich annehmen, dass die im vollständigen Isolator eingebetteten leitenden Partikeln kugelförmig sind und dass ihr Abstand gegen ihren Durchmesser so gross sei, dass eine gegenseitige Influenzirung vernachlässigt werden kann. Dies wird wohl nie genau zutreffen und die Formel kann daher die thatsächlichen Verhältnisse nur annähernd wiedergeben. Es ist auch klar,

---

[1] Arons und Rubens, Wied. Ann., 44, S. 206, 1891.

dass die Forderungen der Theorie bei verschiedenen Dielectricis verschieden gut erfüllt sein können.

Über die von mir untersuchten Substanzen lässt sich Folgendes sagen:

1. Die Mosotti-Clausius'sche Constante $\frac{K+2}{K-1}.d$ ist kaum als ausgesprochene Function der Temperatur zu bezeichnen, wie dies u. A. Ratz[1] gethan hat. Denn erstens beträgt ihre Änderung in einem Temperaturintervall von 30—40° nie mehr als 0·7% (Mandelöl) und zweitens zeigt sie keinen regelmässigen Verlauf, indem sie bei einigen Substanzen ein Maximum erreicht, bei anderen wieder beständig abnimmt (bei den von Ratz[1] untersuchten Substanzen änderte sie sich im Maximum um 5%). Ferner behauptet Ratz,[1] dass die Änderung dieser Constante um so beträchtlicher sei, je grösser die Dielektricitätsconstante des betreffenden Mediums ist. Ich kann dies bestätigen, da ich bei Mandelöl weitaus die grösste Abweichung von Theorie und Erfahrung constatirt habe. Der Grund dieser Erscheinung dürfte der sein, dass bei Medien mit grosser Dielektricitätsconstante auch die wahre Raumerfüllung eine verhältnissmässig grössere ist und dass daher die zweite der oben angeführten Voraussetzungen schlechter erfüllt ist.

2. Die Abweichung der Werthe der Dielektricitätsconstante, welche sich nach der Theorie und durch die Beobachtung ergaben, betrug im Maximum 0·7%. Und zwar wurde dieses Maximum wieder von Mandelöl erreicht, während die anderen Substanzen eine noch bedeutend bessere Übereinstimmung zeigten (bei Ratz 10%).

Der Temperaturcoëfficient, der sich aus der Theorie ergab, weicht bei der Anfangstemperatur meist beträchtlich von dem beobachteten ab (besonders bei Mandelöl), da er sich jedoch bald gegen den theoretischen Werth hin ändert, bleiben die Abweichungen doch so gering.

Die von der Theorie gelieferten Curven sind nahezu Gerade, während die beobachteten Curven von Benzol und Vaselinöl sehr schwach, die von Mandelöl etwas stärker convex gegen

---

[1] Ratz, l. c. S. 105.

die Temperaturaxe sind. Das flüssige Paraffin lieferte jedoch eine gegen die Temperaturaxe schwach concave Curve. Nach den Beobachtungen meiner Vorgänger zu schliessen, scheint dies überhaupt der einzige Stoff zu sein, bei dem die Dielektricitätsconstante in dieser Weise verläuft.

3. Auf feste Körper wurde meines Wissens die Mosotti-Clausius'sche Theorie noch nicht angewendet. Ich habe dies beim festen Paraffin gethan und auch hier eine ziemlich befriedigende Übereinstimmung mit der Erfahrung gefunden (die wahre Dichte des festen Paraffins weicht von der des flüssigen um weniger als 3% ab). Die Dielektricitätsconstante fester Körper bei verschiedenen Temperaturen zu studiren, behalte ich einer späteren Untersuchung vor.

Ein endgiltiges Urtheil über die Berechtigung der Mosotti-Clausius'schen Theorie zu fällen, halte ich für verfrüht, da zwischen den einzelnen Beobachtern noch viel zu wenig Einigkeit herrscht (man sehe nur, wie auf Fig. 2 die Resultate der einzelnen Beobachter von einander abweichen — und wie z. B. die von mir beobachtete Curve von der theoretischen weniger unterschieden ist, als von der Negreano's). Jedenfalls muss ich aber als Ergebniss meiner Arbeit eine sehr gute Übereinstimmung der Mosotti-Clausius'schen Theorie mit der Erfahrung constatiren.

Diese Arbeit wurde im physikalisch-chemischen Institute der Universität Wien ausgeführt und ich erlaube mir dem Vorsteher desselben, Herrn Prof. Dr. Franz Exner, auf dessen Anregung hin ich die Untersuchungen ausgeführt habe, für seine gütige Unterstützung meinen aufrichtigsten Dank auszudrücken.

XVI. SITZUNG VOM 18. JUNI 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. II. b, Heft III—IV (März bis April 1896).

Der Secretär legt Dankschreiben für bewilligte Subventionen von den Herren Prof. Dr. E. Heinricher in Innsbruck, Prof. S. L. Schenk und Adjuncten J. Liznar in Wien vor.

Ferner legt der Secretär eine Abhandlung von Prof. Dr. J. Blaas in Innsbruck: »Über die Lage der Schnittlinie von Terrainflächen und geologischen Ebenen« vor.

Das c. M. Prof. Franz Exner übersendet zwei für die Sitzungsberichte bestimmte Arbeiten:

1. »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente«, III. Mittheilung von F. Exner und E. Haschek.
2. »Über die Abhängigkeit der Polarisation der Platinelektroden von der Temperatur« von F. Erben.

Das w. M. Herr Hofrath Director A. Ritter Kerner v. Marilaun überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. Julius Steiner in Wien, betitelt: »Beitrag zur Flechten-Flora Südpersiens«.

Das w. M. Herr Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Dr. Hans Benndorf in Wien, betitelt: »Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Theorie der Gase«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Reutter Enzio. Über die Palpen der Rhopaloceren. Ein Beitrag zur Kenntniss der verwandtschaftlichen Beziehungen unter den Tagfaltern. (Mit 6 Tafeln.) (Acta Societatis Scientiarium Fennicae. Tom. XX, Nr. 1.) Helsingfors, 1896; 4°.

Société des Sciences Naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin. Tome 5, I. Nantes, 1895; 8°.

Preisaufgabe

für den von **A. Freiherrn v. Baumgartner** gestifteten Preis.

(Ausgeschrieben am 3. Juni 1896.)

Die mathem.-naturw. Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften hat in ihrer ausserordentlichen Sitzung vom 1. Juni 1896 beschlossen, für den A. Freiherr von Baumgartner'schen Preis folgende neue Aufgabe zu stellen:

»Ausdehnung unserer Kenntnisse über das Verhalten der äussersten ultravioletten Strahlung.«

Der Einsendungstermin der Concurrenzschriften ist der 31. December 1898; die Zuerkennung des Preises von 1000 fl ö. W. findet eventuell in der feierlichen Sitzung des Jahres 1899 statt.

Zur Verständigung der Preisbewerber folgen hier die auf Preisschriften sich beziehenden Paragraphe der Geschäftsordnung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:

»§. 57. Die um einen Preis werbenden Abhandlungen dürfen den Namen des Verfassers nicht enthalten, und sind, wie allgemein üblich, mit einem Motto zu versehen. Jeder Abhandlung hat ein versiegelter, mit demselben Motto versehener Zettel beizuliegen, der den Namen des Verfassers enthält. Die Abhandlungen dürfen nicht von der Hand des Verfassers geschrieben sein.«

»In der feierlichen Sitzung eröffnet der Präsident den versiegelten Zettel jener Abhandlung, welcher der Preis zuerkannt wurde, und verkündet den Namen des Verfassers. Die übrigen Zettel werden uneröffnet verbrannt, die Abhandlungen aber aufbewahrt, bis sie mit Berufung auf das Motto zurückverlangt werden.«

»§. 59. Jede gekrönte Preisschrift bleibt Eigenthum ihres Verfassers. Wünscht es derselbe, so wird die Schrift durch die Akademie als selbständiges Werk veröffentlicht und geht in das Eigenthum derselben über...«

»§. 60. Die wirklichen Mitglieder der Akademie dürfen an der Bewerbung um diese Preise nicht Theil nehmen.«

»§. 61. Abhandlungen, welche den Preis nicht erhalten haben, der Veröffentlichung aber würdig sind, können auf den Wunsch des Verfassers von der Akademie veröffentlicht werden.«

Über die Abhängigkeit der Polarisation von Platinelektroden von der Temperatur

von

Fritz Erben.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der Universität in Wien.

(Mit 13 Textfiguren.)

Den Einfluss der Temperatur auf die galvanische Polarisation in einer Zersetzungszelle hat zuerst Poggendorf[1] untersucht, indem er den durch eine Wippe abgezweigten Polarisationsstrom eines kalten Voltameters mit dem eines erwärmten verglich.

Genauere quantitative Bestimmungen dieser Abhängigkeit haben Robinson,[2] Beetz[4] und Crova[4] für Platinplatten in verdünnter Schwefelsäure angestellt. W. Schmidt[5] verwendete Platinplatten in Kochsalz- und Salpeterlösung.

Raoult[6] untersuchte den Einfluss der Temperatur auf die primären und secundären Wärmevorgänge in einem Smee'-schen Element und in einer Zersetzungszelle mit Platinelektroden in Kupfersulfatlösung und in verdünnter Schwefelsäure.

In neuerer Zeit hat namentlich F. Exner[7] genauere und ausführlichere Untersuchungen über die Abhängigkeit der Polarisation von der Temperatur angestellt.

---

1 Poggendof, Pogg. Ann. 61, 619 (1844).

2 Robinson, Transact. Irish Acad., 21, 297 (1848).

3 Beetz, Pogg. Ann., 79, 103, 109 (1850).

4 Crova, Ann. de Chim. et de Phys. [3], 68, 433 (1863).

5 W. Schmidt, Pogg. Ann., 107, 561 (1859).

6 Raoult, C. r., 67, 950 (1868).

7 F. Exner, diese Sitzungsberichte, 103. Bd., S. 845 (1894).

In allen Fällen ergab sich ein Abnehmen der Polarisation bei Erwärmung der Zelle.

Diese Erscheinung wird gewöhnlich so erklärt, dass die bei der Elektrolyse sich entwickelnden Gase, welche die Polarisation erzeugen, bei höheren Temperaturen schwerer an den Elektroden haften.

Die hauptsächlich von F. Exner ausgebildete chemische Theorie gibt dagegen eine andere Erklärung dieser Thatsache.

Nach dieser Theorie wird in der Zersetzungszelle durch den primären Strom Arbeit geleistet, indem der Elektrolyt zersetzt wird. Als Ersatz für diese Arbeit erhalten wir die elektrische Energie der Polarisation. Die Grösse der elektromotorischen Kraft der Polarisation wird demnach gemessen durch den Wärmewerth der chemischen Vorgänge in der Zersetzungszelle. Da nun der Wärmewerth chemischer Zersetzungen bei Erhöhung der Temperatur in der Regel abnimmt, so stimmt damit die Thatsache überein, dass die Polarisation bei Erwärmung sinkt.

Bei allen bisher in dieser Fiage angestellten Messungen wurde nur die Abnahme der Polarisation bei Erwärmung der Zelle bestimmt, tiefere Temperaturen wurden nicht berücksichtigt.

Vorliegende Arbeit hat nun den Zweck, zu zeigen, dass diese Abhängigkeit der Polarisation von der Temperatur auch bei tiefen Temperaturen besteht.

Versuchsanordnung.

Bei den im Folgenden angeführten Messungen wurde die Grösse der Polarisation während des Durchganges des primären Stromes durch die Zersetzungszelle mittelst Compensation unter Zuhilfenahme einer zweiten Elektricitätsquelle gemessen. Die Anordnung war folgende:

Der Strom einer Accumulatorenbatterie, deren elektromotorische Kraft durch öfteres Nachladen stets über circa 7 Volt erhalten wurde, durchfloss eine Zersetzungszelle. In den primären Stromkreis wurde, um das Potentialgefälle des primären Stromes zwischen den beiden Elektroden möglichst klein zu machen, ein grosser Widerstand (siehe weiter unten)

eingeschaltet. Die zum Compensiren nöthige Potentialdifferenz wurde von einem Brückendrahte abgenommen, durch den der Strom einer zweiten Elektricitätsquelle geleitet wurde. Die Potentialdifferenz zwischen den Enden der Brücke wurde an einem Siemens'schen Torsionsgalvanometer abgelesen. Die Kathode der Zersetzungszelle wurde mit jener Klemmschraube der Brücke verbunden, die das niedrigere Potential hatte, während zwischen die Anode und den auf der Brücke verschiebbaren Schleifencontact ein Capillarelektrometer eingeschaltet wurde.

Fig. 1 gibt eine schematische Darstellung der Schaltung.

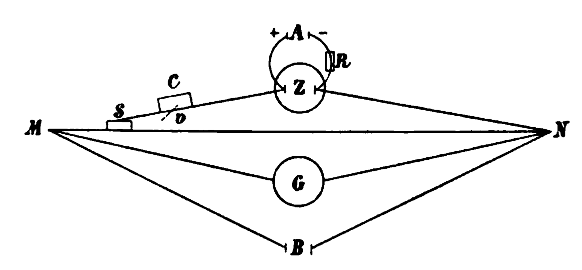


Fig. 1. *A* Accumulatorenbatterie, *Z* Zersetzungszelle, *C* Capillarelektrometer (durch den Schlüssel *v* in sich geschlossen), *MN* Brücke, *S* Schleifcontact, *G* Galvanometer, *B* zweite Stromquelle,[1] *R* Rheostat.

Der Schleifcontact *S* wurde so lange auf der Brücke verschoben, bis das Capillarelektrometer keinen Ausschlag mehr zeigte. Der Schlüssel *v* des Capillarelektrometers blieb immer geschlossen und wurde nur zu Ablesungen geöffnet.

Die hier angegebene Methode besitzt einen hohen Grad von Genauigkeit, namentlich wenn, wie in diesem Falle, das Capillarelektrometer sehr empfindlich ist. Das hier verwendete Capillarelektrometer ist ein horizontales, in der von St. Meyer[2] angegebenen Modification.

Die Brücke bildete ein 2000 *mm* langer Neusilberdraht. Aus dem beim Schleifcontact abgelesenen Theilstrich der Brücke und der am Galvanometer abgelesenen Potential-

---

[1] In diesem Falle der Gleichstrom von Siemens und Halske, mit einer Lampe als Vorschaltwiderstand.

[2] St. Meyer, diese Sitzungsberichte, 105. Bd. (1896).

differenz zwischen den Enden der Brücke konnte die Potentialdifferenz an den Elektroden berechnet werden.

Um den bei Platten auftretenden Übelstand des langsamen Ansteigens der Polarisation mit der Zeit zu vermeiden, wurden in Glasröhren eingeschmolzene Platindrähte von 0·27 *mm* Dicke und 1 *mm* Länge als Elektroden verwendet. Wollaston-sche Spitzen, für welche die Polarisation am raschesten ein Maximum erreicht, wurden des grossen Widerstandes wegen nur einmal für Temperaturen zwischen 0° und 100° verwendet, da der Widerstand, wie weiter unten gezeigt werden wird, bei tiefen Temperaturen sehr rasch mit der Temperaturabnahme wächst.

Die tiefen Temperaturen wurden mit fester Kohlensäure erzeugt.

Bestimmung der Grösse des in den primären Stromkreis einzuschaltenden Widerstandes *R*.

Es wurden zunächst 10.000 Ohm eingeschaltet und der Schleifcontact auf der Brücke so eingestellt, dass das Capillarelektrometer in Ruhe blieb. Die daraus berechnete Potentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden war die Summe aus der Polarisation und dem vom primären Strom herrührenden Potentialgefälle an den Elektroden. Das letztere wurde immer geringer bei Vergrösserung des Widerstandes *R*. Für $R = 80.000$ Ohm zeigte sich keine Veränderung der Potentialdifferenz bei Zuschaltung weiterer 10.000 Ohm. Man erhält also die Polarisation allein.

Da bei tiefen Temperaturen ein Wachsen des Widerstandes der Zelle zu erwarten war, so wurden 100.000 Ohm eingeschaltet.

Eine directe Messung des Widerstandes der Zelle nach der Methode von Kohlrausch mit Wechselstrom und Telephon gab bei den in diesen Versuchen verwendeten kleinen Elektroden wegen der dabei auftretenden Polarisation keine bestimmten Werthe, da das Telephon nie zur Ruhe kam. Bei Vorschaltung eines bekannten grösseren Widerstandes vor die zu messende Zelle konnte jedoch eine Einstellung des Schleifcontactes der Kohlrausch'schen Messbrücke gefunden werden,

für welche das Telephon zur Ruhe kam. Die Genauigkeit des so gefundenen Werthes war sehr gering, da die Fehlergrenze in Folge des grossen Gesammtwiderstandes zu gross war und ausserdem die Polarisation noch immer störend wirkte Auf diese Weise wurde gefunden, dass der Widerstand der 45%igen[1] Schwefelsäure bei —70° noch unter 300 Ohm verblieb, also im Vergleich zu den vorgeschalteten 100.000 Ohm genügend klein.

Eine genauere Bestimmung der Widerstandsänderung bei tiefen Temperaturen war bei Verwendung von Platinplatten als Elektroden möglich. Für den Widerstand der 45%igen Schwefelsäure wurden folgende relative Werthe gefunden (in Ohm).

Temperatur	20°	−5·5°	−11·5°	−18·5°	−25°	−29°	−35·5°	−38·5°	−43·5°
Widerstand	0·28	0·35	0·38	0·42	0·49	0·54	0·65	0·72	0·86

Temperatur	−47·5°	−58°	−60°	−62°	−63°	−65°	−66°	−68°
Widerstand	1·00	1·90	2·15	2·60	2·78	3·3	3·5	4·0

Fig. 2 gibt ein Bild des Verlaufes des Widerstandes mit der Temperatur. Der Widerstand wächst also bei tiefen Temperaturen sehr rasch.

Von den bei den folgenden Messungen untersuchten Säuren hat nur die 59·2%ige Schwefelsäure einen grösseren Widerstand als die hier gemessene.[2] Dieselbe wurde jedoch nur in einem geringeren Temperaturintervall untersucht, so dass auch ihr Widerstand als genügend klein gegenüber $R = 100.000$ Ohm angenommen werden konnte.

[1] Als Procentgehalt gilt hier und im Folgenden nach F. Kohlrausch (Pogg. Ann., 154, 216 [1873]) die Anzahl der in 100 cm^3 der Lösung enthaltenen Gramme des gelösten Stoffes.

[2] Nach den Messungen von F. Kohlrausch (Pogg. Ann., 159, 257 [1877]) und Grotian (Pogg. Ann., 151, 278 [1874]).

Nach der oben angeführten Methode wurde die Änderung der Polarisation mit der Temperatur für Schwefelsäure von 45 %, 14 % und 59·2 %, ferner für Salzsäure von 38 %, 24·1 % und 13·3 % und für concentrirte, 24 %- und 14·4 %ige Salpetersäure gemessen. Die 45 %ige Schwefelsäure wurde gewählt, weil sie nach Raoul Pictet[1] den tiefsten Gefrierpunkt aller

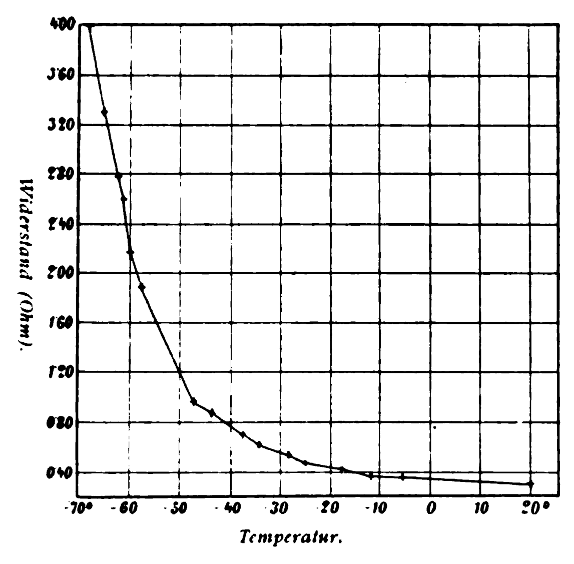


Fig. 2. Widerstand der 45 %igen Schwefelsäure.

Concentrationen von Schwefelsäure hat, nämlich —88°, somit ein Gefrieren derselben ausgeschlossen war, da mit fester Kohlensäure bei gewöhnlichem Luftdruck nur eine Temperatur von —79° erzeugt werden kann.[2] Die übrigen Concentrationen sind willkürlich gewählt.

I. Schwefelsäure.

1. Wollaston'sche Spitzen in 45 %iger Schwefelsäure (spec. Gewicht 1·268); *e* bezeichnet im Folgenden die Potentialdifferenz zwischen den Klemmen der Brücke, *n* den Theilstrich der Brücke, auf dem der Schleifcontact steht, *p* die daraus

[1] Raoul Pictet, C. r., 119, 642 (1894); Naturw. Rdsch., X, Heft 4.

[2] P. Villard und R. Jarry, C. r., 120, 1413 (1895).

berechnete Polarisation, t die Temperatur (n in Millimeter, e und p in Volt).

Es ergaben sich nachstehende Werthe: $e = 4 \cdot 91$.

n	t	p
1112	14·8°	2·73
1102	16·5°	2·71
1082	24°	2·65
1040	30°	2·56
1023	32°	2·52
998	41·5°	2·45
982	45°	2·42
962	51·5°	2·37
942	55°	2·32
895	77°	2·20
870	85·5°	2·14

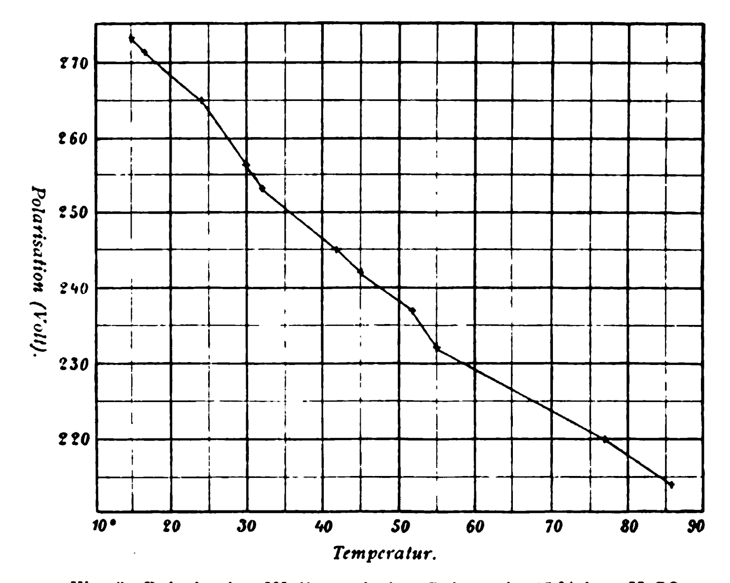


Fig. 3. Polarisation Wollaston'scher Spitzen in 45%iger H_2SO_4.

2. Platindrähte von 1 *mm* Länge und 0·27 *mm* Dicke in 45%iger Schwefelsäure. Die Werthe sind etwas geringer als

für Spitzen. Die hier angeführten Werthe sind Mittelwerthe aus acht Versuchsreihen mit 93 Versuchen.

Temperatur...	—75°	—70°	—60°	—50°	—40°	—30°	—20°	—10°	0°
Polarisation ..	3·62	3·33	3·10	2·98	2·90	2·77	2·68	2·59	2·56

Temperatur...	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Polarisation ..	2·49	2·40	2·33	2·25	2·17	2·09	2·02	1·95	1·91

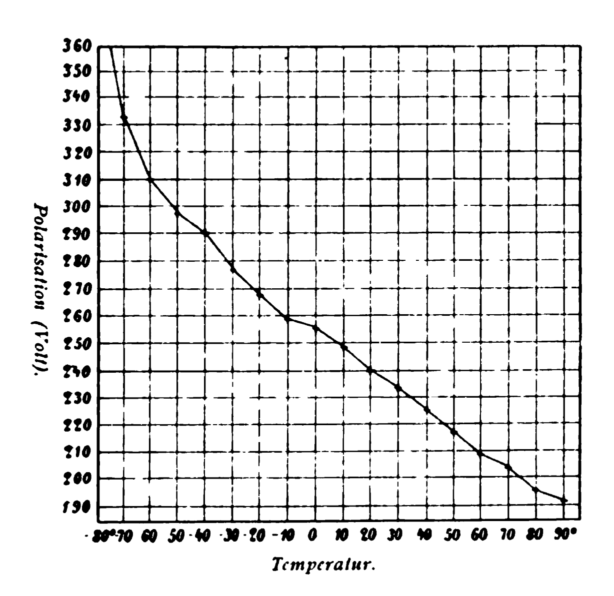


Fig. 4. Schwefelsäure 45%.

Die Polarisation nimmt also bei Temperaturerniedrigung zu, und zwar ungefähr proportional der Temperaturabnahme.

Zu demselben Resultate gelangten bereits Robinson und Beetz für Temperaturen zwischen 0° und 100°. Robinson fand:

Temperatur	16°	57·5°	94°
Polarisation.....	2·31	2·18	2·04 Volt [1]

Die Resultate von Beetz sind:

Temperatur....	20°	30°	43°	53°	60°	80°	100°
Polarisation ...	2·31	2·29	2·24	2·19	2·18	2·12	1·98 Volt

Diese beiden Ergebnisse stimmen ziemlich gut überein In Fig. 5 sind die Resultate von Beetz mit voller Linie, die von Robinson mit punktirter Linie dargestellt.

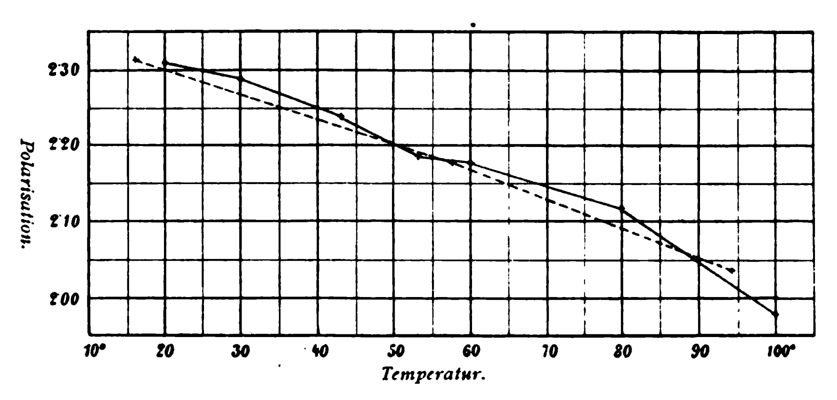


Fig. 5. Resultate von Robinson und Beetz.

Die Werthe, welche Robinson und Beetz erhalten, sind kleiner als die in vorliegender Untersuchung, da dieselben Platinplatten als Elektroden verwendeten, für welche die Polarisation kleiner ist als für kleine Drahtelektroden.

Es zeigt sich jedoch noch ein auffälliger Unterschied in der verschiedenen Steilheit der Curven. Diese Thatsache kann nur in einem Unterschied in der Concentration der verwendeten

[1] Die Originalangaben sind sowohl bei Robinson, als bei Beetz in Daniell, wurden jedoch hier zur leichteren Vergleichung in Volt umgerechnet (1 Volt = 0·89 Daniell).

Säuren oder in der verschiedenen Grösse der Elektroden ihren Grund haben.

Die folgenden Untersuchungen zeigen, dass die Concentration der Säure einen Einfluss auf die Steilheit der Polarisationscurven hat.

In allen folgenden Untersuchungen wurden die gleichen Elektroden wie bei der letztangeführten angewendet.

3. Für Schwefelsäure von 14% (spec. Gewicht 1·089) ergaben sich folgende Werthe:

e	*n*	*t*	*p*
5·04	932	20°	2·35
4·94	992	3°	2·45
4·94	1004	−4°	2·48
4·94	1040	−9°	2·57
4·92	1057	−11·5°	2·60
4·92	1068	−15·5°	2 63
4·92	1089	−19°	2·68
4·96	1100	−22°	2·73
4·92	1125	−24°	2·77

Fig. 6. Schwefelsäure 14%.

Die Curve verläuft, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist, etwas steiler als bei der 45%igen Schwefelsäure.

Nach Pictet liegt der Gefrierpunkt der Schwefelsäure von dieser Concentration zwischen —3·5° und —8·5°. Thatsächlich gefror die Säure auch in dem betrachteten Temperaturintervall. Trotzdem änderte sich ihr Widerstand nicht sprungweise, wie es bei der Salpetersäure eintrat (siehe weiter unten), weshalb in der Polarisationscurve kein Stetigkeitssprung durch Hinzutreten einer merkbaren Potentialdifferenz vom primären Strom eintrat. Die Messung des Widerstandes mit der Kohlrausch'schen Brücke ergab eine Zunahme von circa 50 Ohm bei Abkühlung von 20° auf —25°, jedoch nirgends eine sprungweise Veränderung.

4. Schwefelsäure von stärkerer Concentration, 59·2% (spec. Gewicht 1·343) ergab weit höhere Polarisationswerthe, jedoch einen geringeren Temperaturcoëfficienten. Die Polarisation wurde bei Abkühlung bis —54°, sowie bei hierauf folgender Erwärmung bis zur Zimmertemperatur gemessen, und es ergaben sich folgende Werthe:

e	n	t	p
4·80	1230	—22°	2·95
4·80	1239	—23·5°	2·97
4·84	1247	—27°	3 02
4·84	1256	—30·5°	3·03
4·84	1277	—35·5°	3·09
4·84	1293	—37°	3·13
4·90	1288	—42°	3·14
4·94	1306	—48°	3·22
4·91	1333	—52·5°	3·27
4·86	1356	—54°	3·29
4·88	1336	—51°	3·26
4·90	1301	—47°	3·19
4·90	1278	—42°	3·13
4·86	1282	—41°	3·12
4·90	1238	—34°	3·03
4·90	1224	—29°	3·00
4·90	1219	—27°	2·99
4·91	1201	—23·5°	2·95
4·91	1189	—19°	2·92
4·96	1173	—14·5°	2·91
4·90	1173	— 9·5°	2·87
4·92	1149	— 5°	2·83
4·90	1143	+ 1°	2·80
4·90	1116	4·5°	2·74
4·86	1112	10°	2·70
5·06	1049	18°	2·65

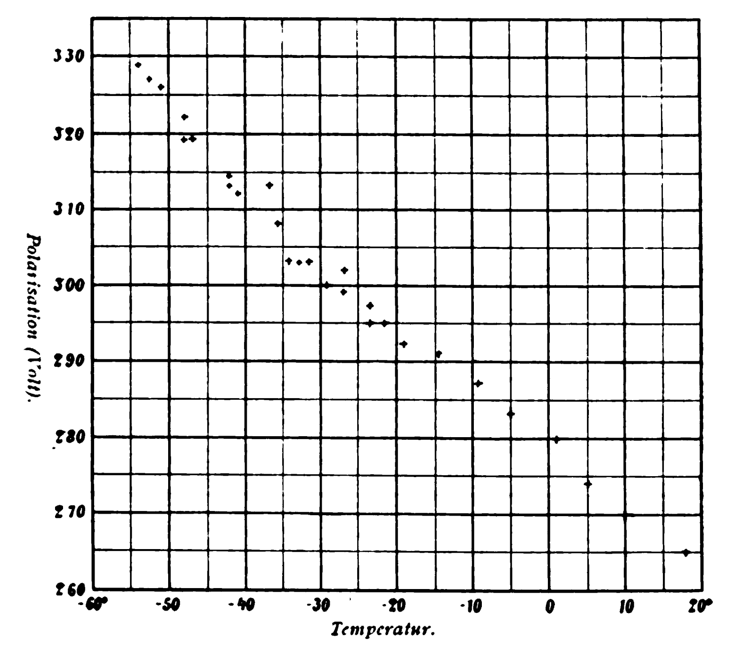


Fig. 7. Schwefelsäure 59·2 %.

Graphische Darstellung Fig. 7. Die Säure gefror nicht in dem betrachteten Temperaturintervall.

Die Curve verläuft etwas weniger steil als bei der 45 %igen Schwefelsäure. Der Temperaturcoëfficient nimmt also ab bei zunehmender Concentration.

Jedoch auch die Grösse der Elektroden ist von Einfluss auf den Temperaturcoëfficienten. Bei den von F. Exner für Schwefelsäure 1:10 bestimmten Werthen[1]

Temperatur	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Polarisation	2·05	2·02	2·00	1·93	1·89	1·82	1·75	1·71

wobei die Elektroden Platten waren, zeigt sich ein weit geringerer Temperaturcoëfficient als bei den in vorliegenden

[1] Ebenfalls aus Daniell in Volt umgerechnet.

Untersuchungen betrachteten stärkeren Concentrationen. Auch ergibt sich aus den für Wollaston'sche Spitzen angestellten Messungen ein weitaus höherer Werth des Temperaturcoëfficienten als für die grösseren Elektroden bei gleicher Concentration. Der Temperaturcoëfficient ist also für kleinere Elektroden cet. par. grösser.

Eine klare Übersicht erhält man, wenn man die Polarisation als Function der Temperatur angenähert in der Form darstellt:

$$p = p_0 + \alpha t + \beta t^2.$$

Für die einzelnen Messungen erhält man dann die in folgender Tabelle angeführten Werthe:

		p_0	α	β
Wollaston'sche Spitzen 45%		2·92	−0·0135	0·00005
Platindrähte, 1 *mm* lang, 0·27 *mm* dick	14%	2·48	−0·00904	0·000127
	45%	2·56	−0·0084	0·0000089
	59·2%	2·78	−0·0066	0·000058
Platinplatten	F. Exner	2·11	−0·0025	−0·0000214[1]
	Beetz	2·41	−0·005	0·0000114

Das Wachsen des Temperaturcoëfficienten α bei abnehmender Concentration findet jedoch nur für Schwefelsäure und Salzsäure statt, wie es sich im Folgenden zeigen wird. Bei Salpetersäure ändert er sich nicht regelmässig.

II. Salzsäure.

Die Elektroden waren dieselben.

1. Salzsäure von 38% (spec. Gewicht 1·1654) ergab:

---

[1] Der negative Werth von β dürfte wohl nur daher rühren, dass die Polarisation bei den zuerst bestimmten Werthen noch nicht ihre volle Grösse erreicht hatte, wegen des langsamen Ansteigens der Polarisation mit der Zeit bei grösseren Elektroden.

e	*n*	*t*	*p*
5·10	604	−43·5°	1·54
5·08	598	−37·5°	1·52
5·08	580	− 35°	1·47
5·08	558	−30°	1·42
5·08	545	−26°	1·39
5·08	537	−19·5°	1·36
5·06	523	−10·5°	1·32
5·12	502	+ 2·5°	1·29
5·10	504	5°	1·29
5·10	501	8°	1·28
5·08	504	12°	1·28
5·12	497	17°	1·27
5·12	491	20°	1·26

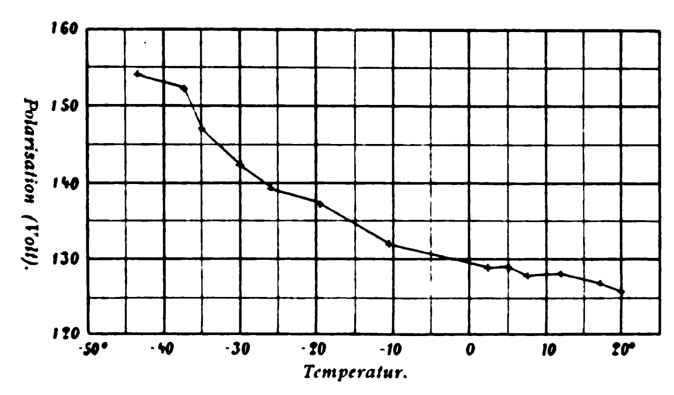


Fig. 8. Salzsäure 38%.

Die beiden noch weiterhin betrachteten Concentrationen der Salzsäure wurden ihres weit höher liegenden Gefrierpunktes wegen nur in einem kleinen Temperaturintervall beobachtet, das oberhalb des Gefrierpunktes lag.

2. Salzsäure von 24·1% (spec. Gewicht 1·109):

e	n	t	p
5·02	541	20°	1·36
5·00	549	15°	1·37
5·02	554	11°	1·39
4·98	567	6·5°	1·41
5·00	577	1·5°	1·44
5·00	585	— 4°	2·46
4·98	599	— 8°	1·49

3. Salzsäure von 13·3% (spec. Gewicht (1·0616):

e	n	t	p
5·06	576	20°	1·46
5·02	589	14°	1·48
5·00	608	9°	1·52
5·00	614	6°	1·54
5·01	625	1°	1·57
5·01	637	— 2°	1·60

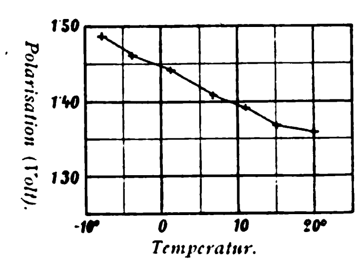


Fig. 9. Salzsäure 24·1%.

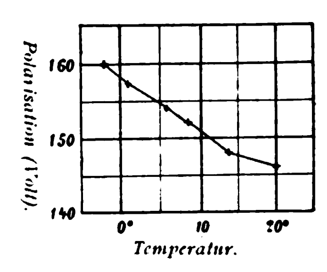


Fig. 10. Salzsäure 13·3%.

Für p_0, α und β erhält man folgende Werthe:

Concentration	p_0	α	β
38%	1·29	—0·0025	0·000078
24·1%	1·44	— 0·00547	0·000069
13·3%	1·56	—0·00785	0·000083

Bei Salzsäure nimmt also die Polarisation bei tiefen Temperaturen ebenfalls mit abnehmender Temperatur zu. Bei Concentrationsabnahme wächst sowohl die Polarisation, als auch ihr Temperaturcoëfficient.

III. Salpetersäure.

1. Concentrirte Salpetersäure. Bei Abkühlung derselben stieg die Polarisation stetig an. Bei etwa —34° gefror die Säure. Die Polarisation nahm bei dieser Temperatur sprungweise um etwa 1 Volt zu und stieg von da an wieder stetig weiter. Offenbar war durch das Gefrieren der Widerstand der Säure in der Zelle so gewachsen, dass ein Theil des primären Stromes in die Abzweigung kam. Bei Erwärmung zeigte sich ungefähr bei derselben Temperatur wieder die sprungweise Abnahme der Polarisation um denselben Betrag, worauf die Polarisationswerthe wieder dieselben waren wie vor dem Gefrieren. Verwendbar sind demnach nur die Werthe bis $t = -30°$, weil darüber hinaus der Widerstand der Zelle nicht bekannt ist.

Die beim Abkühlen erhaltenen Werthe sind in der graphischen Darstellung in Fig. 11 mit voller, die beim Wiedererwärmen erhaltenen mit punktirter Linie bezeichnet.

Es ergaben sich die Werthe:

e	n	t	p
5·00	421	19°	1·05
4·96	473	− 8°	1·17
4·94	483	−11·5°	1·19
4·94	500	−18·5°	1·24
4·94	516	−23°	1·27
4·90	547	−31°	1·34
4·98	959	−43·5°	2·39
4·92	980	−45°	2·41
4·98	1007	−50·5°	2·50
4·96	1023	−56°	2·54
5·04	1020	−59·5°	2·57
5·10	902	−30°	2·30
5·08	465	−14·5°	1·18
5·08	438	0°	1·12
5·08	433	4°	1·10
5·06	429	9°	1·09
5·06	422	14°	1·07
5·10	414	18°	1·06

Die beiden anderen noch untersuchten Salpetersäurelösungen wurden wie bei Salzsäure nicht über den Gefrierpunkt hinaus und somit nur in einem kleinen Temperaturintervall gemessen, aus dem man jedoch den Verlauf der Polarisation ganz gut erkennen kann.

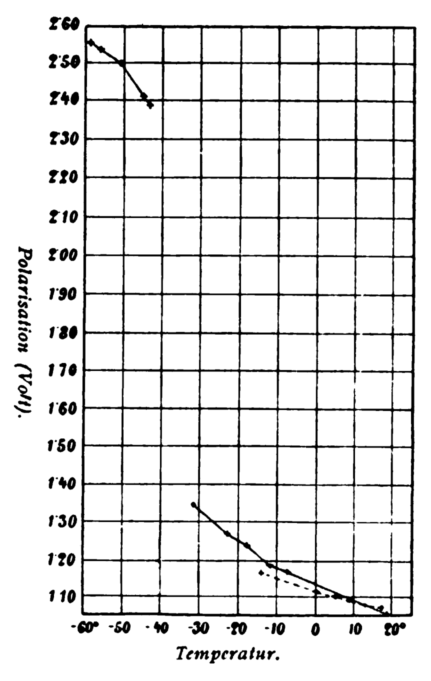


Fig. 11. Salpetersäure concentrirt.

2. Salpetersäure von 24 % (spec. Gewicht 1·1268) ergab folgende Werthe:

c	*n*	*t*	*p*
5·02	687	− 2°	1·73
5·02	615	+ 4°	1·54
5·06	550	13°	1·38
5·06	509	22°	1·29

3. Salpetersäure von 14·4 % (spec. Gewicht 1·0765):

e	n	t	p
4·99	984	19°	2·46
5·02	1000	14°	2·51
5·00	1022	3°	2·56
5·00	1035	— 4°	2·59
5·00	1041	— 6°	2·60
5·10	1042	—16°	2·66

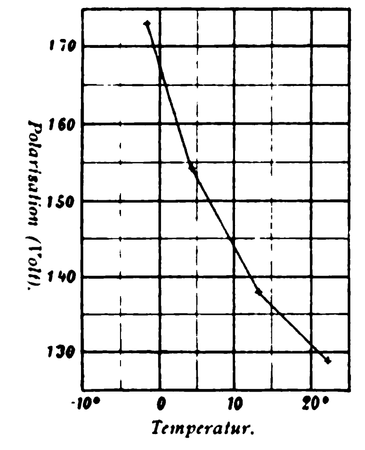


Fig. 12. Salpetersäure 24 %.

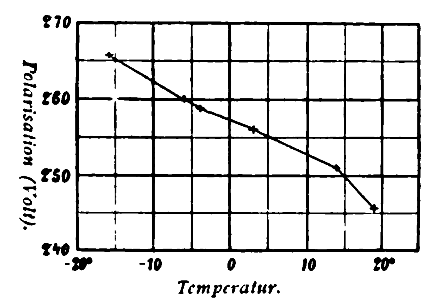


Fig. 13. Salpetersäure 14·4 %.

Bei abnehmender Concentration werden die Polarisationswerthe grösser wie bei der Salzsäure, jedoch ist die Zunahme viel bedeutender als bei dieser.

Dagegen verhalten sich die Temperaturcoëfficienten nicht so regelmässig wie bei der Salzsäure. Für p_0, α und β ergeben sich folgende Werthe:

	p_0	α	β
HNO_3 conc.	1·13	—0·00354	0·000099
24 %	1·64	—0·0251	0·00043
14·4 %	2·57	—0·00491	0·000046

α hat für die 24 $^0/_0$ ige Säure einen grösseren Werth als für die concentrirte, aber auch einen grösseren als für die weniger concentrirte 14·4 $^0/_0$ ige Säure.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Polarisation wächst bei Abkühlung bei allen drei hier untersuchten Säuren. Bei Schwefelsäure nimmt die Polarisation mit wachsender Concentration zu, bei Salzsäure und Salpetersäure ab.

Bei Schwefelsäure und Salzsäure wachsen die Temperaturcoëfficienten mit abnehmender Concentration. Bei der Salpetersäure dagegen verhält er sich unregelmässig.

Bei Vergleichung der für Wollaston'sche Spitzen und für grössere Elektroden in Schwefelsäure von gleicher Concentration gefundenen Werthe mit den Resultaten von F. Exner ergibt sich eine Abhängigkeit des Temperaturcoëfficienten von der Grösse der Elektroden, und zwar eine Zunahme desselben bei Verkleinerung der Elektroden.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. F. Exner, unter dessen Anleitung die vorliegende Arbeit entstanden ist, für die freundliche Unterstützung, die er mir bei derselben angedeihen liess, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

—

CV. BAND. VII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XVII. SITZUNG VOM 2. JULI 1896.

Erschienen: Monatshefte für Chemie, Bd. 17, Heft IV (April 1896).

Herr Prof. P. Lenard in Aachen dankt für die ihm von der kaiserl. Akademie zuerkannte Hälfte des A. Freiherr v. Baumgartner'schen Preises.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. A. Lampa: »Über die Brechungsexponenten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen«.

Ferner übersendet Herr Prof. Exner eine gleichfalls in seinem Institute ausgeführte Arbeit des Herrn A. Hauke: »Über die Refractionsäquivalente der Elemente.«

Das c. M. Herr Prof. H. Molisch in Prag übersendet eine Abhandlung von Dr. J. Stoklasa: »Über die Verbreitung und physiologische Bedeutung des Lecithins in der Pflanze«.

Das c. M. Herr Prof. W. Wirtinger in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: »Über eine Eigenschaft des Potentials bei Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Wiesner überreicht eine unter Mitwirkung der Herren Dr. Figdor, Dr. Krasser und Dr. Linsbauer ausgeführte Untersuchung über das photochemische Klima von Wien, Buitenzorg und Cairo.

Das w. M. Herr Prof. Friedr. Brauer macht die Mittheilung, dass es ihm im Vereine mit Herrn Assistenten Anton Handlirsch durch die freundliche Mitwirkung des Herrn Alois Kraus, Inspector der kaiserl. Menagerie zu Schönbrunn, gelungen ist, den bisher nur im Larvenzustande bekannten Oestriden des indischen Elephanten (*Cobboldia elephantis* Cob.) zur Verwandlung zu bringen.

Das w. M. Prof. H. Weidel überreicht drei Arbeiten aus dem I. chem. Laboratorium der k. k. Universität in Wien:

1. »Studien über die Phtaleïne« von J. Herzig und H. Meyer.
2. »Über das γ-Acetacetylchinolin« von H. Weidel.
3. »Über das α-Acetacetylpyridyl« von C. Micko.

Der Vorsitzende legte das erste, aus sechs Tafeln und einem begleitenden Text bestehende Heft des photographischen Atlas des Mondes vor, dessen Herausgabe die Pariser Sternwarte unternommen hat.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Koelliker A., Handbuch der Gewebelehre des Menschen. (Sechste umgearbeitete Auflage.) II. Bd., II. Heft. Nervensystem des Menschen und der Thiere. (Mit Textfiguren Nr. 549—845, nebst Titel und Inhalt zum II. Band.) Leipzig, 1896; 8°.

Loewy M. und Puiseux J., Atlas photographique de la Lune. Publié par l'Observatoire de Paris. Premier fascicule (comprenant Introduction et 6 Planches). Paris, 1896; gr. Folio.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(III. Mittheilung)

von

Prof. **Franz Exner,** c. M. k. Akad., und **E. Haschek.**

(Mit 5 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juni 1896.)

Wir geben im Folgenden die Nachtragsmessungen zu den letzten fünf Elementen der I. Mittheilung,[1] d. i. Mo, Pt, Pd, Ir, Rh. Die Aufnahmen und die objective Ausmessung der Spectren wurde ebenso durchgeführt, wie wir in der II. Mittheilung,[2] auf die wir diesbezüglich verweisen, angegeben haben.

In die Tabellen sind alle Linien aufgenommen, die bei der ersten Messung in Folge der Mangelhaftigkeit des damals verwendeten Gitters entweder gar nicht erschienen, oder so unscharf, dass die gemessene Wellenlänge mit der Neumessung nicht übereinstimmt; im letzteren Falle ist der Neumessung die alte Zahl in Klammern beigefügt. Dagegen wurden alle Linien, welche in beiden Messungen übereinstimmend gefunden wurden, in den folgenden Tabellen weggelassen. Es folgt daraus, dass diese nur eine Ergänzung der Tabellen unserer I. Mittheilung bilden, so zwar, dass alle Linien der letzteren, welche sich im Folgenden nicht in Klammern der Neumessung beigesetzt finden, ihre Giltigkeit behalten.

Linien, welche einer verunreinigenden Beimischung der untersuchten Substanz angehören, haben wir, soweit es thunlich war, identificirt, die betreffenden Zahlen jedoch in den

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV (1895).

[2] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV (1896).

Tabellen unter Beifügung des betreffenden chemischen Symbols belassen, um auf diese Weise eine Beurtheilung der Reinheit der untersuchten Substanz zu ermöglichen. Die Luftlinien jedoch, die sich selbstverständlich in allen Spectren finden, haben wir als den Substanzen nicht angehörig aus den Tabellen gestrichen. In keinem der bisher untersuchten Elemente fehlte das Calcium, in den wenigsten derselben das Eisen; letzteres findet sich in beträchtlicher Menge ausser im Mangan auch in den Metallen der Platingruppe. Die Elemente dieser Gruppe sind ausserdem wechselweise stark verunreinigt.

Bezüglich der Bezeichnungen in den Tabellen wäre noch Folgendes zu bemerken: Die Intensitäten sind von 1—6 gezählt (1 = grösste Intensität), ein + bedeutet, dass die Linie verwaschen, br., dass sie breit ist, wobei bei besonders unscharfen die Breite in AE. angeführt ist; d. bedeutet doppelt, u. umgekehrt.

Molybdän (Nachtrag).

(Taf. I.)

Das Molybdän liefert in dem von uns gemessenen Bereich eines der linienreichsten Spectren. Es hat zwischen $\lambda = 5060 \cdot 0$ und $\lambda = 2214 \cdot 3$ 2872 Linien. Dabei scheint dasselbe nur sehr wenig verunreinigt; soweit eine Controlle bis jetzt möglich ist, nur spurenweise mit Wo und Ca. Es muss bemerkt werden, dass die Neumessung des Molybdäns erst bei $\lambda = 4707 \cdot 3$ beginnt, daher die ältere Messung, die bis $\lambda = 5060$ reicht, in diesem Intervall nicht mehr controlirt werden konnte. Die Linien sind scharf, doch, wie bei den meisten linienreichen Spectren, ohne auffallende Intensitätsunterschiede oder besonders charakteristische Gruppen.

λ	i	λ	i	λ	i
4707·3	3 (07·2)	83·8	6+ (83·6)	60·8	6
4699·1	6+br. (98·7)	81·8	6+	59·9	6 Wo
90·9	6 (90·6)	62·9	5 (62·7)	57·7	6
89·4	6	61·7	6	53·2	6 (53·0)

λ	i	λ	i	λ	i
4652·5	6 (53·0)	4517·2	4 (17·4)	4404·3	6+
38·1	6 (37·8)	12·3	5 (12·5)	03·5	6
36·1	6 (35·8)	08·8	6+	02·8	6
34·4	6	06·1	5 (06·3)	01·4	6
27·9	6 (27·5)	4494·7	6+	4399·4	6
26·7	5 (26·2)	94·2	6+	96·9	5 (97·1)
23·8	6 (24·2)	91·9	6	93·8	6
23·1	6 (23·3)	91·6	4 (91·7)	92·2	6 (92·5)
20·6	6+	89·6	6	91·1	6
19·5	6+	89·2	6 (89·4)	89·7	6
18·1	6+ br. (17·8)	75·9	6 (76·1)	85·8	6 } (85·1)
13·4	6 } (13·1)	74·9	3 (74·9)	84·9	6 }
12·9	6+ }	73·5	5 (73·8)	84·4	6
11·4	6+	72·0	6	83·4	6
10·8	6+	65·6	6	82·6	6
10·1	4	57·7	3 (57·5)	81·7	3 (81·8)
09·1	6+	56·3	6+ (56·8)	80·7	6 } (80·6)
04·6	6+ (4·3)	52·9	5+	80·4	5 }
4598·5	6	46·7	6	79·7	6
93·7	6	45·7	6+	77·9	3 (77·8)
87·5	6+	44·4	6+ (44·6)	76·9	6 (77·1)
86·8	6	43·3	5 (43·5)	75·1	5 (75·3)
84·5	6+	42·4	5 (42·6)	74·2	6
76·8	5 } (76·6)	41·1	6	73·4	6
76·2	6+ }	39·2	6	72·2	6 (72·5)
75·6	6 (75·8)	35·2	3 (35·1)	69·2	5 (69·4)
70·2	6 (70·5)	34·5	6	66·7	6+
69·2	6 (69·5)	33·7	3 (33·5)	64·6	6+
67·9	6 (68·1)	26·9	5 (27·1)	63·7	3 (63·8)
64·9	6+ (65·2)	23·9	5 (24·1)	62·1	6 (62·3)
60·1	6	23·2	6+	59·8	6 (60·1)
58·9	6	22·4	6+	56·1	6 (56·5)
49·5	6+ br. (49·7)	21·0	6+	55·4	6 (55·6)
46·4	6+ br.	13·1	5	53·4	6 (53·7)
41·0	6+ (41·3)	12·5	5 } (12·3)	51·6	6+
37·1	4 (37·2)	11·9	3 }	50·4	5 (50·8)
35·6	6	10·2	6	44·9	6 (45·1)
35·1	6	09·7	6	41·6	5 (41·8)
21·2	6+ (21·5)	07·1	6	40·9	6 (41·2)
18·6	6+ (18·9)	06·2	6+	40·0	6 (40·3)

λ	i	λ	i	λ	i
4339·4	6 (39·1)	4287·2	6 (87·4)	4226·9	5 Ca (27·1)
38·8	6	85·9	6	25·1	6+ (25·4)
34·9	6	82·0	6	24·1	6+-
33·4	6	81·4	6	23·1	6 (22·9)
32·7	6	80·7	6 (80·4)	22·6	6
29·9	6 (30·1)	80·2	6	21·1	6+-
29·6	6	79·2	3 (79·0)	19·6	6 (19·4)
27·1	5 (26·8)	77·5	3	19·2	6
26·3	4 (26·1)	77·2	3 (77·1)	14·6	6 (14·4)
26·1	6	76·4	6	14·2	6
25·6	6	75·8	6	12·9	6
24·7	6+	74·6	5 (74·8)	11·1	6 (11·4)
23·6	6	72·0	6	09·8	3 (09·5)
22·6	6 (22·4)	66·8	6	04·9	6
22·2	6	65·2	6	02·3	6+-
22·0	6	64·8	6	01·5	6+-
18·7	6 (18·4)	63·6	6+	00·7	6
18·1	5	62·6	6+	4199·1	6 (98·9)
17·4	6 (17·6)	61·6	6	90·1	6
15·4	6 (15·7)	61·1	6	86·4	6
13·7	6+	60·8	6	85·9	4
13·0	6	59·5	6+-	84·4	6
12·6	6 (12·2)	58·9	6+-	81·2	6+- (80·9)
11·8	4	58·0	6+-	80·2	6+-
11·2	4 (11·4)	55·2	5	78·5	6
10·6	6	54·6	6 (54·9)	75·5	6+-
08·9	6	53·6	6+-	74·3	6+-
04·2	6 (4·4)	52·6	6	72·6	6
02·8	6 (2·4)	52·1	5 (51·9)	72·0	5
02·2	6 Wo (1·9)	46·7	6 (46·4)	70·0	6
01·5	6	46·2	5	69·2	6
00·9	6+	40·4	6 (40·4)	68·7	6
4299·4	6	40·3	6	66·5	6
99·2	6	39·2	6+-	65·6	6
98·2	6+	38·5	6+-	64·4	6
97·7	6+	38·2	6+-	63·0	5 (62·6)
96·8	6	35·1	6	61·5	5 (61·1)
93·4	4 (93·6)	33·6	6	58·2	6+-
91·4	6	32·7	4	57·6	5 (57·3)
89·9	6	27·3	5 (27·1)	57·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
4155·8	6	4103·1	6	4033·6	6+ (33·9)
55·5	5 (55·3)	02·8	6 Wo	32·5	6+
54·5	6	00·4	6 (00·2)	31·4	6+
52·2	6 (51·9)	4098·9	6	30·9	6+
51·0	6+ (50·6)	97·0	6 (96·7)	28·7	6+
49·2	5 (48·7)	95·7	6	27·7	6+
47·1	5 } (46·7)	94·5	6	27·0	6+
46·3	5 }	91·1	6+br. (90·9)	26·0	6+
43·9	3 (43·4)	88·9	6+ br.	25·6	6
41·6	5 (41·3)	87·3	6	23·6	6 (23·8)
40·0	5 } (39·6)	86·2	6	20·5	6
38·8	6+ }	84·5	4 (84·4)	17·8	6
38·0	6+ (38·4)	81·7	4 } (81·3)	17·3	6
37·0	6+ (36·6)	81·3	6 }	16·1	6+
35·7	6+ (35·4)	77·9	6	15·2	6
33·1	6+	76·3	6	14·4	6
32·4	6	75·7	6	11·9	6+
32·2	6 (31·9)	75·5	6	08·0	6
31·1	6+	67·9	6	06·8	6
30·4	6+	67·2	6+	06·5	6
29·0	6	64·8	6	06·0	6
28·2	6	64·6	6	05·0	6 (05·2)
27·5	6+	63·8	6 (63·6)	3998·4	6
26·7	6	62·3	4 (62·0)	94·0	6
26·5	6	59·8	6 (59·6)	93·1	6
24·8	6 (24·4)	58·7	6	91·8	6
20·3	4 }	56·4	6	91·4	6
19·9	4 } (19·7)	50·2	6	89·9	6
19·1	5 }	49·8	6	89·5	6+
18·7	6	47·6	6+	86·1	4 (86·2)
16·9	6	46·9	6 } (47·1)	82·6	6+
16·1	6 (15·9)	46·8	6 }	81·6	6
15·2	6 } (14·9)	45·6	6	80·8	6
14·6	6+ }	43·7	6	73·0	6+
14·2	6+	42·9	6	71·5	6+
10·4	6+	41·2	6+ 3 AE.	71·1	6+
08·9	6	38·9	6	68·6	2 Ca (68·4)
08·2	6	38·2	6	67·9	6
05·7	6	36·6	6	66·3	6
03·5	6	35·7	6 (35·4)	65·8	6

λ	i		λ	i		λ	i	
3964·1	6	(64·4)	3905·5	6		3858·4	6	
63·6	6		03·0	1	(02·9)	56·7	6+	
60·1	6+-		01·9	5		56·1	6+	
58·5	6		3897·9	6	(98·2)	55·0	6	
58·1	6		96·5	6		54·8	6	
55·6	6		94·1	6		53·4	6	
54·0	6		94·0	6		52·8	6	
51·0	6	(51·2)	93·5	6		51·6	6	
47·4	6		92·4	6	(92·2)	49·9	6	(50·1)
47·1	6	(47·1)	92·0	6		46·1	6	
47·0	6		91·4	6		43·2	6	
45·3	6		91·2	6		42·1	6+-	
43·6	6		90·0	6		41·1	6	
43·1	5		89·0	6		40·0	6+	
41·5	3	(41·4)	88·1	6		39·7	6	
38·7	6		87·8	6		39·1	6	
37·6	6+-		87·1	6		38·8	6	
36·8	6		86·9	5	(86·7)	35·1	6	
36·1	6		86·4	6		34·7	6	
35·1	6		85·7	6+-		34·3	6	
31·4	6		83 8	6		33·9	5	
30·4	6		83·4	6		32·5	5	(32 5)
28·8	6		83·0	6	(82·6)	32·3	5	
27·7	6		82·4	5		32·1	6	
26·4	6+-		81·5	6		31·1	6	
25·9	5	(25·9)	80·1	6		31 0	6	
25·8	6		79·8	6		30·1	6	
23·7	6	(23·9)	70·1	6	(78·9)	30·0	6	
22·3	6		78·7	6		28·5	6	
21·0	6		76·9	6+-		28·4	6	
20·3	6+-		75·4	6+-		28·0	6	
17·6	6		74·4	6	(74·6)	27·3	6	
17·1	6		72·1	6	(71·9)	26·0	6	
16·5	6		71·6	5		25·5	6	
15·4	4	(15·3)	70·5	6+-		25·0	6	
11·1	6		68·0	6		24·6	6	
10·1	6	(09·9)	67·8	6		23·7	6	
09·5	6		62·7	6		23·1	6	(23·2)
06·8	6	(06·6)	60·0	6	(60·2)	23·0	6	
06·4	6		58·9	6		22·5	6	

λ	i	λ	i	λ	i
3822·0	6	3795·1	6 } (94·8)	3761·0	6
21·8	6	94·5	6 }	60·9	6
21·1	6 } (21·1)	92·3	6 (92·5)	60·3	6 d.
21·0	6 }	92·1	6	59·5	6
20·0	6	91·5	6	58·7	5
19·3	6	90·5	6+	57·0	6 } (56·8)
19·2	6	88·4	5	56·5	6 }
18·7	6	88·0	6	55·6	4
18·4	6	87·4	6	55·4	6 } (55·1)
18·1	6	85·7	6	54·9	5 }
17·5	6	85·3	6	54·0	6
17·2	6	82·2	4 } (82·0)	53·9	6
16·7	6	81·8	5 }	52·3	6
15·9	6	81·4	6	51·7	6+
15·3	6 } (15·4)	81·1	6	50·4	6
15·2	6 }	81·0	6	48·6	5
14·6	6	78·1	6	47·6	6
12·5	6	77·0	6	47·3	6
12·3	5 } (12·2)	76·8	6	47·2	6
12·0	6 }	76·3	6	46·0	6
11·5	6	75·8	6	45·6	6
11·0	6	74·8	6	45·5	6
10·2	6	73·9	6	45·0	6
09·9	6	73·1	5 (72·9)	44·5	4 } (44·3)
09·3	6	72·2	5 } (72·0)	43·9	6 }
08·8	6	71·7	6 }	43·5	6
07·8	6+br. (07·6)	70·7	5 } (70·5)	43·1	6
07·1	6	70·2	6 }	42·4	3 } (42·0)
06·9	6 (06·6)	69·3	6	41·9	6 }
05·5	6+	68·0	5 } (67·7)	41·0	6+
02·5	6	67·4	6 }	37·2	5 (37·0)
02·2	6	66·5	6	36·5	5
01·3	6	65·9	6	36·1	6
01·1	6	65·3	6	35·8	6
00·4	6+	64·7	6	34·4	6
3797·4	6	64·2	6	33·5	6
97·2	6	64·1	6	33·1	6
96·7	5	63·1	6	30·6	6 } (30·5)
96·2	6	62·4	5	30·1	6 }
95·4	6	61·4	6	29·1	6

λ	i		λ	i		λ	i	
3728·5	6	(28·5)	3702·5	2	(02·3)	3670·6	4	(70·5)
28·4	6		02·1	6		70·0	6	
27·8	5		01·4	6		69·5	5	(69·3)
26·6	6		01·1	6		68·5	6	
25·7	5	(25·5)	00·0	5+	(99·8)	68·4	6	
25·1	6		3698·7	6	(98·5)	68·1	6	
24·5	6		97·8	6		67·8	6	
23·9	6		97·5	6		67·5	6	
23·6	6		97·1	6	(96·9)	67·0	6	
23·1	6		95·1	5	(94·8)	65·8	6+	
22·6	6		94·6	6		65·0	5	(64·7)
22·4	6		92·7	3	(92·6)	64·5	6	
22·1	6		92·2	6		64·1	6	
20·4	5		91·7	6		63·8	6	
19·9	5	(19·8)	90·7	6		63·4	6	
19·7	6		90·0	6		62·3	6	
19·1	5		89·0	6		61·1	6	(60·8)
18·5	6		87·6	5		59·6	5	
17·0	4	(16·9)	87·1	6		58·4	4	(58·3)
16·1	5	(15·8)	86·7	6		56·2	6	
15·7	5		86·1	6		55·9	6	(55·6)
15·3	6		85·8	6		55·1	6	
14·6	6		85·2	6		54·4	6	
14·0	5	(13·8)	84·3	4	(84·1)	53·9	6	
13·5	6		82·7	6		53·7	6	(53·5)
13·1	6		80·6	4	(80·5)	52·5	3	(52·3)
12·0	6		80·4	6		51·3	3	(51·0)
11·8	6		80·1	6		50·2	5	
11·6	6		79·4	6		49·6	6	
10·6	6		79·2	6		48·0	6	
10·3	6		78·8	6		47·1	6	
09·6	6		78·1	6		47·0	6	
08·6	6	(08·3)	77·9	6	(77·7)	46·3	6+	(Wo)
08·0	6		76·4	6	(76·0)	45·9	6	
07·7	5		75·5	6	(75·3)	43·7	5	
07·2	6		73·9	6+	(72·7)	43·1	6	(43·3)
06·1	6+		72·1	6+		42·5	6	(42·0)
05·6	6		71·9	5		41·6	6	
05·5	6		70·9	6		41·2	6	Wo
04·2	5	(03·8)	70·7	6		40·8	6	

λ	i		λ	i		λ	i	
3639·9	5	} (39·3)	3609·7	6		3580·7	6	
38·5	6		09·4	6		77·5	6	
38·3	6		09·1	6		77·0	6	
37·9	6		08·8	6		76·2	6	
37·7	6	(37·5)	08·5	6	(08·1)	75·7	6	(75·5)
36·8	6	(36·1)	07·0	5		74·5	6	
35·4	5		06·9	5	(06·6)	74·1	6	
35·2	1	} (35·0)	05·5	6		72·5	5	(72·3) Wo
34·5	6		05·2	6		71·3	6	
33·5	5		04·8	6		70·7	5	
31·6	6		04·1	6		70·1	6	(70·3)
29·5	6	} (29·0)	03·8	6		69·6	6	
28·8	6		03·7	6		69·1	6	
28·6	6	(28·3)	03·3	6		68·7	6	
27·5	5	(27·1)	03·1	5	} (02·8)	68·1	6+	
26·4	5	(26·0)	02·5	6+		67·1	6	
25·8	5	(25·3)	02·0	6		66·8	6	
24·7	5	} (24·2)	01·8	6		66·3	6	
23·9	5		01·5	6		65·4	6	
23·4	5	} (23·6)	01·0	6+		64·5	6	
23·1	5		00·4	6	} (00·3)	64·3	6	
22·6	6+		00·0	6		63·9	6	
20·4	6+	} (20·0)	3599·0	5	(98·8)	63·2	5	(63·0)
19·6	6+		95·6	6	(95·8)	62·1	6	
19·0	6		95·4	6		61·9	6	
18·6	5	(18·2)	94·0	6		61·3	5	(61·1)
17·7	5	} (17·3)	93·2	6		60·0	6	
17·0	6		92·6	6		59·7	5	} (59·6)
16·9	6		92·0	6		59·2	6	
16·2	6		91·7	5		58·8	6	
15·9	6		90·8	5		58·6	6	
15·3	6		90·1	5		58·1	5	(57·9)
14·9	5		89·0	6		57·0	5	(56·8)
14·4	4	} (14·0)	88·1	6		55·5	6	
13·8	6		85·9	5		54·2	6	
13·6	6	Wo	85·6	4	(85·7)	53·2	6	
12·4	6		84·2	6		52·5	6	
12·1	4	} (11·8)	83·1	6		52·1	6	
11·2	6		82·7	6		51·5	6+	
10·7	6		81·3	6		51·0	6	(50·8)

λ	i	λ	i	λ	i
3549·1	6	3511·8	6+-	3471·0	5
48·8	6	10·2	6	69·7	6
48·0	5 } (47·8)	10·0	6	69·3	5 (69·1)
47·5	6 }	09·3	6	68·5	6
47·1	6	08·5	6	68·3	6
43·8	6+-	07·3	6	68·0	5 (67·8)
42·4	5	05·4	5 (05·2)	67·0	6
41·1	6+-	04·5	5 (04·3)	66·3	6
40·4	6+- } (40·3)	02·7	6	65·9	6
40·1	6+- }	01·0	6	65·0	6+-
39·6	6+-	00·0	5 (99·8)	64·5	6+-
38·9	6+-	3498·4	6	63·9	6
36·5	6	98·1	6	63·7	6
35·2	6	97 1	6	63·3	5 (63·0)
33·1	5 } 32·8)	96·8	6	62·2	5 (62·0)
32·5	6+- }	95·1	6+-	60·9	5
31·5	6	94·3	6	60·3	6 (60·6)
30·9	6	93·4	6 } (93·1)	58·2	6
29·8	6	92·9	6 }	57·7	6
29·5	5	92·0	6	57·5	6
28·8	6	91·3	6+- (91·5)	56·5	5
28·0	5 (27·8)	90·6	6	55·9	6
26·6	6	90·4	6	55·5	6
26·4	6	89·5	6	55·2	6
26·0	6 (25·8)	88·7	6	54·3	6
24·9	6	88·2	5	53·5	6
24·6	3 (24 5)	85·9	6	53·0	5
24·0	6	85·8	5 (85·6)	50·9	6
22·5	6	83·9	6	50·0	6
22·2	5 (22·0)	82·8	6	49·1	5 (48·9)
21·6	5 (21·3)	81·8	6	48·6	5 } (48·4)
20·2	5 } (20·1)	81·1	6+-	48·1	6 }
19·8	6 }	80·2	6	45·5	5 } (45·5)
18·6	6	77·6	6+-	45·4	6 }
18·3	5 (18·1)	76·8	6	45·2	6
16·7	6	75·6	6	44·4	6+-
15·8	5 } (15·6)	75·1	5	44·0	6+-
15·1	5 }	74·1	6+-	42·7	6
13·8	6	73·3	6+- (73·0)	42·0	6
13·1	6	71·7	6	41·5	5

λ	i	λ	i	λ	i
3440·7	6	3413·5	6	3369·5	6
40·6	6	13·0	6	68·0	4 (67·8)
40·2	6+	12·4	6	66·3	6
39·9	6	12·1	6	65·5	6
39·6	6	08·7	5	65·2	6
39·1	6+ } (39·0)	07·6	5	63·9	5
38·9	5	06·0	5	62·6	6
38·0	6+	05·2	6	58·5	6
36·7	6	04·3	5	58·1	6
35·5	4 } (35·0)	01·6	6	55·6	6+
34·8	5	01·3	6	51·9	6
34·6	6	00·3	6	51·0	6
34·1	6	3399·2	6	50·7	6
33·4	6	98·3	5	49·5	6
30·7	6	97·9	6	48·0	6+
30·4	6+	97·0	6	47·3	5 (47·5)
29·6	6	96·8	6	47·1	6 } (46·6)
28·1	6	95·5	5 } (95·3)	46·4	4
27·6	6	95·0	6	46·1	5
27·1	5 } (27·0)	93·8	6	42·6	5 Wo (42·8)
26·9	6	93·3	6	41·9	5
26·0	6	92·0	4 (91·9)	41·7	6
25·6	6	90·3	6	41·3	6
25·3	6	88·9	6+	40·6	6 } (40·5)
24·9	6	88·0	6 } (87·8)	40·2	6
24·3	6 (24·1)	87·3	6	38·3	6+ br.
22·3	5	87·2	6	37·1	6+
21·3	5	86·4	6	36·5	6
20·1	5 (19·8)	82·7	5	36·1	6
19·0	5 } (18·8)	82·0	6	35·5	6 } (35·3)
18·5	5	80·5	4	35·1	5
18·4	6	79·9	4 (80·0)	33·9	6
18·1	6	78·7	6	32·5	5 (32·7)
17·8	6	78·4	6	30·9	6
17·6	6	75·7	6	30·3	5
17·1	6	75·3	6	28·6	6
16·7	6	75·0	6	28·1	6 } (27·5)
15·7	6	72·8	6	27·3	5
15·4	6	70·1	6	25·7	5
13·8	6	69·8	6	24·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
3322·1	5 (22·3)	3283·6	6	3242·1	6 } (41·8)
20·9	3 (21·1)	83·1	4 (82·8)	41·5	6 }
19·6	6+ br.	81·2	5 (81·0)	40·8	4 (40·6)
18·2	6	80·3	6	37·0	6
17·5	6	79·9	6	36·3	6+
16·8	6	79·3	6	35·4	5
16·3	6	79·0	4 (78·9)	34·6	6
14·5	6	78·2	5	34·3	6
13·6	4 (13·8)	77·2	6+	33·8	5
10·8	6	76·3	4 (76·2)	33·3	5 } (33·0)
10·1	6	74·8	5 } (74·6)	32·7	6+ }
09·4	6	74·3	6+ }	31·0	5 } (30·8)
09·0	6	71·1	5	30·6	6 }
08·3	6	70·3	6+	30·1	6
07·0	5 (07·2)	69·2	5 (68·9)	28·8	6
05·8	6	66·3	6+	27·5	6
05·5	5 } (05·4)	65·2	5	27·3	6
05·2	6 }	64·7	6+	25·8	6
04·5	6 } (04·4)	64·1	6	25·3	6
04·3	6 }	63·3	6+	24·7	5 } (24·5)
04·0	6	62·7	6	23·9	6 }
02·4	6+	62·5	6	23·6	6
01·0	6+	60·6	6	22·4	6
3299·5	6 (99·3)	59·8	6+	21·4	6
98·8	6 (98·4)	59·1	6	21·0	6
96·4	5	59·0	6	20·7	6
95·7	6	58·3	6	20·2	6
95·4	6+	53·8	4 } (53·6)	19·0	6
94·9	6	52·8	6 }	18·5	5+ (18·3)
93·7	6	51·7	6	16·9	6
93·0	6	51·4	6	15·2	5
92·4	3 (92·6)	50·1	5+	12·6	6
90·0	6	49·3	6	11·7	6+
89·2	5 (88·9)	47·7	5	10·5	5+ (10·7)
88·0	5	47·4	6	07·4	6+
86·7	6	46·3	6	06·8	6
86·4	6	46·0	6	06·3	6
85·6	6	45·4	6	05·6	6
85·5	6	44·7	6	05·3	6
85·2	6	42·5	6	03·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
3203·4	6	3168·4	6	3137·3	6
02·8	6	67·9	6	37·1	6
02·1	6+	66·2	6+	36·5	4 (36·6)
3198·9	6	65·6	6	35·9	6
97·5	6	64·6	6	35·7	6
97·2	6	64·0	5 } (63·9)	34·8	6
96·5	6	63·7	6 }	34·4	5
95·2	5	63·4	6	33·8	6
94·9	6	62·7	5 } (62·4)	31·3	6
93·1	6 (93·4)	61·8	6 }	30·5	6
92·8	6	58·9	5 } (58·4)	28·6	5
91·5	6	58·2	5 }	26·8	5
90·8	5+	57·3	5 } (57·0)	26·0	5
88·4	6	56·9	5 }	25·7	5
88·1	6	56·0	5	24·9	6
85·6	6	55·2	6	24·0	5 } (23·6)
85·1	5	54·7	6	23·3	5 }
84·6	6	54·0	6	21·2	5
84·0	6	52·8	4 (52·9)	20·4	6
82·9	4	52·3	6	19·9	6 } (19·6)
82·5	6	51·7	4 (51·5)	19·4	5 }
82·0	6	50·6	6	18·8	6
80·9	5	50·3	6	18·3	6+
79·9	6	49·0	6	17·6	6 } (17·5)
79·0	6	48·5	5+ } (48·2)	17·4	6 }
78·6	6	48·0	5 }	14·2	6 } (13·7)
77·2	6	47·4	5	13·5	5 }
76·7	6 } (76·4)	46·1	6 } (45·9)	12·9	6+
76·3	4 }	45·7	5 }	12·1	6 } (11·9)
75·7	6	45·3	6	11·7	5 }
75·2	4 } (74·9)	44·5	6	11·1	6 } (10·9)
74·3	5 }	44·1	6	10·7	4 }
73·7	5	41·8	4 } (41·6)	08·9	5 (09·2)
72·3	5 } (72·1)	41·3	4 }	06·9	5
72·0	5 }	40·8	6	06·6	6
71·4	6	40·3	6	06·3	5
70·3	5+ } (70·1)	39·9	6	05·7	6
69·9	5 }	39·3	6 } (38·9)	05·4	6
69·7	6+	38·7	4 }	04·7	6
68·7	6	38·4	5	04·3	6 (03·7)

λ	i		λ	i		λ	i	
3103·4	5	(03·7)	3080·0	5+	(80·2)	3054·8	6	
02·7	6		78·7	5		52·3	5	(52·4)
02·2	6		78·1	5	(77·9)	51·3	6	
01·9	6		77·7	3		50·2	6	
01·1	5		76·6	6		49·7	6	
01·0	6		76·3	6		49·2	6	
00·6	5		75·3	6		48·0	5	
00·1	5		74·3	5		47·4	6	
3098·6	5	(98·4)	73·4	6		46·8	6	
98·2	6		73·0	6		46·4	5	(45·9)
97·3	6		72·5	6+		45·7	5	
97·0	6		72·0	6		44·8	6+	
96·6	5		71·5	5+	(71·2)	44·0	5	
95·8	6		71·0	6		43·0	6	
95·3	6		70·1	6		42·1	5	
95·0	6		70·0	6		41·8	5	(41·4)
94·3	6		69·0	6		41·2	5	
93·8	6		68·9	6		39·9	6	
93·5	6		68·6	6		38·8	6	
92·2	4	(92·1)	68·1	6		37·5	6	
91·6	6		67·3	6		37·1	6	
90·8	6		66·7	6		36·3	6	
90·6	6		66·4	6		35·5	6	
89·9	6+		65·9	6		35·4	6	
89·7	6		65·7	6		34·3	6	
89·2	6		65·2	5	(64·9)	33·9	6	
88·8	6		64·7	6		32·0	6	(31·5)
88·2	6		64·4	5		30·8	6	
87·7	3	(87·8)	63·9	6		30·3	5	
86·6	6		63·5	6		30·0	6	
86·3	6	(85·9)	61·6	6		29·9	6	
85·7	5		61·3	6		29·2	6	
85·0	6		60·1	5		28·3	6	
84·5	5		59·2	6		27·7	6+	
84·3	6		58·7	5		26·8	5	
83·3	5		56·9	6		25·0	6	
83·0	6	(82·5)	56·7	6		24·9	6	
82·3	4		55·7	6		23·3	4	(23·4)
81·7	5		55·6	6		22·8	5	
80·5	5	(80·2)	55·3	6		21·7	4	(21·9)

λ	i	λ	i	λ	i
3020·8	5	2996·3	5	2974·3	6
19·8	6	95·6	6	74·0	6
19·1	6 } (18·7)	95·4	6	72·6	4 (72·9)
18·5	4 }	95·0	6	71·8	4 (72·4)
17·4	5	94·8	6	71·1	5
16·9	5	93·9	6	70·4	6
16·3	6	93·6	5 } (93·2)	69·3	5 } (69·0)
16·0	6	92·9	5 }	68·7	5 }
15·4	5	92·8	5	68·5	6
14·7	6	92·3	5	67·8	6 } (67·2)
13·4	6	91·7	6+	67·0	5 }
12·8	6	91·1	6	66·7	6 (66·4)
12·0	5	90·8	6	65·3	5
11·0	5	90·3	6 } (90·1)	65·1	6
10·0	6	89·9	5 }	64·5	6
09·8	6	89·5	6	63·0	6
09·5	6	88·8	6	61·4	5 (61·7)
08·8	6	88·6	5 } (88·2)	61·2	6
07·8	6	88·0	5 }	60·3	5
07·4	5	87·0	5 } (86·4)	58·7	6
07·0	6	86·2	5 }	58·1	6
06·8	6	86·0	6+	57·7	6
05·5	5	85·2	6	56·0	5
05·1	6 } (04·7)	84·9	6	55·2	5
04·5	4 }	83·6	5	54·5	6 } (54·2)
04·0	6	82·7	6	53·9	5 }
03·8	5	82·4	6	53·7	6
03·3	6	82·0	6	52·8	5
02·8	6	81·5	6	52·0	5+
01·9	6	81·2	6	51·6	6
01·5	6	80·8	6	50·9	6
00·9	6 } (00·6)	80·5	6 } (80·2)	50·1	6
00·4	4 }	79·8	5 }	49·4	6
2999·8	5	79·6	6	48·9	6
98·9	6	78·7	5 (78·9)	48·8	6
98·3	6	77·8	5 (78·2)	48·2	6
97·7	6	77·0	5 (77·2)	47·3	5
97·3	5	76·0	6	46·7	6 } (46·4)
97·2	6	75·4	4	46·1	4 }
96·7	6	74·8	6	44·1	6 (43·7)

λ	i		λ	i		λ	i	
2943·4	5	(43·7)	2907·2	5	(07·1)	2869·8	6	(69·6)
42·7	6		06·0	5	(05·7)	69·3	6	
42·6	6		05·4	6		69·0	6	
42·4	6		05·3	6		68·5	5	
41·9	6	(41·5)	05·0	6		67·8	6+	
41·3	4		04·5	6		65·7	6	
40·8	6		04·3	6		65·4	6	
39·3	6	(38·6)	03·2	3	(02·9)	64·9	6	
38·3	4+		02·0	5	(01·8)	64·6	6	
37·8	6+		01·0	5		64·0	4	(63·7)
36·9	5	(36·8)	2899·2	5		63·4	5	
35·2	5		98·7	5	(98·5)	62·0	6	
33·2	6	(32·5)	97·8	5		60·9	6	
32·2	5		96·9	6		60·0	5	
31·6	6		95·1	6		58·2	6	
30·5	4	(30·6)	95·0	6		57·3	6	
30·1	5		93·9	6		57·1	6	
29·5	6		93·0	4	(92·8)	56·1	5	
28·5	5		92·3	6		54·8	6	
27·6	5	(27·7)	91·4	5		54·2	6	
23·4	4	(23·6)	91·2	4		53·7	5	(53·5)
22·8	5		89·7	6+		53·3	3	
22·2	6		88·8	6		51·3	6	
22·0	6		87·2	5	(87·0)	49·8	6	
21·5	6		86·2	6		49·4	6	
19·3	5		84·9	6		48·3	2	(48·5)
18·9	4	(18·7)	84·3	6		46·7	6	
17·9	6		84·1	6		46·3	6	
17·2	5	(17·0)	83·4	6		45·0	6	(44·7)
16·5	6		83·2	6		44·5	6+	
16·0	5		82·6	5		44·0	6	
15·4	6		81·7	6		43·4	6	
14·9	6		81·6	5		42·7	5	
14·3	5		80·0	5		42·0	5	
13·3	6+		77·0	5		40·7	6	
12·5	6		75·8	6+		40·2	6	
10·9	6		73·8	6		38·6	6	
09·9	6		71·7	3	(71·6)	38·4	6	
08·2	6		71·0	6+		38·0	6	
08·0	6		70·0	6+		37·4	6	

λ	i		λ	i		λ	i	
2836·5	6		2801·4	5	(01·2)	2741·6	5	
35·0	5	(34·7)	01·0	6		40·2	6+-	
34·5	5		00·6	5		39·5	6	
34·0	6		2799·2	5	(99·0)	36·5	6	
33·5	6		97·2	5+		35·9	6	
32·8	5		94·8	6		35·0	6	
32·3	5		93·2	6		34·0	6	
30·7	6		89·0	6+-		33·2	5	
30·1	6		87·9	6		32·8	4	(32·9)
29·0	6		87·5	6		31·5	6	
27·9	4	(27·7)	85·9	6		30·8	6	
27·3	6		85·1	4	(85·0)	30·2	5	(30·0)
26·1	6		84·2	5+-		29·8	5	
25·9	6		83·3	6		28·8	5	(28·3)
25·4	6		81·5	6	(81·2)	26·0	6	
25·2	6		80·2	3	(80·0)	25·1	6+-	
24·3	6		79·4	5		24·0	5	(24·2)
24·0	6		78·4	6		23·3	6	
23·4	5		75·4	3	(75·5)	21·8	6	
22·4	6		73·8	5+-		21·2	6	
22·1	6		68·8	6+-		20·2	6	
20·2	5+-		67·0	6		19·8	6+-	
17·6	5	(17·7)	66·1	6		18·1	6+-	
14·8	5		64·5	6		17·3	4	(17·2)
14·2	6		63·8	5		15·5	6+-	(15·7)
13·7	6		62·9	5		14·5	6	
13·3	6		60·7	5	(60·5)	13·0	6	(12·5)
11·2	5+-	(10·7)	60·0	6		12·3	5	
10·5	5+-		59·6	6		11·5	5	(11·3)
09·0	6		59·2	6		10·9	5	
08·7	6		55·5	6		09·8	5	
08·5	6		54·7	6+-		08·6	6	
07·8	3	(07·7)	51·6	6		07·8	6	
07·2	5		49·3	6	(48·8)	07·0	6	
06·3	5		48·5	6		04·2	6	
05·1	6		47·7	6		03·0	6	(02·7)
04·6	6		47·1	6		02·4	6	
04·2	6		47·0	6	(46·4)	01·8	6	(01·5)
04·0	6		46·2	4		01·3	4	
03·3	6		43·1	5		00·6	6	

λ	i	λ	i	λ	i
2698·3	6	2663·9	6 (64·2)	2629·7	6
97·8	6	63·1	6	29·3	6
97·3	6	62·7	6	28·8	6
95·9	6	61·9	6	28·4	6
93·2	5	61·2	6	28·0	6
93·0	6	59·7	6+	27·2	6
92·7	5	59·3	6	26·2	5
91·8	5+	59·0	6	25·5	6
91·1	6	55·6	6	25·3	6
90·1	6	55·0	6	2624·8	6
89·7	6	53·8	6 } (53·4)	24·4	6
88·9	6	53·2	4 }	22·5	6
88·0	4 (87·9)	52·2	5+ br. } (51·9)	22·0	6
87·1	6	51·7	5 }	20·8	6
85·9	5 } (85·7)	51·0	6	20·1	6
85·2	6 }	50·7	6	19·8	6
82·5	6	49·5	6+ br.	18·0	6
81·5	4 (81·4)	48·1	6	17·6	6
80·6	6+	47·6	6	17·2	6
79·8	6	47·1	9	16·9	6
78·6	6	46·3	4 (46·5)	15·7	6
77·8	6	42·8	6 } (42·5)	15·5	6
77·1	5 } (76·7)	42·3	5 }	14·5	6
76·5	4 }	42·1	6	12·2	6
75·7	6	39·7	6 (39·9)	10·9	6
74·9	6	39·4	6	10·2	6
73·4	4 } (73·1)	38·7	4 (38 8)	09·4	5 } (09·2)
72·9	4 }	38·3	5+	09·0	5 }
72·0	4 (71·9)	37·1	6	08·5	6
71·1	5	35·4	6 (35·7)	07·9	6
70·1	5	35·1	6	07·4	6
69·7	5	34·7	6	07·2	6
69·3	5	34·0	6	06·7	5 (06·5)
68·2	6	33·1	6+	05·9	5
68·0	6	31·6	6	05·7	6 } (05·5)
67·5	5 } (67·2)	31·2	6	05·2	5 }
66·8	5 }	31·0	6 } (30·9)	04·7	6
66·4	6+	30·7	5 }	04·6	6
65·1	5	30·3	6	03·8	6
64·5	5 (64·2)	29·9	6	03·4	6

λ	i	λ	i	λ	i
2602·9	5	2564·9	6 } (64·6)	2531·0	6
02·0	5	64·4	5 }	30·9	6
01·6	6	63·6	6	29·9	5
01·2	6	63·3	6	28·5	6
00·9	6	62·7	6	26·8	6+
2599·6	6	60·7	6	26·5	6+
98·5	6	60·3	6+ } (60·0)	25·5	6
97·4	5	59·7	5 }	23·9	5+
96·7	6	58·9	5	23·3	5
95·3	4 (95·4)	58·2	6	22·8	5
93·4	4	57·9	6	22·0	6
92·8	6	57·4	5	21·3	6
91·8	5 (92·1)	56·5	6	19·8	6
91·0	6+	55·0	6+	19·3	6
89·8	6+	53·8	6+	19·2	6
88·9	5 (89·1)	53·2	6	18·7	5
88·0	6	52·6	6	17·7	6+ br.
87·2	5	52·4	6	15·7	6
85·2	6	52·2	6	14·1	6
84·0	6	52·0	6 } (51·2)	12·7	6
82·5	6+	50·8	5 }	12·5	6
81·2	6	49·1	6	12·2	6
80·5	6+	48·2	6+	11·3	6
79·5	5 } (79·2)	47·6	5	10·6	6
79·0	5 }	45·8	6	07·3	6
78·4	5	45·1	6	06·8	6
78·2	6 } (76·9)	44·3	5	05·8	6
76·7	5 }	43·6	6	04·6	6
75·9	6	41·5	6+	04·4	6
75·5	6	41·1	6	04·0	6
74·5	5 (74·7)	40·7	6	03·4	6
73·8	6	39·5	6 (39 7)	02·3	6
73·0	6+ } (72·5)	38·5	3 (38·6)	01·5	6
72·3	5 }	37·6	6 (37·8)	00·8	6+ (00·6)
71·4	5	36·9	6	2499·8	6
71·0	5+	36·8	6	99·4	6
67·6	6	35·5	6+	99·1	6
67·2	6+	35·0	6	98·3	6
65·7	6+	32·8	6	98·2	5 } (98·1)
65·2	6	31·5	6	98·0	5 }

λ	i	λ	i	λ	i
2497·5	5	2466·8	4	2419·0	5 (19·2)
97·2	6	66·2	6	18·7	6
96·6	6	63·8	6	17·4	6
96·3	6	63·4	6	16·2	6
95·6	6	62·7	5	15·7	6
94·8	6	62·1	5 } (61·8)	13·5	6
94·5	6	61·4	6	12·8	4
94·3	6	61·2	6	11·9	5
94·1	6	57·9	4 (58·1)	11·0	5
93·3	6	57·2	6	10·6	6
92·8	6	56·5	6	08·8	5+ (09·0)
91·8	5 } (91·6)	55·6	4 (55·8)	06·8	5
91·4	6	53·9	6	05·0	6
90·9	6	53·3	5	02·0	5
89·3	6	51·0	6	00·4	6
89·0	6	50·5	6	2396·0	6
88·3	6	49·9	6	95·2	6
87·2	6	47·2	6+	94·7	6
86·7	5+ } (86·5)	46·5	5+	93·6	6
86·3	6	44·9	6	92·7	5
84·9	5	43·3	5 (43·5)	91·9	5
84·3	6	41·2	6 } (40·6)	90·6	5
83·9	6	40·3	5	90·3	6
83·5	6	40·2	6 } (39·6)	90·0	6
83·2	6	39·3	5	89·1	5
82·7	5 } (82·5)	38·6	6 (38·8)	88·8	5
82·2	6	38·4	6 } (38·1)	88·2	6 (88·0)
80·4	6	37·8	4	83·5	6
79·5	5	36·1	4 (36·3)	81·7	6
78·5	6	33·0	6+	79·0	6+
78·2	6	30·4	6	78·1	6
78·0	6	30·2	6	77·3	4 (77·5)
77·8	4 (77·6)	28·9	5 (29·1)	75·0	6
76·2	6+	28·3	6	74·5	6
72·4	6	25·8	6+ (26·1)	74·0	6
72·0	6	25·2	6	73·1	5 (73·3)
69·0	5	24·3	6+	72·5	6
68·6	6	22·2	4 (22·4)	72·1	6
67·5	5	21·7	6	71·8	6 (71·4)
67·1	5	20·9	6	70·6	6

λ	i	λ	i	λ	i
2370·5	6	2338·2	6	2302·9	6 (03·1)
68·9	6 (68·3)	37·4	6 (37·6)	2298·3	5+ (98·5)
67·9	6+ } (67·5)	36·6	6+ (36·8)	96·6	6
67·2	5 }	34·9	6 (35·1)	91·8	6
66·3	4	34·4	6	91·0	6
63·9	6	34·3	6	90·1	6 } (89·5)
63·2	5	31·0	4 (31·2)	89·2	5 }
57·9	6	29·8	5	86·5	6
57·3	5	28·8	6+ } (28·3)	86·0	6
56·6	6	27·9	6+ }	80·8	5
48·8	6	25·6	4 (25·8)	76·4	5
48·2	6 } (48·0)	24·9	5 (25·1)	75·1	5
47·8	5 }	23·2	6+	73·2	6 (73·6)
47·6	6	22·4	6+	72·3	6
46·8	6	20·2	6 } (19·1)	57·2	5 (57·5)
44·3	6+ } (43·6)	18·0	5 }	49·2	6+ (49·6)
43·1	5 }	16·4	6	41·2	6 (41·5)
40·5	4 (40·6)	09·5	6	40·8	6
39·8	6	08·0	5+ (08·3)	39·4	5 (39·6)
39·0	6	06·5	5	31·0	6 (31·3)
38·5	6	04·3	5 (04·5)	14·3	6+ (14·5)

Platin (Nachtrag).

(Taf. II.)

Im Spectrum des Platins haben wir zwischen λ = 4640·8 und λ = 2130·7 1020 Linien ausser den Verunreinigungen angehörigen gemessen. Dieselben sind durchwegs scharf, und häufig treten feine Doppellinien auf. Als Verunreinigungen liessen sich vorläufig nachweisen: Fe, Rh stark, Ir, Pd, Ca schwach. Wir benützen jede Gelegenheit, die sich bietet, um ein Urtheil über die Genauigkeit unserer Messungen zu erlangen. Dazu können im vorliegenden Falle die durch Coincidenz mit Linien des Vergleichsspectrums als dem Eisen angehörig erkannten Linien herangezogen werden, indem wir die von Kayser und Runge oder Rowland gegebenen Wellenlängen

als richtig annehmen. Es wurden so im Platin 44 Eisenlinien verglichen, wobei sich der Fehler der einzelnen Messung zu 0·06 AE. ergab; die grösste Abweichung, die zweimal vorkam, war 0·2 AE. Dabei müssen wir bemerken, dass wir, da unsere Messungen nur auf Zehntel gehen, auch die Angaben von Kayser und Runge, respective Rowland auf Zehntel-AE. abkürzten. Nachdem wir das Platinspectrum schon gemessen hatten, erschien eine Tafel der Platinlinien von Rowland,[1] die sich auf das Bogenspectrum bezieht und sich dem Intervalle nach mit einem Theil unserer Messungen deckt. Ein Vergleich ergab 78 Linien, die unzweifelhaft dem Bogen- und Funkenspectrums gemeinsam sind. Die Abweichung der einzelnen Messung zwischen unseren Zahlen und denen Rowland's betrug im Mittel 0·04 AE., wobei keine Abweichung grösser als 0·1 AE. vorkam. Es ist diese Genauigkeit in unseren Messungen umso bemerkenswerther, als jedes Spectrum nur einmal durchgemessen wurde. Auch sieht man hieraus, dass die Messung der stärkeren Platinlinien mit grösserer Genauigkeit erfolgte, als die der eingelagerten immer nur ganz schwachen ($i = 6$) Eisenlinien, was für die Beurtheilung der Genauigkeitsangaben bei den folgenden Elementen nicht ohne Wichtigkeit ist. Wir glauben aus diesen Angaben folgern zu dürfen, dass die objective Methode der Ausmessung, deren wir uns bedienen, an Genauigkeit der subjectiven mit Comparator nicht nachsteht. Kommen doch selbst zwischen den genauen Messungen von Kayser und Runge (im Eisenspectrum) und jenen Rowland's bei sehr charakteristischen Linien Abweichungen bis zu 0·1 AE. vor. Anderseits sind die Vortheile der objectiven Methode ganz hervorragende, in erster Linie die Geschwindigkeit, mit welcher die Ausmessung durch directes Ablesen der Wellenlängen möglich wird, ferner die Leichtigkeit der Orientirung durch gleichzeitiges Überblicken eines grossen Theiles des Spectrums.

---

[1] Rowland, Astrophys. Journ. II, October 1895.

λ	i		λ	i		λ	i	
4640·8	6		4214·2	6		3961·7	6	
40·5	6		13·3	6		58·0	6	
4560·2	6	(60·0)	11·5	6	Rh	53·1	6+	
58·9	6		02·2	6		50·6	6+	
54·8	6		4194·5	6		31·0	6	
54·3	5		92·7	4	(92·5)	30·5	6	
52·6	4		70·5	6		27·1	6	
48·0	6	(48·2)	66·5	6	(66·2)	26·6	6	
46·3	6		64·9	4	(64·7)	25·6	4	(25·7)
23 2	6		59·0	6		20·5	6	Fe
11·3	6		35·5	6	Rh	10·6	6	
10·9	6		34·3	6		08·5	6	
05·0	6		33·2	5+		03·1	6	Fe
4493·4	6		32·3	6		02·6	6	Ir
92·7	6		29·7	6		02·3	6	
84·8	6		29·2	6	Rh	3898·9	4	
82·2	6		18·9	3		95·8	6	Fe
81·9	6		4090·5	6		95·5	6	
71·8	6		87·7	6		94·9	6	
58·9	6	(58·7)	78·1	6		94·4	6	Pd
57·2	6	(57·0)	72·2	5		92·0	6+	
53·3	6+		63·0	6		90·5	6+	
48·8	6		60·7	6+		89·2	6+	
45·7	6		51·2	6		87·5	6	
42·7	4		50·2	6		87·1	6	Fe
10 9	6		34·3	6		86·3	5	Fe
09·0	6+		24·0	6		85·3	6+	
4375·0	6	Rh	21·4	6		84·3	6+	
47·0	6		20·2	6	Ir	83·3	6+	
41·9	6		14·3	6		81·1	6+	
09·3	6	(09·5)	02·7	6		78·6	6	Fe
4294·3	6	Fe	3996·7	6		78·0	6	Fe
91·2	6	(91·0)	79·0	6+		75·8	4	
88·6	6	Rh	76·5	6		73·7	6+	
74·2	6	(74·0)	75·8	6		72·6	6	Fe
69·7	6+		72·0	6		65·7	6	Fe
60·1	6		71·3	6		63·3	6	
47·8	6+		69·3	6		60·0	5	Fe
22·7	6		68·5	3	Ca	59·4	6	Fe
21·2	6		66·4	3	(66·3)	56 6	6	Rh

λ	i	λ	i	λ	i
3856·5	6	3788·8	6	3699·2	6
54·8	6+	88·1	6 Fe	95·0	6
52·7	6	85·3	6+	91·0	6 Rh
50·0	6 Fe	76·7	6+	90·6	6
47·6	6+	75·0	6+	87·7	2 (87 9)
45·3	6	71·3	6+	82·5	6
43·8	6	70·3	6+	81·3	6 Rh
41·2	6 Fe	67·5	5	80·8	6
40·6	6 Fe	65·7	6 Fe	80·2	6
38·3	5	65·3	6 Rh	76·1	6
37·8	6+	64·1	5	75·2	5
35·2	6+	61·4	6+	74·3	3 (74·5)
34·3	5 Fe	54·8	6 (55·0)	72·2	3 (72·4)
34·0	6 Rh	49·0	6	68·6	6
33·1	6	48·5	5 Fe, Rh	68·3	6
32·3	5 Pd	47·4	6	66·5	6
29·5	6	46·2	6	62·0	6
28·6	6 Rh	45·9	5 Fe	54·9	6
28·0	6 Fe	43·8	6	54·2	6
27·2	6	40·6	6	53·5	6
26·1	5 Fe	39·4	6	53·2	6 Ir
24·7	6 Fe	38·7	6 Pd	52·5	6
22·4	6 Rh	37·4	4 Fe, Rh	51·8	6
20·6	5 Fe	35·9	6	48·1	5 Fe
18·9	3 (19·0)	35·5	6 Rh	39·0	3 (39·2)
15·3	5 (15·5)	35·1	4 Fe	37·3	5
13·1	6 Fe	33·5	6 Fe	36·7	6
06·0	6 (06·2)	32·2	6	36·5	6
05·6	6	31·6	6	31·7	5 Fe
03·3	6+	28·9	6	29·0	3 } (28·4)
02·6	6	28·3	6	28·3	2 }
00·3	5 Ir	25·6	6	26·7	6+ Rh
3799·5	6 Rh	22·9	5	22·7	6+
98·7	6 Fe	22·6	6	21·8	6
98·2	6	20·2	4 Fe	20·7	6+ (Rh)
97·7	6 Fe	16·8	6+	18·9	5 Fe
95·2	6 Fe	05·8	6 Fe	17·3	6
93·4	6 Rh	05·3	6	15·4	6
91·8	6+	01·2	5 Rh	14·9	6 Rh
89·8	6	00·4	6	12·5	6 Rh

λ	i	λ	i	λ	i
3611·0	5 (10·9)	3522·2	6	3428·0	4 (28·2)
08·9	5 Fe	21·4	6 Pd	26·9	5 (27·2)
08·0	6	19·7	6	25·7	6
06·8	6	18·6	6	24·8	6
05·9	6 Ir	17·0	6 Pd	22·1	6
02·9	6	13·7	5 (13·7)	21·2	6 Rh (20·9)
3597·3	5 (97·4) Rh	07·4	6 Rh	17·1	6 (17·4)
96·3	6 Rh	05·9	6 (05·7)	14·4	6
87·1	6	03·6	6+	09·3	6
85·8	6	3498·3	6	07·7	6
85·4	6	98·0	6	06·7	6
83·2	6	92·0	6+ br.	05·9	6
81·3	4 Fe	90·2	5	04·7	5 (04·9)
78·8	6	87·8	6	3397·0	6 Rh (97·2)
78·0	6	85·3	3 (85·5)	85·0	6
74·2	6	83·5	4 (83·7)	84·0	5 (84·2)
73·8	5 } Ir	82·4	6	83·1	6 Ag.
73·5	6 } (73·9)	81·3	5 Pd	74·2	6+
71·4	6	80·6	5 (80·4)	73·2	6 Pd
70·3	5 Fe, Rh	77·9	5 Rh (78·1)	68·7	6
68·5	6 (68·9)	76·9	5 (77·2)	67·2	6+
65·5	5 Fe	75·6	6 Fe	57·2	6
59·1	6	74·9	6	44·1	5 (44·2)
58·7	6	70·6	6 Rh	43·7	6
57·3	6	64·1	6 (64·4)	43·2	6
55·0	6	62·2	6 Rh	42·1	6
53·2	5	59·7	6	41·3	6
50·3	6+	57·2	6+ (Rh)	39·8	6
49·5	6 Rh	55·9	6	38·1	6
48·8	6	53·9	5	36·3	6+
48·5	5	49·0	6	34·1	6+
45·0	6	48·5	6	33·5	6
44·0	6 Rh	47·9	5 (48·1)	27·4	6
43·6	6	44·0	6 Fe	26·1	6
40·8	6	41·5	6	25·9	6
34·3	6+	41·1	6 Fe	23·9	5 (24·2)
31·8	6	40·7	5 Fe	23·2	6 Rh
28·1	5 Rh (28·1)	34·9	4 (35·2)	22·8	6
26·3	6+	33·5	6 Pd	21·6	6
23·7	6+	31·9	5 (32·1)	19·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
3318·6	6	3266·2	6	3212·4	6 (13·1)
17·3	6+	65·5	6	12·1	6 Ir
15·6	6 } (15·4)	64·2	6	04·2	3 (04·7)
15·2	4 }	63·9	6	03·1	6
12·6	5 (12·9)	62·1	6	02·6	6
12·1	6	61·8	5 (62·1)	01·9	6
11·5	6	61·3	6	01·0	4 (01·3)
10·2	6	59·8	5 (60·2)	3199·1	6+
08·0	6 (08·4)	58·7	6 Pd	98·0	5+ (98 2)
07·8	6	58·3	6	96·5	6
05·9	6	56·6	6	94·4	6
04·3	6	56·0	4 (56·4)	94 2	6
03·0	6	55·3	6	92·6	6
01·9	2 (02·4)	55·0	6	91·3	5 (91·7)
3297·0	6	54·5	6	89·2	6 } (88·7)
93·8	6	52·0	5 (52·4)	88·3	5 }
92·6	6	50·4	5 (50·9)	85·7	6
91·5	6	49·1	6	84·7	6
90·4	4 (90·7)	47·6	3 (48·0)	83·6	6+
88·6	5+	46·0	6	81·5	6+
87·8	6+	43·8	5 (44·2)	79·1	5 (79·6)
86·8	6	42·9	6 Pd	77·8	6
85·6	5	41·6	6	76·3	6+ br.
84·9	6	40·3	5 (40·1)	75·0	6
84·6	6	39·4	5	74 7	6
83·4	5 (83·9)	36·8	6	73·5	6
82·6	6	35·8	6+	70·3	6+ br.
82·0	5 (82·4)	33·5	4 (34·1)	69·1	6
80·9	5 Rh	30·4	4 (30·8)	68·4	6
79·9	6	29·4	6	67·5	6+
78·6	6	27·3	6	64·6	6+
77·5	6	25·5	6	60·1	6+ br.
74·0	3 (74·6)	24·1	6 (24·6)	59·1	4 (59·6)
73·1	6	23·7	6	56·7	4 (57·1)
72·1	6	22·6	6	55·8	6
70·8	6	20·9	5 (21·4)	49·5	6
69·3	6	19·7	6	48·6	6
68·5	5 (68·9)	18·9	6+	46·3	6+
67·1	6	16·5	6+	45·2	5 (45·5)
66·5	6	13·5	6+ (13·1)	44·3	5 (44·6)

λ	i	λ	i	λ	i
3142·0	5	3072·1	5 (72·3)	3007·7	6
39·5	4 (39·8)	70·3	6	06·0	6+
37·8	6	69·8	6	04·4	6+
37·3	6	67·9	6	03·6	6
35·1	6 (35·9)	64·8	2 (65·0)	03·3	6
33·5	5 (33·9) Ir	63·6	6	02·4	4 (02·3)
27·1	5 (27·5)	59·8	5 (60·0)	01·3	3 (01·3)
26·3	6+	59·2	6+	00·2	6
24·1	6+	58·5	6+	2999·2	5
22·8	6+	57·5	6+ d.	96·0	6
22·1	6+	56·1	5	93·3	6
21·3	6	55·5	5	91·8	6
21·0	6	54·9	6	90·0	6
19·9	5	49·6	6	87·1	6
19·0	6	49·2	6	85·6	6
18·1	6+	48·1	6	85·1	6
17·0	5	47·3	5	84·0	6
15·6	6+ br.	45·8	6	83·1	6
14·5	6+ br.	44·9	6	80·1	5
13·0	6+ br.	41·3	5	79·4	5
11·8	6+ br.	40·8	6	78·3	6
09·5	6	36·6	4 (36·7)	75·9	6+
08·7	6	34·5	6	75·1	6
08·2	6	33·6	6	73·9	5
04·8	6	31·4	4	73·4	6+
04·0	5	29·6	6	71·8	6+
02·4	6	28·2	6	68·9	6
01·1	5	26·5	6	67·1	6
00·1	4	25·3	5	64·8	6
3098·0	6	24·5	6	64·6	6
97·1	6	22·9	6	62·9	6
89·3	6	21·1	6	62·3	6
88·1	6	20·7	6	61·3	6
84·9	6	19·0	5	59·2	5
84·1	5 (84·3)	17·4	4	58·6	5 (58·8)
82·5	6	15·2	5+	57·6	6+
81·1	6	12·6	5	55·9	5
76·8	5	11·6	6+ d.?	55·0	6+
76·1	6	10·9	6	54·6	6+
74·3	6	08·1	6+	54·1	.6+

λ	i	λ	i	λ	i
2951·3	6	2875·2	4	2808·9	5 (09·3)
50·3	6	71·8	6+	08·7	6
49·3	6	70·4	6	07·1	6
47·6	6+	70·2	6	05·3	6+ d.?
47·0	6+	66·1	5	02·8	6
46·3	6	63·0	6	01·8	6
44·8	5	62·1	6	2799·7	6
43·2	6	59·5	6	97·8	5
39·4	6	58·5	5+ d.?	95·5	5
38·9	5	54·7	6 Pd	94·2	3 (94·5)
38·2	6+	53·1	5 (53·3)	93·7	5
37·3	6	52·3	6+	93·3	5
36·7	6	51·0	6+	91·8	6+
34·7	6	48·0	6	89·8	6
33·3	6	45·9	6 Rh	89·5	6
31·7	5	45·5	6	88·6	5 (89·0)
30·9	5	44·4	6	84·7	6
29·9	3 (30·1)	42·1	5	83·6	6
28·7	6	41·1	6 Pd	82·7	6
28·3	6	40·2	6 Ir	82·0	6 Rh
25·2	6	40·0	6	79·2	6
24·9	5	39·1	6 Ir	77·0	6 Pd
18·2	6	38·5	6	74·8	3 (75·1)
17·7	6	38·1	6	74·0	6
14·2	5	37·3	6	73·1	5
10·6	6	36·5	6	71·6	4 (72·0)
10·2	6 Rh	33·3	5 d. (Ir)	69·8	6
08·1	6	31·6	6	69·0	6
05·9	5 (06·1)	30·3	4 (30·5)	67·4	6
2897·2	6	28·9	6	66·6	6 Rh
95·7	6	27·8	6	64·2	6+
93·4	5	26·5	6	63 3	4 (63·5)
90·5	4	23·3	5	61·5	6
89 8	6	19·0	6	59·8	6
88·2	5 (88·5)	18·4	6	58·7	6
85·5	5	17·3	5+	57·5	5+
83·0	6	16·1	6	55·7	6
82·7	6	15·5	6	55 0	4 (55·2)
80·9	6	14·1	5 (14·3)	53·8	5 (54·1)
75·9	4 (76·1)	09·7	5	53·3	6

λ	i	λ	i	λ	i
2753·1	6	2701·2	6	2620·9	6
52·6	6	00·7	6 Rh	19·6	5+
52·0	6	2699·5	6	13·8	6+
51·4	6	98·5	4 (98·8)	12·7	6
50·0	6	97·3	6+	11·8	6
49·3	5	94·3	6	11·2	6
47·7	5 (47·9) Rh	94·1	6	08·8	6
47·0	6	92·3	5	08·0	6+
46·6	6	89 5	5	07·0	6+
45·4	6	83·8	6+ (Rh)	03·5	6
45·0	6	81·9	6	00·2	6+
43·5	6+ br.	80·2	6	2598·2	6
42·4	6	79·3	5 (79·6)	95·8	5 (96·1)
41·5	6+	77·3	5 (77·6)	95·3	6
40·5	6+	77·0	6	90·8	6
39·6	6	76·2	6	85·8	6
38·5	5	74·8	5 (75·3)	82·9	6
37·6	6 (37·8) Rh	72·8	6	80 9	5 Ag
35·8	5	68·8	6+	79·4	6
34·5	6	66·8	6	78·9	6
33·9	4 (34·2)	64·8	6	78·1	5
32·1	6+	62·0	6	77·0	6+
30·8	6 Rh	61·6	6	74·7	6
29·9	6 (30·3)	59·5	3 (60·0)	74·2	6
27·5	6	58·8	6 Pd	68·4	5
26·5	4 (26·8)	58·2	6	66·1	6
21·8	6	57·8	6	64·0	6
21·1	6	51·5	6 (51·3)	62·5	6
19·7	5	50·9	4	60·4	6
19·1	4 (19·4)	47·0	4 (47·3)	56·9	6
17·6	4 (18·0)	45·4	6	55·6	6
15·8	6	39·3	5	54·8	6
13·1	5 (13·5)	35·7	6	52·6	6
11·0	5	34·9	5	45·0	6+ (Cu)
08·0	6	31·2	6 d.	44·0	6
07·3	6	28·1	3 (28·4)	42·8	6
05·9	4 (06·3)	27·5	6	41·3	6
04·5	6	25·4	3 (25·6)	34·5	6
04·1	6	23·1	6+	33·0	6
02·5	3 (02·8)	21·5	6	31·9	6

λ	i	λ	i	λ	i
2526·0	6	2432·0	6	2340·2	6 } (39·9)
23·6	6	26·7	6	39·5	6 }
20·6	6 Rh	23·3	6	39·1	6
19·0	6+	22·6	6+	23·2	6
15·6	5 } (15·4)	18·1	5 } (18·1)	18·3	6
15·1	6 }	17·9	6 }	14·2	6
12·6	6	15·0	6+	13·7	6
12·0	6	13·3	6+	10·9	5 (11·1)
2498·6	5 Pd } (98·4)	12·1	6+	07·8	6
98·0	6 }	06·7	6	06·3	6
97·3	6+	05·0	6	05·8	6
95·9	4 (95·7)	01·1	6	04·6	6
93·1	6	00·4	6	04·3	6
92·6	6	2396·2	6	02·5	6
91·5	6	95·6	6	2297·5	6
90·8	6 Rh	90·8	6	96·1	5 (95·9)
90·1	5 } (89·9)	89·7	6	93·7	6
89·7	6 }	87·4	6	92·8	6 } (92·4)
88·9	4 (88·8)	83·7	6	92·0	6 }
82·1	4 } (81·9)	82·0	6 } (81·9)	91·7	6
81·3	6+ }	81·9	6 Ir }	89·6	6
80·6	6	81·4	6 d.	87·7	5
80·2	6	79·0	6	86·8	6
79·1	6	78·0	6 Rh	85·9	6
76·0	6	77·3	3 (77·0)	85·3	6
75·3	6	75·7	6	81·6	6 } (81·4)
72·0	6+	75·1	6	80·9	6 }
69·4	6+	74·8	6	71·9	6
62·5	6+	73·4	6	70·1	6+
61·1	6 Rh	73·0	6	69·1	6 } (68·9)
58·9	6+ Rh	71·7	6	68·5	6 }
55·2	6	68·1	6 Ir	67·5	6
51·0	6	66·6	6	64·3	6+
45·5	6	65·5	6	63·6	6 } (63·4)
44·5	6+	64·8	6	63·0	6 }
43·2	6	64·0	6	59·8	6
42·8	4 (42·5)	57·7	6	59·0	6
40·1	5 (39·9)	56·4	6 Rh	54·8	6
33·6	6 d.	51·5	6	53·3	6
32·9	6	42·8	6	51·6	5 (51·4)

λ	i	λ	i	λ	i
2250 7	6 (51·4)	2204·0	6	2149·8	6
29·1	6 (29·4)	02·0	6	48·9	6
10·0	6	2177·0	6	30·7	6
05·1	6	50·4	6		

Palladium (Nachtrag).

(Taf. III.)

Das Palladium zeigt zwischen λ = 4788·0 und λ = 2123·6 ausser den Verunreinigungen 1028 Linien, darunter zahlreiche starke. Als Verunreinigungen kommen vor Fe, Mn, Ca, Rh, Ir, Pt. Ein Vergleich der im Palladium gemessenen 69 Eisenlinien mit den Zahlen von Kayser und Runge ergibt im Mittel für die einzelne Messung einen Fehler von 0·05 AE. Die grösste Abweichung betrug 0·2 AE. und kam einmal vor.

λ	i	λ	i	λ	i
4788·0	6+	4473·5	3 (73·4)	4268·5	6+ br. (68·1)
68·4	6+	21·0	6+	64·0	6+ br.
55·5	6	09·0	6+	60·6	6 Fe
43·1	5	06·6	6 (06·8)	50·8	6 Fe
33·5	6	04·9	6 Fe	50·2	6 Fe
14·4	6	4386·5	6+	24·8	6
4671·1	5	83·7	5 Fe	02·2	6 Fe
36·9	6+	77·7	6+	4199·4	6
4598·5	6+	75·0	6 Rh	98·5	6 Fe
96·6	6+	44·9	6+	64·9	6
91·5	6+	15·0	6+	63·1	6+
53·0	6+ 2 AE.	08·1	5 Fe	41·0	6+
	(52·1)	4294·3	4 Fe	32·1	6 Fe
41·4	6	83·3	6+ br.	28·0	6+ br.
16·4	6+	81·8	6+	24·3	6+
4497·6	6+	71·9	5 Fe	18·9	6+
89·5	6+ (89·3)	71·3	6 Fe	13·7	6+

λ	i	λ	i	λ	i
4090·3	6	3913·6	6	3869·7	6+
87·4	2 (87·2)	13·2	6	67·9	6+
84·6	6+	12·8	6	67·3	6+
71·9	5 Fe	11·8	6	65·7	6 Fe
66·6	6+	11·2	6	63·7	6+
63·6	5	10·6	6	62·0	6+ br.
57·8	4	10·0	6	60·1	4 Fe
51·5	6	08·6	6	59·3	6 Fe?
46·0	5 Fe	06·8	6	56·5	5 Fe
39·5	6	06·5	6	52·7	6+
33·2	6 Mn	06·1	6	51·0	6+ br.
30·8	5 Mn	05·7	6	50·2	6 Fe
21·0	6+ 2 AE.	05·2	6	48·3	6+
20·0	6+ br. (Ir)	04·3	6+	47·6	6+
14·0	6+ br.	03·1	6 Fe	41·1	6 Fe
07·5	6+ br.	02·3	6+	40·5	6 Fe
05·3	6 Fe	00·8	6+	34·4	5
3982·3	6	3896·1	6	32·4	2 (32·6)
79·0	6+	95·8	6 Fe	31·3	6
74·0	6+	90·6	6+	28·0	5 Fe
71·5	6+	87·5	6	25·9	4 Fe
69·3	6	87·1	6	24·6	5 Fe
66·4	6	86·3	5 Fe	23·6	6
58·7	1 (58·8)	84·3	6+	23·2	6
44·2	6	83·3	6+	22·1	6
30·4	6 Fe	81·0	6	21·9	6
28·1	6	78·6	6 Fe	21·7	6
27·1	6	78·1	6 Fe	20·5	4 Fe
25·7	6+	75·6	6+ br.	18·7	6+ br. d.
24·5	6+	73·7	6+	18·3	6 Rh
23·1	6+	72·6	6 Fe	17·7	6+
20·3	6 Fe	72·0	6	16·3	6
14·3	6 [1]	71·5	6	15·9	4 Fe
13·8	6	70·0	6	15·2	6 Rh

[1] Macht den Eindruck einer cannelirten Bande zwischen 3914·3 und 3900·8. Dieselbe Bande nebst noch einer anderen mit der Kante bei 3578 kommt auch im Iridium und Rhodium vor. Die Natur dieser Banden ist zweifelhaft; vermuthlich gehören sie dem Stickstoff an. Auch treten sie nicht bei allen Aufnahmen dieser Spectren auf.

λ	i	λ	i	λ	i
3814·9	6	3743·5	6 Fe	3647·9	5
13·1	6	40·5	6+	46·0	6
10·1	6	38·8	3 (39·0)	44·8	6
09·9	6	37·3	4 Fe, Rh	43·2	6
07·9	6+ d.	34·9	4 Fe	42·9	6
06·8	6 Rh	33·5	6	34·7	1 (34·8)
05·4	6	27·7	5	31·5	5
02·6	5 (02·8)	25·2	6	28·2	6 Pt
01 2	6	22·7	5	26·5	6+ (Rh)
3798·7	6	20·1	4 Fe	23·8	6+
98·2	6	19·0	1 (19·2)	23·2	6+
97·4	6+	11·4	6	22·0	6+
95·1	5	10·9	6	21·5	6
93·3	6 Rh	08·0	6 Fe	18·9	5
91·8	6	05·7	6 Fe	13·7	6+
88·7	6+	01·1	6 Fe, Rh	09·6	1 (09·8)
87·9	6	00·7	6	06·8	6
85·3	6+	3692·4	5	05·5	6
83·6	6+	90·2	1 (90·3)	01·7	6
81·8	6+ br.	88·6	6	3598·7	6
79·0	5	88·1	6	97·4	6+ (Rh)
78·6	6	87·5	6	97·0	6
76·7	6	83·4	4	96·6	5 br. (Rh)
72·2	6+	82·7	6+	89·0	6+ br.
71·2	6+ br.	80·0	6	86·9	6 Fe
67·3	5 Fe	78·9	6	86·1	6 Fe
65·7	6	77·0	6+ br.	85·7	6 Fe
65·3	6 Rh	75·0	6+ Ir, Rh	85·2	6 Fe
63·9	4 Fe	74·0	6	84·5	6+
61·6	6	72·0	6	83·6	6 Rh
59·5	6	71·4	6	83·0	6 Rh
55·0	6	70·2	5	81·2	4 (80·9) Fe
54·2	6 Rh	66·3	6+ br. (Rh)	77·5	6
53·6	6+	65·0	6+ br.	75·0	6
52·5	6+	58·1	6 Rh	72·6	6
51·7	6+	54·3	6	71·2	2 (71·1)
51·0	6+	53·1	6 Ir	70·2	5 } Fe, Rh
48·3	5 Rh	51·5	6		} (66·9)
46·0	6	50·3	6+	66·6	5 }
45·7	5	49·8	6+	65·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
3561·7	6	3477·6	6+	3371·5	6 (72·8)
61·2	6	75·8	6	66·1	6
60·3	6	75·5	6	65·8	6
58·4	6	74·7	6	63·9	6
54·9	6	72·9	6+	62·2	6+ br.
53·0	1 (33·0) [1]	71·3	6+	61·4	6
46·4	6	71·0	6+	60·3	6+ br.
42·2	6+	70·5	6+ (Rh)	59·0	6+ br.
39·2	6+	69·5	6+	52·3	6+
38·3	6 Rh	60·7	1 (60·4)	51·2	6+
36·7	6+	57·7	6+	49·6	5
36·4	6+	51·3	4 (51·2)	49·2	6+
35·8	6+	49·6	6	46·9	5
35·5	6+	40·6	6 Rh	44·5	6+ br.
34·2	6+	34·9	6 Rh	41·9	6+ br.
28·7	5	33·5	1 (33·3)	40·7	6+ br.
28·1	6 Rh	19·7	6	38·0	6+ br.
27·3	6	18·1	6+	36·2	6+ br.
26·7	6	15·0	6	30·8	6
25·3	6	11·6	6	27·2	4 (27·1)
23·8	6	11·2	6	25·1	6+ br.
21·4	4 (21·4)	08·0	6	23·1	6
13·9	6	07·3	6	21·1	6
08·0	4 (08·0)	04·6	1 (04·4)	18·6	6+ br.
07·3	6 Rh	3397·6	6+	17·2	6+ br.
05·5	6+	97·0	5 Rh (96·7)	16·0	6+ br.
04·7	6+	95·3	6	11·7	6+
03·7	6	94·6	6	10·2	6+ (10·4)
02·5	6 Rh	93·0	6+	02·2	1 (01·9)
01·7	6	89·3	6+	3296·0	6+ br.
3499·5	6+	88·0	6+	94·0	6+
97·7	6	86·5	6+	92·8	6+
95·6	6+	85·7	6+	90·5	6+ br.
93·1	6+	83·9	6	87·3	4 (87·0)
90·5	6	83·0	5 (82·6)	86·0	6+ br.
88·7	6 Mn	81·0	5 (80·5)	84·6	6
83·0	6 Mn	76·3	6+ (76·0)	80·8	6 Rh
81·3	1 (81·1)	73·2	1 (72·8)	79·1	6+

[1] In Folge eines Druckfehlers statt 53·0.

λ	i	λ	i	λ	i
3278·5	6+	3175·1	5	3066·0	6+
77·2	6+	73·9	6	65·2	4 (65·3)
76·7	6+	72·0	6+ br.	64·6	5
75·3	6+	70·3	4 (70·2)	60·4	6
74·1	5	68·0	6+	59·3	4 (59·4)
72·7	5 (72·3)	64·2	6	57·3	6
69·7	6+	63·0	5	54·2	6+
67·4	3 (67·1)	62·1	4 (61·9)	52·1	4 (52·2)
62·5	5	57·0	6	50·0	5 (50·2)
51·7	2 (51·4)	56·5	6	47·7	6
49·7	6	55·6	4 (55·6)	47·1	6+ d.
43·2	5	54·3	6	46·5	6
38·7	6	53·4	6+ br.	46·0	6
36·7	6	50·2	6+	42·6	6
36·2	6	48·8	6+	41·6	5 (41·8)
34·7	6	47·9	6+	38·3	6+
32·5	6	45·0	6+	37·4	6
31·0	6	42·7	4 (42·8)	35·3	6+ (Rh)
29·3	6+	37·7	6+ br.	34·1	5
28·0	6	36·8	6+	32·2	3 (32·2)
26·5	6+ br.	31·5	6+ br.	30·0	6
23·7	6+ br.	29·8	6+ br.	28·0	3 (27·9)
22·2	6+ br.	28·2	6+	26·4	6+ br.
21·0	6+ br.	27·0	6+	25·9	6
19·1	6	25·8	6+ br.	22·7	6
16·5	6+ br.	22·7	6+	21·7	6
14·2	6+	13·9	2 (14·1)	21·0	6
13·5	6	11·5	6	20·6	6
10·5	4 } (10·3)	3095·2	6+ br.	19·7	6 } (19·4)
09·9	6 }	92·7	6	19·0	6+ }
09·5	6	88·0	6	15·0	6+
04·1	6	86·5	6+	14·0	6+ br.
03·7	6+ br.	82·2	6+ br.	09·6	5 (09·8)
02·7	6+ br.	78·6	6+	09·1	6
00·8	6	77·2	6+	08·0	6
3195·5	6+ 2 AE.	75·1	6	07·0	6
91·0	6+ br.	69·2	6	05·3	6+
85·0	6+ br.	69·0	6	04·9	6+ d.
79·5	6	67·8	6	02·6	4 (02·6)
78·9	5 (78·7)	67·3	6	01·6	6+

λ	i	λ	i	λ	i
3001·2	6	2935·2	5+ (35·0)	2863·5	5
01·0	6	33·2	6 Mn	62·7	6+
2997·9	5	31·5	6	61·8	6
94·4	6	31·2	6	59·4	6 (59·2)
93·7	6	29·9	5 Pt, Ir	54·7	2 (54·5)
89·7	6+	27·5	5 (27·2)	53·8	6+ d.
88·8	6+ (Rh)	25·6	5+ (25·4)	50·8	6+ (51·0)
85·5	6	22·7	4 } (22·5)	49·9	6
83·6	6+ d.	22·3	6 }	48·8	6
80·7	2 (80·7)	20·8	6+ br.	43·0	6+
77·7	6+ br.	19·5	6+	41·1	4 (41·1)
73·2	6	18·4	6	35·9	6
70·6	6+	17·5	6	33·2	5 Ir
70·3	6+	15·3	6+	31·7	6
67·0	6	13·6	6 Rh	30·4	6 Pt
66·3	6+	12·3	6+	29·6	6
65·3	6+	11·3	6+ br.	29·4	6
64·3	6+	07·5	6+ br.	26·7	6+ d.
62·9	6+	06·0	6	25·8	6+
60·7	6+	03·4	6	18·0	6
60·0	6+	02·0	6+ br.	14·2	5 (14·0)
59·7	6+	00·5	6+ br.	11·7	6
58·6	6+	2898·0	6	10·2	6+
57·5	6+	97·2	6+	08·6	6+
56·7	5 (56·5)	96·3	6+ (Rh)	06·5	6+
55·7	6+ br.	95·0	6+	05·4	6+
54·0	6	94·0	6	04·6	6+
53·5	6+	93·2	5 (93·0)	03·8	6+
52·5	6+	90·3	6	02·6	6
52·0	6+	90·1	6	02·1	6
50·3	6	89·7	6	01·6	6
49·6	6	89·1	6	01·1	6+
49·2	5 Mn	86·8	6	2799·5	6+
47·8	6+ br.	83·8	6+	98·7	6
46·7	6+ br.	81·6	6	98·4	6
45·2	6	80·7	6+	96·7	6
44·6	6	78·3	4+ (78·0)	95·6	6
43·5	6+	73·5	6	95·2	6
39·4	5 Mn, Ir	71·5	4+ (71·3)	94·8	6
37·0	6	70·5	6+	94·3	6

λ	i	λ	i	λ	i
2791·7	6+	2719·1	6	2645·8	6
83·8	6 Fe	17·7	6+	41·3	6+
79·4	6 Fe	16·9	6	40·7	6+
77·0	4 (76·9)	16·3	6 Fe	38·4	6
75·0	6	13·2	6+	37·7	6
72·0	6	12·5	6	36·5	6+
69·5	6	11·9	6	34·7	6+
69·2	6	10·5	6	33·3	6
67·7	6 Fe	08·7	6+	31·3	6
63·3	4 (63·2)	07·3	6	31·1	6 } (30·5)
62·1	6	07·1	6	30·3	6 d. }
60·7	6+	06·5	6	29·7	6+
55·8	4 Fe	06·0	6	28·9	6+
55·1	6	04·1	6	28·2	3 (28·3)
54·0	6	02·5	5	26·3	6+
53·3	6 Fe	01·7	6	25·5	6+ } (Rh)
50·8	6+	00·8	6+	24·6	6 } (25·0)
50·3	6+	00·6	6+	21·6	6+
49·5	4 Fe	2694·9	6	21·2	6+ } (20·8)
47·0	5 Fe	92·7	6	20·4	6+ }
46·5	5 Fe	92·4	6	18·8	6+ (19·2)
44·7	6+	91·5	6+	18·0	6
43·3	5 Fe	85·5	6 } (85·0)	17·5	6
40·8	6	84·8	5 Fe }	17·0	6
40·4	6	84·0	6	15·2	6+
39·6	5	83·4	6	13·8	6 Fe } (13·7)
38·8	6	81·0	6+ br.	13·4	5 }
37·0	6	79·2	6+	13·0	6+
35·7	6+	76·0	6	11·7	5
34·1	6	66·7	6 Fe	09·7	5
30·8	6	64·7	6 Fe	07·0	5
30·2	6	59·4	6	06·3	6
30·0	6	57·6	5 (57·8)	06·2	6
29·5	6	56·9	6+	05·5	6
27·7	6 Fe	55·7	6+	03·7	6
27·2	6+	54·0	6	03·5	6
26·3	6+	53·3	6	03·3	6 } (02·9)
25·0	6+ Fe	47·8	6	02·6	5 }
24·2	6	47·6	6	01·8	6+
21·0	6 Fe	46·9	6	00·9	6+

λ	i	λ	i	λ	i
2599·5	5 Fe	2546·6	6	2477·0	6 (77·2)
98·5	5 Fe	43·5	6	72·4	4 (72·6)
94·3	6+ (94·5)	43·1	6	69·3	4 (69·0)
93·7	6	38·8	6	67·7	6
93·0	6	36·8	6	63·3	6
91·6	6	34·6	4 (34·5)	58·8	6+ (Rh)
91·0	6+	33·6	6	57·8	4 } (57·4)
90·2	6	32·7	6+	57·3	4 }
88·7	6+	32·3	6+	55·5	6
86·0	6 Ir	30·5	6	54·7	5 (54·9)
83·9	4	29·6	6	53·0	6
82·6	5	27·4	6	51·5	6 } (51·3)
82·0	6	27·0	6	51·1	6+ }
79·1	6+	26·3	6	46·7	4 } (46·4)
78·5	6	24·2	6+	46·2	4 }
77·9	6	22·6	6+	43·7	6
76·4	5 (76·7)	21·5	6+	39·3	6
76·1	5 Mn	19·0	6+	38·7	6 (38·2)
75·5	5	18·2	6	36·5	5 (36·7)
74·3	6	16·1	6	34·8	6
72·8	6+	15·4	6	34·3	6
71·3	6	14·4	4 (14·5)	32·0	6
70·8	6	12·5	6+ d.	31·9	6 Rh
69·6	4 (69·7)	11·7	6	30·9	5 } (30·7)
68·1	6+	09·1	6 (09·4)	30·5	6 }
67·0	6	08·2	6	30·2	6
65·5	2	07·4	6	30·1	6
64·6	6	05·7	3 (06·2)	29·7	6
63·5	6	2498·7	3 (99·2)	29·3	6+
63·3	6	93·2	6	28·6	6+
62·6	6	91·8	6+	27·9	6
57·3	6	91·3	6+	27·7	6
54·1	6	88·8	2 (88·7)	26·2	6
52·5	6	88·4	6	25·8	6
51·8	2 (52·0)	87·1	6+	23·5	6
50·6	5	86·5	3 (86·4)	22·5	6
49·3	6	84·7	6	21·2	6
49·1	6	84·2	6	18·7	4 (19·0)
48·7	6	83·7	6	13·0	6
47·1	6	78·5	6	11·8	6+ (12·0)

λ	i	λ	i	λ	i
2411·5	6	2357·4	6	2282·6	6
06·7	4 (06·9)	55·7	6+ (55·9)	79·3	6+
05·3	6 Rh	55·2	6	75·5	6
04·8	6	54·2	6	75·0	6
03·3	6 } (02·4)	51·9	5 } (51·7)	73·0	6+
01·5	5+ }	51·4	5 }	72·0	6+
00·9	6+	50·8	6+	70·4	6 (70·2)
2399·2	6	48·7	6	67·6	6
98·0	6+ d.	48·2	6	67·1	6
96·5	6+ Rh (96·7)	47·6	6	62·7	5
95·5	5	44·4	6	61·3	6+
92·3	6 Rh	43·6	6	60·7	6
90·8	6+ (91·0)	41·0	6	59·6	6
88·6	6	39·7	6 (40·1)	59·2	6
88·3	4 (88·4)	34·8	6 Rh	58·7	6
86·5	6	34·6	6	52·8	6 (53·0)
85·8	6 } (85·4)	32·8	6	52·1	5 (52·4)
85·2	6 }	32·6	6	51·5	5
83·5	6 Rh (83·7)	28·6	6+	49·6	6
82·5	5 (82·7)	28·3	6	49·0	6
82·0	5	27·5	6	48·4	6
81·2	6	23·5	6+	48·1	6
81·0	6	21·8	5	47·1	6
79·4	6	18·1	6+	45·5	6
78·7	6	15·8	6 (16·0)	43·9	6
75·5	6	11·8	6	43·5	6
74·7	6	09·5	6	37·8	6
74·2	6	08·5	5 (08·7)	35·3	6
73·8	6	05·0	6	34·8	6
73·0	6	02·0	5 (02·2)	31·7	5 (31·5)
71·2	6 } (70·7)	2299·0	6	29·3	5 (29·1)
70·5	6 }	96·7	4 (96·5)	28·7	6
69·5	6	95·1	6+	22·4	6
68·0	4 (68·2) (Ir)	93·6	6	21·5	6
67·0	6 Rh	93·4	5	18·3	5
66·3	6	91·6	6	15·3	6
64·7	5 (65·0)	88·7	6+	14·1	5 (13·9)
61·5	6+	88·4	6+	12·2	5 (11·9)
61·0	6	85·4	6	10·8	6+
59·1	6 Rh	83·2	6	2197·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
2185·7	6+	2162·4	5	2148·2	6
84 7	6	49·3	5	44·5	5
82·4	6	48·4	6	23·6	6+

Iridium (Nachtrag).

(Taf. IV.)

Das Iridium ist linienreicher als die bisher gemessenen Metalle der Platingruppe. Wir fanden zwischen λ = 4696·0 und λ = 2151·7 in seinem Spectrum 2318 Linien. An Verunreinigungen finden sich Fe, Pt, Rh in grösserer Menge, Ca, Pd, Ni und Mn spurenweise. Auch hier haben wir wieder die Eisenlinien zur Genauigkeitsbestimmung verwendet; bei 58 derselben beträgt der Fehler derselben im Mittel 0·05 AE. Die grösste vorkommende Abweichung 0·1 AE.

λ	i	λ	i	λ	i
4696·0	6	4654·9	6+	4558·7	6
94·0	6	54·4	6+	58·0	6
92·7	6	50·7	6	54·7	6
83·8	6	40·3	6+	54·2	6
83·0	6	27·5	6+	52·5	6+
81·5	6	16·6	5 (16·8)	50·9	6
78·6	6	04·7	6	43·0	6
74·2	6+	4586·5	6+	42·4	6
73·4	6+	85·7	6+	39·3	6
72·0	6+	84·5	6+	38·7	6
71·4	6+	82·0	6	34·5	6+ br.
69·7	6+	79·5	6+	33·0	6
69·4	6+	70·1	6	15·3	6+
65·0	6+	68·2	5 (68·4)	14·4	6+
56·5	6	65·0	6+	12·0	6
55·9	6+	64 2	6	11·0	6+ br.
55·4	6+	61·0	6	09·0	6+

λ	i	λ	i	λ	i
4505·7	6+	4372·3	6 (72·0)	4259·2	5 (59·0)
05·1	6+	61·3	6	57·5	6
01·7	6+	60·9	6	49·0	6+
01·0	6+	60·2	6	47·5	6
4498·8	6+ Pt	59·6	6	47·2	6
96·1	6 } (95·7)	58·4	6+ d. (58·2)	27·6	6
95·4	5 }	55·8	6+ d.	25·5	6
92·3	6 } (91·7)	54·3	6+	22·2	6+
91·4	5 }	53·5	6	21·5	6
84·0	6+	48·1	6+	20·8	6 (21·0)
82·1	6	43·7	6+ br.	18·9	6
78·5	4 (78·7)	39·6	6+ br.	18·3	6 (18·1)
70·5	6+	30·0	6	17·8	6
67·4	6+ br.	28·8	6+ br.	15·2	6+
66·8	6	16·6	6	14·6	6
60·0	6 } (58·4)	14·0	6+	13·4	6
58·2	6 }	11·7	3 (11·5)	12·6	6
52·9	6	08·3	6	12·1	6
51·4	6	08·1	6 Fe (07·9)	11·2	6
50·9	6 } (50·4)	06·2	6 (06·0)	09·7	6
50·2	6 }	05·4	6	00·1	6 (99·9)
44·0	6+	01·8	4 (01·6)	4199·3	6+ Fe
43·1	6	00·9	6	98·7	6+ Fe, L.
42·7	6 Pt	4297·7	6	97·8	6 (97·6)
26·5	4	96·8	6+ Rh	95·8	6+ br.
22·0	6	95·8	6	93·0	6
21·3	6+ d.	88·7	6+ Rh	92·6	6 Pt
11·2	6 (11·5)	86·7	6 } (86·2)	83·4	5 (83·6)
10·5	6	86·0	6+ }	82·7	5 (82·8)
06·9	6	79·0	6	81·8	6+ (82·0)
05·0	6 Fe	74·8	6	66·9	6
01·4	6	71·9	6 Fe	65·3	6 (65·6)
4388·5	6	71·4	6 Fe	64·8	6 Pt
88·1	6	69·0	6	63 8	6
83·7	6 Fe	68·3	3 (68·1)	63·5	6
80·4	6	66·5	6+	62·3	6+
80·0	6	62·0	6	61·7	6+
76·6	6	61·3	6 (61·0)	61·1	6+
73 8	6+	60·6	6 Fe	58·2	6
73·0	6+	60·2	6	55·8	5 (56·1)

λ	i	λ	i	λ	i
4154·5	6+ Rh	4063·7	6 Fe	4005·6	6 } (05·3)
51·4	6	62·5	6	05·0	6 }
37·8	6	59·3	5	02·0	6 (01·8)
36·5	6+ br.	58·7	6	00·6	6+ br.
35·3	6 Rh	56·9	6 } (56·7)	3996·6	6
29·6	6	56·5	5 }	95·9	6
29·2	6	55·7	6+	92·2	3 (92·1)
29·0	6 Rh	55·4	6+	90·5	6
28·5	6	54·1	6+	89·2	6
28 0	6	53·2	6+	88·0	6
27·6	6	51·9	6	87·5	6
26·6	6	51·5	6+	85·0	6
26·2	6	51·0	6	84·5	6 Rh
23·2	6+	47·6	6	84·1	6
19·0	6 Pt	47·1	6	83·7	6
16·7	6	46·6	6	81·2	6+
16·4	6	46·0	5 Fe	80·0	6
15·8	4 (16·0)	45·2	6	79·6	6
08·4	6	44·0	6+	79·3	6
07·8	6	43·2	6+	78·9	6
4092·6	4 (92·8)	41·4	5	78·6	6
91·6	6+	32·2	6	78·3	6 } (77·8)
90·3	6+	31·6	6	77·0	6 }
89·6	6	31·0	6	75·8	6
86·0	6	30·5	6	75·5	6
82·6	6	29·4	6+	70·3	6
82·3	6	25·5	6	69·4	4 Fe (69·3)
81·5	6	22·1	6	67·6	6
80·6	6	16·6	6 (16·8)	66·5	6
78·2	6	15·7	6	65·0	6
75·7	6	15·3	6	64·5	6
72·4	5	13·8	6 (14·3)	63·0	6 (62·8)
71·8	6 Fe	11·6	6	60·6	6
70·7	5	11·3	6	58·4	6+ Rh
70·0	3	09·0	6	56·8	6
68·5	6	08·5	6	52·7	6
68·2	6	07·9	6	52·0	4 (52·1)
66·8	6+ br.	07 5	6	46·4	4 (46·4)
65·0	6	06·7	6	45·7	6
64·4	6	06·3	6	43·4	6

λ	i	λ	i	λ	i
3943·0	6 Rh	3902·7	2 (02·8)	3861·5	6
41·2	6	01·0	6	60·0	5 Fe
38·5	6+	00·0	6+	56·8	6
37·8	6+	3898·5	6+	56·7	4 (56·6)
36·6	6+	95·6	3 (95·7)	56·2	5
35·8	6+ Rh	94·8	6+	54·8	6+
34·3	6 Rh	94·0	6+	52·6	6+
34·0	5	93·0	6+	50·1	6+
32·3	6	92·2	6+	49·0	6
32·0	6	90·3	6	47·5	6
30·5	6 Fe	89·1	6	46·0	6
29·0	6 } (28·8)	88·6	6 Fe	44·7	6
28·6	6 }	87·5	6	42·2	6
28·1	6 Fe	87·1	6 Fe	41·8	6
26·1	6	86·4	6 Fe	41·1	6 Fe
25·5	6	86·0	6	40·5	6 Fe
24·6	6	85·5	6	39·6	6
24·1	6	84·3	6+	39·2	6
23·7	6	83·3	6+	37·7	5 (37·9)
23·2	6 Pt	81·0	6+	35·8	6
22·5	6+ Rh	79·6	6	35·2	6
21·1	6	78·7	6 Fe	34·3	6 Fe
20·5	6 Fe	78·2	6 Fe	32·4	6 Pd
18·3	6	78·0	6	31·9	6
15·6	3 } (15·4)	77·4	6+ Rh	29·8	6+ br.
15·1	6 }	75·7	6+ Pt	28·6	5 Rh (28·8)
14·5	6	75·0	6	28·0	6 Fe
14·0	6	73·7	4 } (73·3)	25·2	6+
13·4	6 [1]	73·3	4 }	20·0	6+
12·6	6+	72·6	6 Fe	19·2	6+
11·7	6	72·0	6	18·6	6
11·2	6	70·1	6 } Rh	18·2	6 Rh
10·6	6	69·5	5 } (69·7)	17·3	4 (17·2)
09·7	6	69·0	6+	16·5	6 Rh
06·9	6+	65·7	3 (65·6)	16·0	6 Fe
06·0	6	63·7	6+	15·2	6 Rh
04·3	6+ (04·1)	63·1	6+	14·7	6
03·0	6 Fe	62·2	4 (62·0)	13·8	6

[1] Cannelirte Bande von 3913—3900.

λ	i	λ	i	λ	i
3813·0	6	3756·0	6	3720·1	5 Fe
12·8	6	55·7	6	17·6	6
11·8	6	54·3	6+ Rh	15·8	6
10·5	6 } (10·5)	53·4	6 (53·6)	12·7	4 (12·6)
10·4	6 }	52·5	6	11·5	6
09·7	6	50·8	6 } (50·6)	08·8	6
06·0	6 Rh	50·5	5 }	06·7	6
04·6	6	48·2	6	05·8	6 } (05·6)
04·1	6	47·3	3 (47·5)	05·5	6 }
00·2	2 (00·1)	46·4	6	03·7	6
3799·4	4 (Pd)	46·0	6	03·5	6
99·1	4	45·6	5	01·2	4 (01·0)
98·2	6	45·2	6+	3698·7	6 Rh
94·1	4 }	44·6	6	96·6	6
93·9	4 } (93·9)	44·3	6 Rh	96·0	6
93·4	5 } Rh	43·6	6	95·6	6 Rh
92·3	6 Rh	43·4	6 } (43·0)	92·7	5 } (92·5)
91·6	5	42·8	5 }	92·3	3 }
89·6	6	42·4	6	90·7	5 (Rh)
88·0	6 Fe	41·8	6	90·2	6 Pd
87·4	6	38·6	4 (38·7)	89·4	3 (89·4)
86·2	6	37·2	5 (Rh)	88·2	6
81·5	6	35·4	6 Rh }	87·6	6 Fe, Pt
79·8	6	34·8	3 } (34·9)	84·4	4 (84·4)
79·2	6+	34·4	6 }	83·6	6
78·3	6 Rh	34·0	6	83·0	6
77·7	6	33·4	6	82·4	6
75·3	6 (75·5)	33·3	6	81·9	6
74·5	6	32·1	6 } (31·6)	81·6	6
74·0	6	31·3	3 }	81·2	6 Rh
70·4	6	30·6	6	79·5	6
70·2	6 Rh	28·1	5	78·3	6
67·3	6 Fe	27·4	6	77·1	6
66·6	6	27·0	5	76·7	6 (76·5)
66·3	6	25·6	4 (25·5)	75·0	2 (75·0)
65·1	6 Rh	22·9	5 } (22·7)	74·0	6
64·0	6 Fe	22·6	5 }	73·2	6
61·8	6	22·2	6	72·0	6
58·3	5 Fe	21·7	6	68·2	6
57·2	6	21·2	6	66·3	6 Rh

λ	i	λ	i	λ	i
3665·1	6	3627·9	6	3588·3	6+ d.
64·3	6	26·7	6 } (26·4)	87·3	6
63·5	6	26·4	4 }	87·1	6
63·3	6	25·8	5	86·3	6
61·4	5	25·4	6	85·8	6
60·6	6	24·7	6	85·3	6+
59·2	6	24·3	6	83·5	5 } (83·3)
58·7	6	22·0	6	83 2	5 }
57·6	6	21·7	6	81·4	5 Fe } (81·1)
55·0	6 Rh	20·7	6+ Rh	81·0	6 }
54·5	6+	19·9	6	78·2	6 [2]
54·0	6+	19·3	5	77·7	6
53·2	1 (53·2)	17·9	6	77·3	6
51·5	6+	17·3	4 (17·2)	76·3	6
50·3	6	16·4	6	75·9	6
47·8	5 (47·8)	15·6	6	75·6	6
47·0	6	14·8	6 Rh	75·2	6
44·0	6+	14·5	6	74·6	6
43·3	6+ Pt	09·0	6	73·8	2 (73·7)
43·0	6	07·3	6 d. (07·1)	73·1	6
40·7	6	05·9	1 (05·9)	72·9	6
39·7	6 Rh	04·9	6	72·5	6
38·8	6	04·5	6	72·1	6
38·3	6	03·8	6	71·9	6
38·1	6+	02·2	6	70 7	6
36·2	4 (36·4)	00·5	5	70·3	6 Fe, Rh } (70·0)
35·5	5 (35·7)	3599·8	6	70·0	6 }
35·0	6	95·6	6	69·5	6+
33·7	6	95·0	6	68·1	5 (67·9)
31·7	6 } Fe? [1]	94·5	4 } (94·4)	66·5	5 Ni (66·0)
31·5	6 }	94·3	6 }	65·4	6 Fe
30·8	6+	93·1	5	64·8	6 (65·0)
29·9	6 } (29·9)	92·2	6	63·0	6 (62·7)
29·8	6 }	91·9	6	61·3	6
29·3	6	91·3	6	60·5	6 d.
28·8	4 (28·7)	89·3	5	60·0	6
28·3	6 Pt	88·9	6+	59·8	6

[1] Nach Kayser und Runge eine unscharfe Fe-Linie auf 3631·6.

[2] Macht den Eindruck einer cannelirten Bande zwischen 3578 und 3570.

λ	i		λ	i		λ	i	
3558·6	6	Fe	3531·7	6		3490·9	6	
58·2	6	d.	31·5	6		90·5	6	
57·3	4	(57·2)	30·8	6		90·0	6	
56·6	6		28·7	6		89·6	6	Pd
55·9	6		28·2	4	(Rh)	89·2	6	
55·8	6		24·6	6+	Ni	88·2	6+	
55·1	6	Fe	24·0	6		87·6	6	
54·7	6		23·4	6	(23·2)	87·1	6	
53·9	6		22·2	4	(22·0)	86·7	6	
53·7	6		21·3	6	Pd	86·2	6	
53·0	6	Pd	20·3	6+		85·6	6	} (85·5)
52·7	6	} (52·2)	19·7	6		85·4	6	
52·2	5		18·6	6		83·6	6	Pt
51·4	6		17·0	6	Pd	83·2	6	
50·7	6		16·0	4	(15·9)	82·8	5	(82·5)
50·3	6		15·2	6	Ni (14·9)	80·7	6+	
49·6	6	Rh	12·3	5		79·9	6	
48·7	5		10·3	6		79·4	6	
47·2	6+		09·4	6		79·1	6	Rh
46·5	6		09·0	6		78·0	5	(77·7) Rh
46·2	6		08·4	6		76·7	5	} (76·5)
45·8	6		06·2	6		76·3	6	
45·2	6		05·2	6+		75·8	6	
44·7	6		04·3	6		75·1	5	Rh
44·2	6		03·0	6		74·5	6	
42·7	6		01·6	6+		73·6	6	
42·1	6		00·8	6		73·3	6	
41·6	6		00·5	6+		72·7	6	
40·8	6		3499·0	4	(99·0)	72·0	6	
39·5	6		98·3	6		70·8	5	Rh
38·7	6		97·8	6		70·2	6	
38·3	6	Rh	96·5	6+		68·7	6	Pd
37·6	6		96·0	6+		68·1	6	
37·2	6		95·5	6+		67·1	6	
36·9	6		94·8	5		66·2	6	
36·7	6		93·7	6		65·5	5	
36·4	6		93·2	6		62·3	5	Rh
35·0	6		92·3	6		61·8	6	
34·5	6		92·0	6		61·3	6	
34·3	6		91·3	6		60·5	6+	(Pd)

λ	i	λ	i	λ	i
3460·0	6+	3423·9	6	3385·0	6
58·8	5	22·0	6	83·9	6+
58·2	6 Rh	21·5	6	82·2	6
57·4	6+	20·2	6	81·6	6 } (81·4)
56·0	6	19·6	5	81·3	6
55·3	6 Rh	18·5	6+ Fe	80·0	6
55·1	6	17·9	6 Fe	79·5	6
52·1	6	17·5	6	78·5	6
51·7	6	16·3	6 } (16·0)	78·1	6
51·4	6 Pd	15·8	6	76·2	6
51·0	6	14·9	6	75·5	6+
50·3	6	13·4	6	74·6	6
49·2	4 } (48·9)	12·4	6 Rh	74·1	6 d.
48·8	6	11·7	6	72·7	5 (72·9)
48·0	6	10·3	6	72·4	6 Rh
46·8	6	10·2	6	71·5	5 (71·8)
45·5	6+	10·0	6	70·7	6 (71·2)
44·2	6	09·5	6 } (09·2)	68·5	4 (Rh) (68·8)
41·2	6 Fe, Pd	08·2	6	68·0	6
40·7	6 Fe, Rh	07·7	6+ Fe	67·0	6
39·0	6+	06·8	6+ Rh	66·6	6
38·2	6+	05·5	6	66·3	6
37·6	4	04·5	6+ Pd	65·6	6
37·2	3	03·6	6+ d.	64·4	6 (64·6)
35·0	4 (Pt) (35·2)	03·0	6	61·8	6
33·5	6 Pd } (33·4)	01·9	6	61·6	6
33·4	6	3399·9	6 Rh	61·2	6
32·3	6	98·3	6+	61·0	6 Rh
31·6	6	97·5	6	60·2	6+
31·1	6	96·3	6	59·7	6
30·0	6 } (29·7)	96·0	6 } (95·4)	58·3	6
29·1	6	95·2	5	58·2	6
28·6	6	92·7	5 (92·9)	55·9	6
27·7	6	91·5	6	55·5	6
27·3	6	91·1	6	53·7	6
26·8	6+	88·9	6	52·9	6
26·0	6+	87·8	6	52·3	6+
25·5	6 } (25·1)	86·4	6 } (86·2)	51·5	6+
24·9	6	85·7	6	50·0	5
24·5	6 Rh	85·3	6	48·1	6 (48·1)

λ	i	λ	i	λ	i
3348·0	6 (48·1)	3295·3	6	3259·7	6+
47·6	6	94·7	6 (94·9)	59·0	6+ d.
46·6	6+	93·6	6	56 1	6 Pt
45·5	6	93·3	6	55·9	6
44·4	6	92·6	6	55·1	6
43·1	6	92·2	6	54·4	4 (54·6)
42·5	6	91·6	6	53·4	5 (53·6)
42·0	6+	91·4	6	52·0	6+ d.
41·0	6	90·2	6 (90·4)	49·8	6 } (49·7)
40·6	6 } (40·4)	89·2	6	49·6	6 }
40·3	6 }	88·7	6	47·6	6 Pt
38·5	5 (38·7)	88 4	6	46·3	6
37·9	5 (38·3)	85·7	6+	45·0	6
37·5	6	84·6	5	43·8	6
36·2	6	84·0	6 (83·7)	42·4	6
35·7	6	82·5	6	41·6	4 (41·7)
34·9	6	82·3	6	40·7	6
34·3	4 (34·4)	81·8	6	39·5	6+ br.
27·2	6 Pd	81·2	6+	38·5	6
26·3	6	79·6	6	37·9	6
25·5	6+ br.	79·1	6	37·0	6
23·1	5	78·2	6	36·1	6
22·9	4 } (22·9)	77·9	6	35·7	6
22·7	4 }	76·3	6	35·3	6
20·7	6+	75·6	6	34·5	6
19·2	6+	75·0	6	33·4	6 Pt
18·6	6+	74·1	6 Pt	33·0	6
17·5	6	72·7	6	32·8	6
15·2	6 Pt	72·5	6	31·7	6+
11·3	6+	69·5	6+	31·2	6 } (30·9)
09·6	6	68·7	6	30·7	5 }
07·8	6+	68 5	6	30·4	6 Pt
06·6	6	67·2	6+	29·3	4 (29·4)
06·0	6+ d.	64·6	6	28·6	5 (29·0)
05·2	6	64·3	6	27·8	6
02·7	6+	63·4	6 Rh	27·0	6
3299·3	6+	63·1	6	26·7	6 } (26·4)
99·0	6	62·6	6	25·8	6 }
98·3	6	61·4	6	25·5	6
97·6	6	61·0	6+	24·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
3223·6	6	3183·7	6+	3147·9	6
23·0	6	82·8	6+	46·9	6
22·5	4 (22·4)	82·0	6+	46·6	6
21·3	5	78·7	6	45·7	6+
20·7	3 (20·9)	78·4	6	45·2	5 (45·0)
17·3	6+	77·2	6	44·5	6
16·5	6	76·7	6	44·4	6
15·2	6	76·0	6	44·0	6
14·3	6	75·3	6+	42·7	6 Pd
14·0	6	74·8	6	41·2	5 (41·0)
12·1	2 (12·1)	74·6	6 Rh	40·0	6
11·5	6	73·3	6	39·5	6 Pt
11·4	6	71·7	6 (71·9)	38·6	6+
09·9	6	71·5	6	37·8	3 (37·8)
09·6	6	71·3	6	35·5	6+
09·1	6	70·0	6 (70·2)	35·0	6+
07·0	6	69·2	4 (68·9)	34·2	6
06·3	6	67·3	6	32·7	6
05·7	6	66·8	6	32·3	6
04·5	6	66·3	6+	29·9	6
04·1	6 Pt	65·3	6	29·7	6
03·2	6	64·1	5 (63·9)	29·3	6 (29·1)
00·9	6 Pt	63·0	6	28·6	5 (28·2)
00·1	6	62·5	6	26·9	6
3198·1	6	61·9	6	26·0	6
97·5	6	61·4	6	25·0	6
95·7	6	60·1	6	24·3	6
94·2	6	59·6	6	23·3	6
93·2	6	58·6	6	22·6	5 (22·4)
91·2	6 Rh	57·6	6	22·1	4 (21·9)
90·6	6	57·1	6	20·5	6
90·2	6+	56·6	6 Pt	18·3	6 Rh
89·4	6	56·3	6	16·3	6
88·7	6	55·2	6+	12·5	6
88·0	6 Rh	54·8	5	12·2	6 (11·9)
87·3	6	52·7	6	10·4	6 } (10·2)
86·8	6	51·7	6+	10·0	6 }
85·7	6	49·6	6	09·5	6
85·4	6	49·0	6	08·7	6
84·8	6	48·1	6	08·2	6

λ	i	λ	i	λ	i
3107·7	6	3075·6	5 (75·4)	3045·3	6
07·3	6	75·0	6	43·6	6
06·8	6	74·5	6	42·7	2 (42·8)
06·2	6	74·1	6	42·0	6
05·3	6	73·5	5	41·6	6
04·3	6	72·7	6	40·9	6 (40·6)
03·9	6	72·2	6	40·0	6
02·8	6+	71·7	6	39·3	4 (39·3)
01·3	6	71·4	6	37·2	6
00·5	3 (00·4)	70·5	6	36·5	6
3099·9	6	69·2	3	35·0	6
99·6	6	69·0	3 (68·9)	34·6	6
99·2	6	68·6	6	34·4	6
98·7	6	67·7	6	34·2	6
98·4	6	67·3	6	33·0	6 } (32·8)
97·9	6 } (97·7)	66·5	6	32·6	6 }
97·0	6+ } Rh	65·7	6	30·3	6+
95·4	6	64·9	2 (64·7)	29·5	5 (29·3)
94·6	6	62·4	6 Rh	26·5	4 (26·4)
94·3	6	61·6	5	25·8	5 (26·0)
93·5	6	61·5	6 } (61·2)	25·3	6
93·1	6	61·1	6 }	25 0	6
92·8	6	60·1	6	24·4	6 (24·6)
92·5	6	59·9	6	23·4	6
91·6	6+	59·2	6 Pd	23·2	6
90·7	6 Rh	58·8	6	22·7	6
88·2	3 } (87·9)	58·5	6	21·6	6+
87·7	6 }	57·7	6	20·7	6
87·3	6	55·9	6 Rh	19·2	5 (19·5)
86·6	5 (86·4)	54·2	6	18·1	6+
86·0	6+	53·2	6	16·8	6
85·3	6	52·3	5 (52·1)	16·4	5
83·3	4 } (83·3)	51·5	6	15·8	6 } (15·6)
83·0	4 }	51·3	6	15·1	6 }
82·2	6+ d.	50·6	6 } (50·4)	14·9	6
81·6	6+	50·2	6 }	14·6	6
81·0	6+	49·1	6 Rh	14·3	6
80·2	6	48·9	6	13·2	6
79·9	6 (79·7)	48·0	6+ d.	13·0	6
76·8	5 (76·6)	47·3	5 (Rh) (47·1)	09·0	6 Rh (08·8)

λ	i		λ	i		λ	i	
3007·7	5		2981·8	6		2955·5	6+	
06·5	6		80·0	6		54·9	4	(54·8)
06·3	6		79·8	6	(79·4)	54·0	6	Fe?
05·7	6		79·2	6		52·7	6+	
04·7	6		78·5	5		51·3	4	(51·1)
03·2	6+		78·2	6		50·6	6	
02·7	6+	Pd	78·0	6		50·4	6	
02·3	5		77·6	6		49·3	6	Mn
01·6	6		77·3	6		48·5	6+	
01·2	6		75·6	6+		47·1	5	(46 9)
01·0	6		75·1	5	(74·9)	45·7	6	
00·2	6		74·6	6		44·0	6	
2999·7	6		74·3	6		43·3	4	(43·0)
99·2	6+		74·2	6		42·7	6	
98·7	6		73·7	6		41·2	6	
98·1	5	(Pt)	73·4	6	Fe	40·7	5	(40 4)
97·8	6		72·5	6+		39·4	4	(39·2)
97·4	6		71·6	5+	(71·4)	37·3	6	
96·3	5	(96·1)	69·7	6		36·7	4	(36·6)
95·5	6+		69·2	6		36·2	6	
94·8	6		68·4	6		35·3	6	
94·7	6		67·8	6+		34·7	4	(34·6)
94·4	6	Fe	67·4	6		33·2	6	Mn
93·8	6		67·1	6		32·7	6	
93·5	6		66·3	6		32·2	6	
91·9	6+		65·7	6		30·7	6	
91·7	6+		65·4	6	(65·2)	30·3	6	
90·1	6		64·3	5	(64·1)	29·8	4	(29 6)
89·6	6		63·7	6	Rh	27·7	6	
89·0	6	Rh	63·2	5		27·1	6	
88·5	6+	Rh	62·7	6		27·0	6	Rh
87·6	6		62·3	6	Rh	26·7	6	
86·7	6		61·8	6		26·2	6	
86·2	6+	Rh	61·7	6		25·2	4	
84·9	6	Fe	61·2	6		24·9	4	(24·8)
83·8	6		60·3	5	(60 1)	24·2	6	Rh
83·7	6	Fe?	59·2	6		24·0	6	
82·9	6		57·6	6	Fe	20·9	6	
82·7	6		56·7	6		19·9	6	
82·5	6		56·0	6		19·3	4	(19·3)

λ	i	λ	i	λ	i
2918·7	4 (18·7)	2875·2	6 Pt	2834·2	6
18·1	6	73·8	6	32·6	6
17·9	6	73·4	6	31·8	6
16·8	6	71·7	6	30·4	6+ } (30·3) Pt
16·4	4 (16·4)	71·2	6	30·3	6
15·7	6	71·1	6	29·8	6
14·1	5	70·2	6+	27·2	6
13·7	6	66·7	6	26·3	6+
12·4	6	65·6	6	25·7	6
11·4	6	63·9	6 Rh } (63·6)	25·5	6
10·7	6+	63·3	6 Rh	23·7	6
08·8	6	62·8	6	20·6	6 } (20·1)
08·4	6	62·6	6	19·8	6+
07·7	6+	61·0	6+	19·3	6
06·5	6+	60·7	6	17·6	6
06·0	6	60·4	6	17·0	6
05·7	6	60·0	6	16·5	6 } (16·1)
03·7	6+	59·4	6	15·9	6
03·4	6+	58·9	6	15·5	6+
01·2	6	58·5	6 Fe?	15·0	6
2898·5	6+	57·0	6	14·5	6
98·0	6	55·7	6	14·1	6
96·3	6 Rh	55·5	6	13·6	6
94·0	6	54·7	6 Pd	13·3	6
91·7	6	53·5	6	12·7	6
90·5	6+ Pt	52·6	6	11·4	6
89·7	6 (89·4)	52·3	6	11·3	6+
88·3	6	51·6	6	10·5	6
85·4	6+ br.	50·5	6+	08·7	6+ } (08·3)
84·7	6	49·7	3 (49·6)	08·1	6
84·2	6	46·8	6	07·6	6
83·5	6	46·5	6	06·3	6+ br.
82·2	6	46·3	6	05·8	6+ br.
81·7	6	41·6	6	04·6	5+ (04·4)
80·2	6	41·2	6 Pd	03·2	6
80·1	6	40·2	4 (40·1)	02·7	5
79·5	6 (79·3)	39·2	4 (39·1)	01·9	6
78·7	6+	38·3	6+	01·5	6
78·3	6 Pd	37·2	5 (37·4)	01·1	6
76·1	5	35·7	6	2799·6	6

λ	i	λ	i	λ	i
2799·3	6	2768·5	6	2739·9	6 Rh
98·7	6+	66·9	6	39·4	5
98·1	5	66·6	6 Rh	39·3	6
97·3	5	65·9	6	38·7	6
96·3	6	65·4	6	38·4	6
95·7	6+	65·2	6	37·3	6
95·4	5	64·8	6	36·8	6
94·2	6 Pt	64·1	6	36·3	6
92·2	6	63·9	6	35·7	6
90·6	6	63·5	6	35·3	6
90·2	6	62·7	5 (62·9)	35·0	6+
89·7	6	62·1	6+	34·3	6
89·4	6+	61·3	6+	34·0	5 Pt } (33·6)
88·5	6+	60·6	6	33·4	5 }
88·0	6 Pd	59·8	6	31·2	6
87·8	6	58·8	6+	30·7	6 Rh
86·3	6	58·2	6	28·8	6
85·6	6	57·6	6	28·6	6
83·5	6	56·6	6	28·0	6
83·1	6	56·0	6	26·9	6
82·5	6+	55·2	6	25·6	6
81·7	6 d. }	55·0	6 Pt	25·3	6
81·3	5 } (81·3)	54·6	6	24·8	6
81·0	6 }	53·2	6	23·7	6
79·3	6	52·3	6	23·3	6
78·6	6	51·8	6	22·7	6
78·0	6	50·8	6 (50·6)	22·3	6
77·4	6	50·0	6+	20·9	6+
76·9	6 Pd } (76·6)	48·8	6	20·4	6
76·3	6 }	48·3	6	18·9	6
75·5	5	48·0	6	18·6	6+
74·9	3 (74·8)	47·6	6 Rh	17·5	6 Pt
73·8	6	47·0	5 Fe	16·6	6
73·5	6	46·5	5 Fe	16·5	6
73·3	6 Rh	46·1	6	16·1	6+
73·0	6	45·5	6	15·4	6 Rh
71·6	5 Pt	45·2	6	15·2	6
69·6	6	44·5	6	12·3	6
69·3	6	44·1	5	12·0	6
68·8	6	43·1	5 (43·3)	10·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
2710·6	6	2686·3	6	2661·3	5
10·3	6	85·7	6	59·7	6+ } (59·6)
10·1	6	85·1	6	59·5	5 Pt }
09·5	6	84·8	6	59·2	6+ Rh
09·2	6	83·2	6	58·3	6+
08·8	6	82·8	6	57·7	6
07·9	6	82·6	6	57·1	6
07·7	6	82·2	6	56·8	6
07·3	6	81·7	6 Rh	56·2	6
07·1	6	81·3	6	56·1	6
05·8	6 Rh	80·5	6	55·7	6+
05·5	6 } (05·3)	80·1	6	54·7	6+
05·1	6 }	79·3	6	53·9	6 } (53·8)
04·8	6+ } (04·3)	78·7	6	53·7	6 }
04·0	6 }	78·3	6	53·2	6
02·8	6	77·7	6 (77·9)	53·0	6
02·4	5 Pt	76·7	6 (76·9)	52·1	6
01·7	6	76·2	6	50·7	6
01·4	6	75·7	6	50·5	6
01·1	6	75·4	6	50·2	6
00·5	6	75·2	6	48·7	6
2698·7	6	74·3	6	48·4	6
98·6	6 Pt	73·5	5	47·3	6+
98·1	6	73·0	6	46·8	6 } (46·3)
97·5	6	70·0	6	46·1	6 }
97·2	6	69·5	6 } (69·6)	45·8	6
96·0	6+ Rh (96·3)	69·4	6 } Rh	45·7	6
95·6	6	69·0	6	45·3	6
95·1	6	68·5	6	44·5	6 } (44·3)
93·5	6	68·2	6	44·1	6 }
93·4	6	67·9	6	43·5	6+
92·8	6+-	67·5	6	43·3	6+
92·2	6	66·6	6	41·8	6 Rh
91·2	6 Rh	66·4	6	41·5	6
89·8	6 Rh	65·7	6	41·0	6
89·3	6 Cu	64·9	5 } (64·8)	40·4	6
88·2	6	64·6	5 }	38·8	6 Rh
87·6	6	63·8	6 Rh	38·7	6
87·1	6	63·5	6	38·3	6
86·8	6	61·7	6	37·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
2637·5	6	2611·8	6	2579·4	3 (79·6)
37·3	6	10·5	6+	78·8	6
36·7	6	10·0	6	78·6	6
36·1	6 Pd	09·8	6	78·2	6
35·7	6 } (35·4)	09·0	6 Rh (08·6)	77·8	6 } (77·4)
35·2	6 } Rh	08·1	5 } (07·6)	77·0	5 } Pd
35·1	6	07·3	6 }	76·1	6 Mn
34·5	6 } Rh	07·0	6 } (06·7)	75·2	6
34·2	5 } (34·4)	06·4	5 }	74·5	6
31·6	6 Fe	04·1	6	74·2	6
31·3	6 Fe	03·8	6+	73·5	6 } (72·9)
31·0	6 Fe	02·8	6 } (02·2)	72·7	5 }
30·5	6	02·0	6 }	72·5	6
30 3	6 Rh	00·7	6	72·2	6
30·0	6	2599·0	5	71·9	6
29·4	6	98·3	5	70·5	6 } (70·1)
29·1	6	97·5	6	69·7	5 } Pd
28·7	6 } (28·3)	97·0	6 Rh	69·1	6 Rh
28·1	6 } Rh	95·7	4 (96 0)	68·8	6 Rh
28·0	6	95·2	6	68·6	6
26·7	6 Rh	94·6	6	68·1	6
25·3	5 Pt	93·5	6+ Rh	67·6	6
24·6	6	93·0	6	67·0	6
24·1	6	92·7	6 } (92·3)	66·7	6
23·5	6 } (23·3)	92·0	5 }	66·2	6+
23·0	6 }	91·5	6 } (91·3)	65·3	6+
21·6	6	91·0	5 }	64·0	5
21·1	6	90·5	6	63·3	6+ } (63·1)
19.9	6 (20·1)	90·1	6	62·8	5 }
18·7	6+ br.	89·1	6	62·5	6 } (62·1)
17·1	5 (17·3)	88·5	6	61·8	6 }
16·3	6	87·5	6	61·7	6
16·2	6	87·1	6	61·1	5
15·8	6	86·0	2 (86·2)	60·1	6+
15·5	6	84·8	6	59·2	6 } (58·7)
15·1	6	83·6	6	58·3	4 }
14·9	6	83·0	6	57·7	6 } (57·4)
14·1	6	81·8	6	57·2	6 }
13·7	6	81·5	6 Rh	57·1	6 Rh
12·2	6	81·2	6	56·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
2555·6	6	2527·7	6	2494·9	6
55·1	6 } (54·4)	27·4	6	94·4	6
54·1	4 }	26·7	6	94·2	6
53·6	6	26·5	6	93·6	6
51·2	6 (51·4)	25·7	4 (25·9)	92·3	6
49·4	6	25·3	6	91·7	6 Rh (91·9)
49·3	6	24·9	6	90·7	5 Rh (90·9)
49·0	6	23·7	6	89·6	6
48·0	6	22·8	6	89·2	6
47·6	6	21·7	6	88·7	6 Pd
47·5	6	21·2	5	87·6	6
45·5	6 Rh	20·5	6 Rh	87·1	6 d.
45·0	6 Cu	19·9	6	86·3	6
44·4	6 } (44·0)	19·5	6 } (19·3)	85·9	6
43·9	5 }	19·1	6 }	85·3	6
43·5	6	17·8	5	84·7	6
43·2	6	15·4	6	84·5	6
42·7	6 } (42·1)	14·3	6 Pd	82·7	6 Rh
41·7	6 }	13·6	6	82·2	6+ Pt
41·3	6	13·2	6	80·3	6 Rh } (80·1)
40·8	6	12·0	4	79·8	6 }
40·5	6	10·7	5 Rh (10·9)	79·4	6
40·3	6	08·3	6	78·9	6
38·7	6	07·6	6	78·6	6
38·2	6	07·0	6	78·2	6
37·1	6	06·5	6	77·7	6
36·7	6 } (36·4)	06·2	6	77·3	6
36·2	6 }	05·6	6 Pd	76·0	6
36·0	6	05·0	6 Rh	75·5	6 Rh
35·3	6+	03·8	6 Rh	74·3	6
34·2	5 (34·4)	02·7	6	73·3	6
33·7	6	01·0	6	71·3	5 Pd } (71·1)
33·4	6 } (33·2)	00·2	6	70·7	6 }
33·0	5 }	2499·5	6+	70·2	6 Pd
32·3	6	98·8	6 Pd	69·0	6
32·0	6	98·4	6 } (98·1)	68·4	6
31·7	6	97·9	5 }	67·5	6
31·1	6	97·0	6+	66·7	6
30·8	6	96·3	6	66·1	6
29·6	6	95·8	6 Pt	65·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
2463·4	6 Rh	2434·5	6 } (34·9)	2405·8	6+ d.
63·2	6	34·1	6 }	05·0	6
62·8	6	33·6	6	03·6	6
62·3	6	33·0	6	03·1	6
61·8	6	32·5	6	01·7	6
61·2	5 (Rh) (61·0)	31·3	5	00·4	6
58·0	6	30·7	6	2399·2	6
57·7	6 Pd	30·5	6	98·7	3 (98·8)
57·2	5 Pd } (57·0)	30·0	6	96·5	6 Rh
56·5	5 }	29·7	6+ } (29·5)	95·4	6
56·2	5 (Rh)	29·0	6 }	92·9	6
54·9	5	27·8	5 } (27·5)	92·3	6 Rh (92·1)
54·5	6	27·2	6 Rh }	89·7	6
54·1	6	26·5	6	89·4	6
53·7	6	24·9	5 } (24·8)	89·0	6
52·7	6	24·7	5 }	88·6	6
52·5	6	24·3	6	87·8	6
51·7	6+	23·7	5 (23·5)	86·4	5
50·4	6 }	22·7	5 (22·5)	83·6	6 Rh
49·5	6 } (49·4)	21·7	5 (21.5)	83·1	6+
48·8	6 }	21·0	5 Rh (20·8)	80·9	6
48·6	6	19·2	6	80·3	6
48·2	6 Pd	18·5	6	79·5	6
47·7	6 Rh } (47·5)	18·1	6 } (18·0)	76·5	6+
47·3	6 }	18·0	6 }	75·8	6
45·5	6	17·3	6	75·6	6 } (75·3)
44·5	6	16·8	6	75·2	6 }
44·1	6	14·7	6+ Pd	74·8	6
43·3	5 } (43·0)	13·3	6	73·3	6+
42·6	6 }	13·2	6 }	69·2	6
41·8	6	12·8	6 } (12·8)	68·2	6
41·3	6	12·5	5 }	68·1	2 (68·0)
40·8	6	11·9	6+	66·1	6
40·3	5 } (40·0)	11·0	6	64·0	6
39·7	6 }	10·7	6 Rh	63·2	5 (63·0)
39·3	6	09·5	6	62·7	6
38·6	6 Rh	09·1	6	62·3	6 Pd
37·3	6	08·5	5 } (08·3)	59·4	5 (59·2)
36·7	6 Rh	08·0	6 }	58·8	5 (58·5)
35·1	6+ (34·9)	06·7	6 Pd	58·0	5 (57·8)

λ	i	λ	i	λ	i
2356·7	6	2309·6	6	2259·3	5 } (59·1)
55·9	6 } (55·7)	09·4	6	58·8	6
55·5	6	08·8	6	58·4	5 } (58·1)
52·0	6	05·5	6+	57·5	5
51·4	6+	04·6	6+	56·5	6
48·2	6	2299·8	6	56·0	6
47·9	6	98·3	6 Rh (98·0)	55·5	6
47·4	6	97·3	5 (97·0)	53·3	6 (53·1)
46·8	6	96·8	6 Pd	52·0	6
46·5	6	96·3	6	51·5	6
46·2	6	95·2	6	50·7	6
45·3	6	94·5	6	49·4	6
43·6	6	93·7	6	48·8	6
42·5	6	92·5	6	43·8	6
40·3	6	91·8	6	42·6	4 (42·5)
36·8	6	91·0	4 } (90·7)	40·5	6 (40·2)
36·5	6 Pd	90·1	5 Rh	38·7	6
34·5	6	89·5	5	38·3	5 (38·1)
34·3	6	88·3	5	37·1	5
33·8	6	87·0	5	36·3	6
33·3	6 Rh	85·7	6	34·3	6 (34·0)
32·7	6	84·6	6	24·2	6
32·3	6	81·7	5 (81·5)	20·6	6+ (20·8)
31·8	6	81·2	5 } (80·8)	19·3	6
29·5	5 } (29·3)	80·6	5	18·9	6
29·0	6	78·5	6	12·4	6
28·1	6+ (27·9)	77·7	6 } (77·3)	11·2	6
25·8	6	77·1	6	10·2	6+
25·5	6 } (24·8)	75·6	6	08·7	6+ (08·5)
24·1	6	71·4	5	05·0	5 (04·8)
22·7	6	68·9	5 } (68·7)	2197·5	6 (97·2)
20·0	6	68·5	5	92·2	6
18·3	6	68·1	6	90·3	5 (90·0)
16·8	6	67·8	6	87·0	6
12·0	6	65·3	5 } (65·0)	69·3	6 (69·0)
11·6	6	64·7	6+	52·6	6 (52·3)
10·9	6	63·0	6+	51·7	6
10·1	6	62·4	6+ (62·2)		

Rhodium (Nachtrag).

(Taf. V.)

Wir haben 1500 Rhodiumlinien zwischen $\lambda = 4686 \cdot 8$ und $\lambda = 2167 \cdot 3$ gemessen. Als Verunreinigungen fanden sich in unserer Substanz Fe und Ir in geringer Menge und Ca, Cu, Mn, Pd, Ni, Co und Pt spurenweise. Die 30 vorhandenen Eisenlinien ergaben einen mittleren Fehler der einzelnen Messung von 0·03 AE., die grösste Abweichung gegen die Zahlen von Kayser und Runge war 0·1 AE.

λ	i	λ	i	λ	i
4686·0	6+	4484·0	6	4311·6	6 Ir
83·0	6+	78·3	6+	10·7	6
81·7	6+	48·5	6+ br.	09·0	6
77·6	6+	43·5	6+ br.	08·0	6+ Fe
75·2	5	33·6	6	04·0	6+ br.
40·5	6+	26·6	6	01·8	6 Ir
20·2	6+	26·3	6	00·7	6+
08·3	5+	24·3	6	4296·8	4
4572·7	6	05·8	6+	88·8	2 (88·9)
72·5	6	04·9	6 Fe	84·6	6+
71·6	6	03·9	6+ Ir	82·0	6+ br.
69·3	5	4399·6	6+ Ir	79·3	6+
65·3	6	88·2	6	78·7	5
63·0	6	83·6	6 Fe	78·2	6
61·0	6	79·2	6	77·0	6
58·9	6	77·0	6+ } (76·6)	76·5	6+
57·3	6+	76·2	6 }	76·1	6+
51·8	6	72·5	5	75·5	6+ Cu
48·8	6	64·0	6+	74·8	6+
44·6	6	45·3	6	73·5	5
30·9	6	42·5	6	72·4	6
29·0	4	39·5	6+	71·9	6 Fe
25·5	6	28·8	6+ br.	71·3	6 Fe
08·0	6+	25·9	6 Fe	70·7	6
06·8	6+	23·2	6+ br.	69·7	6+
04·1	6	15·2	6	69·2	6
4492·7	5	13·6	6+ br.	68·3	6 Ir

λ	i	λ	i	λ	i
4265·3	6+	4157·4	6	4026·2	6+
64·5	6+	54·5	3 (54·6)	23·3	3 (23·3)
63·8	6+	37·0	6	20·3	6
62·3	6+	33·9	6	17·1	6
60·7	6 Fe	29·0	2 (29·1)	05·5	6+
60·1	6+	25·0	6	03·3	6+
59·7	6+	22·7	6	3996·2	2
59·3	6+	21·7	3 (21·9)	95·7	3
58·4	6+	19·8	4	86·6	6+
56·6	6+	16·4	5	84·5	3 (84·7)
56·3	6	13·6	6+	76·3	6
52·7	6+	07·5	5	76·1	6 } (75·6)
51·0	6 Fe	4097·7	3	75·3	3 }
49·1	6	93·0	6+	69·3	6+
48·0	6+ br.	91·0	6	68·6	3 Ca
45·4	6+	88·0	5	59·0	1 [1] (59·1)
44·7	5	85·5	6	58·3	4
32·7	6+	85·4	6	52·0	6+ Ir
32·3	6+	84·5	6	50·6	6+ br.
30·3	6	83·0	2 (83·0)	46·4	6 Ir
27.0	5 Ca	82·0	6	42·9	3 (42·8)
21·5	6	80·9	6	40·6	6
21·2	6	77·8	5	39·8	5
20·0	6+	63·8	6 Fe, L	38·7	6
18·2	6	61·0	6+ br.	38·0	6
11·4	1 (11·3)	59·5	6+ br.	35·9	4 (36·1)
06·7	5	56·5	5	35·1	5
04·1	6+	55·6	6 Mn	34·3	2 (34·4)
4196·6	3 (96·7)	53·7	5	33·8	3 Ca (33·7)
95·7	6+ br.	49·2	5	29·5	6+
82·7	6	48·6	5	26·6	6
77·8	5	46·0	6 Fe	26·2	6
75·8	5	43·6	6+	25·1	6
72·8	6 Ir	43·0	6+	24·7	6
71·5	6+	40·3	6+ br.	22·4	4 (22·2)
66·9	6+	34·0	6	15·8	6
66·2	6 Ir	28·6	6	15·6	6 Ir

[1] Nach Roth verwaschen.

λ	i	λ	i	λ	i
3914·3	6 d.	3887·5	6	3815·2	4 (15·2)
13·0	6 [1]	86·4	6 Fe	13·1	5 Fe
12·6	6	86·0	6+	11·9	6
11·7	6	84·3	6+ br.	09·7	5
11·2	6	83·2	6+ br.	06·9	4 (06·8)
10·6	6	81·0	6	00·3	5 Ir
10·0	6	80·2	6	3799·6	1 (99·5)
08·6	6	77·9	6 } (77·6)	98·3	6
08·3	6	77·4	4 }	95·0	6
07·6	6	76·6	6	93·3	2 (93·4)
07·0	6+	74·8	6	92·4	4
06·2	6	73·6	6 Ir	91·6	6
05·5	6	72·5	5	89·8	6
05·1	6	70·2	3	88·7	3 (88·6)
04·5	5	69·2	6	86·0	5
03·0	6	65·6	6 Fe, Ir	85·4	6+
02·7	6 Ir	63·7	6	81·0	6+
02·3	6	60·0	6 Fe	80·0	6+
02·1	6	56·7	1 [2] (56·7)	78·3	4 (78·3)
01·5	6	56·3	5	77·0	6
01·1	6	54·8	5	76·0	5
00·2	6	53·5	6+	72·8	6
3899·0	6	52·7	6+	71·8	5
98·6	6	49·2	5	68·8	6
98·1	6	44·0	6+ br.	67·3	6 Fe
97·8	6	41·3	6	67·2	6
97·3	6	40·6	6	65·2	1 (65·2)
96·8	6	40·3	6	64·0	6 Fe
96·1	6	35·0	5	60·9	6
95·7	6 Ir	28·0	6 Fe	60·6	5 (60·4)
94·8	6+	24·8	6	59·6	6
93·8	6+	22·5	3 (22·4)	58·4	6 Fe
92·0	6+	20·6	6 Fe	57·3	6+
90·5	6	18·4	2 (18·4)	55·7	5
89·6	6+	18·0	6+	54·3	3 (54·4)
89·1	6+	16·7	3 (16·7)	50·6	6
88·5	5	16·1	6 Fe	48·4	2 (48·5)

[1] Scheint eine cannelirte Bande zwischen 3913 und 3900.

[2] Nach Roth verwaschen.

λ	i		λ	i		λ	i	
3747·4	6	Ir	3688·0	6		3624·5	6	
46·1	6		83·3	6+		23·2	6	
45·7	6		81·2	2	(81·3)	23·0	6	
44·4	2	(44·3)	80·3	6		22·2	6	
38·6	6	Ir	79·0	6		20·6	4	(20·7)
37·3	3	(37·5)	77·5	6+	br.	19·1	6	
35·4	2	(35·5)	75·9	6		18·8	6	Fe
35·0	6		75·0	6	Ir (75·2)	16·6	6+	
33·4	6+		74·9	4		14·8	2	
31·6	6		73·5	6+		13·9	6+	
26·8	6		70·7	6+	br.	12·5	2	(12·7)
25·6	6	Ir	69·2	6		09·0	6+	
25·1	6		67·1	4		08·5	6	
22·3	6+		66·3	2	(66·4)	08·2	5	
20·1	5	Fe	64·9	6		07·9	6	
17·2	6		64·7	6	Ir	05·8	3	(06·1)
15·3	6		62·0	4	(62·1)	03·0	6+	
15·0	5		58·2	1	(58·1)	00·6	6+	
14·0	6		55·0	4	(55·2)	3598·0	5	
13·6	4		53·2	6+	Ir (52·9)	97·3	2	(97·4)
13·1	2	(13·1)	51·5	5	Fe?	96·3	1	(96·4)
09·8	6		49·0	6+		95·5	6+	br.
08·6	6		48·0	6	Fe	94·8	6	
07·1	6		43·8	6+	br.	94·6	6	Ir
05·2	6		42·8	6+	br.	93·7	5	
04·5	6		42·2	6+		93·0	6	
02·7	6+		41·3	5		90·6	5	
01·1	2	(02·1)	39·7	4		85·8	5	
00·3	6		37·1	6		85·0	6	
3699·5	5	(99·7)	36·2	6	Ir	83·6	4	(83·3)
98·7	4		33·8	6		83·1	3	
98·4	4		33·0	6		81·4	6	Fe?
95·7	3	(95·7)	32·3	6		80·8	6	
95·1	5		30·5	6		80·5	6	
94·3	6		29·7	6+	br.	79·7	6+	
92·5	1	(92·5)	28·9	6	Ir	78·6	6	
91·6	5		28·0	5		77·0	6	
90·9	2	(90·9)	27·3	6		76·6	6	
89·5	6	Ir	26·7	1	(26·8)	76·2	6	d.
88·7	6+		25·0	6		75·7	6	

λ	i		λ	i		λ	i	
3575·4	6		3536·6	6		3484·0	4	
74·0	6		36·4	6		77·9	2	(77·9)
73·8	5	Ir	34·3	6+		74·9	2	(74·7)
73·4	6		32·3	6		73·8	6	
72·5	6		30·6	6		72·3	4	
72·1	6		28·1	1	(28·1)	70·6	2	(70·5)
71·8	6		25·7	6		69·7	5	(Ni)
71·3	6+	Pd	24·7	6+	Ni	66·0	5	Co
71·0	5		22·5	5		64·9	6	
70·3	2	(70·2)	22·2	6	Ir	62·2	2	(61·9)
69·2	6		20·9	6		59·3	6	
68·9	6		20·0	6+	Ni	58·1	4	(57·7)
68·6	6		19·6	5		57·2	4	
68·3	6		17·7	6		55·5	6	
67·1	6+		17·3	6		55·4	4	(55·0)
66·4	6	Ni	16·8	6		52·7	5	
66·3	6		16·0	6	Ir	51·2	5	(Pd)
64·2	5	(64·4)	15·0	6	Ni	50·4	6	
63·0	6+		14·8	6		49·1	5	Ir
61·8	6+		13·7	4	(13·7)	48·7	5	
60·3	6		13·2	4	(12·7)	47·8	5	
60·1	6	(59·9)	11·9	5		46·7	6	
59·2	6		11·6	5		46·5	6	Ni
59·0	6		10·7	6		45·4	6	
58·6	6		10·4	6	Ni	43·1	6	
58·0	6	d.	07·4	2	(07·4)	42·8	5	
57·5	6		05·5	5		42·0	6+	Mn
57·2	6		02·6	1	(02·7)	40·6	3	(40·4)
56·8	6+		00·7	6		37·5	6	Ir
53·9	6		3499·3	6		35·0	1	(34·7)
53·6	6		98·8	2	(98·9)	33·7	6	Ni
53·1	6		96·6	6		32·3	6	
52·8	6		96·0	6		31·0	6	
51·8	6		94·5	5		28·2	6+	
50·4	6+	br.	91·2	5	d.	24·5	4	(24·2)
50·0	6		90·6	6		22·4	6	
49·6	1	(49·6)	90·3	6		21·3	2	(21·0)
43·9	2	(44·2)	89·6	6	Pd	20·3	5	
41·9	4	(42·1)	87·5	6		18·1	6	
38·2	2	(38·3)	87·2	6		15·2	5	

λ	i	λ	i	λ	i
3412·4	2 (12·2)	3360·0	4 (60·0)	3334·4	6+ Ir
09·0	6	56·7	6	31·4	5
08·0	6 } (07·7)	56·3	5	26·0	6
07·4	6 } Ni	56·0	6	23·3	2 (23·0)
06·7	4	55·5	6	20·0	6
04·0	6+	54·7	6	18·5	6
02·2	6	54·5	6	14·7	6+
01·2	6	54·1	6	13·2	6+
00·3	6	53·7	6	10·7	6+
3399·9	4 (99·7)	53·6	6	09·7	6+
97·0	1 (96·7)	53·2	6	08·2	6
95·6	5	52·8	6	07·5	4 (07·2)
92·8	6	52·3	6	05·5	6
92·0	6	52·0	6	05·3	6
89·5	6 d.	51·6	6	04·2	6
87·3	6	51·2	6	02·7	6
86·3	6	51·1	6	01·9	6 Pt
86·0	4	50·7	6	01·5	6
82·6	6	50·5	6	3298·5	6
81·7	5	50·1	6	98·3	6
81·0	6	49·8	6	97·5	6
78·7	6	49·6	6	96·8	5 (96·5)
77·8	5	49·1	6	95·7	6
77·2	4 } (76·7)	49·0	6	94·5	4 } (94·0)
76·5	6 }	48·4	6	93·8	6 }
72·4	2 } (72·0)	48·1	6	92·9	6+
71·6	6 }	47·8	6	92·3	6+
71·3	6	47·1	6	91·6	6
70·9	6	46·9	6	89·9	5
70·6	6	46·7	6	89·4	4 (89·0)
70·2	6	46·2	6+	86·7	6
69·8	5	46·1	6	83·7	3 (83·5)
68·8	6	44·5	5	82·0	4
68·5	3 (68·2)	43·2	5	80·8	2 (80·4)
66·9	6+	42·6	6	77·0	6 d.
65·1	6	42·0	6	75·1	6
64·3	6	41·2	6	74·3	5
63·7	6	40·8	6+	73·2	6
62·4	5	38·7	4	71·9	4 } (71·5)
61·0	3 (60·6)	36·9	4	70·7	6 }

λ	i	λ	i	λ	i
3269·9	6	3222·6	6 Ir	3176·3	6
68·7	5	21·5	6	74·6	4
67·7	3 (67·5)	21·0	5 } (20·5)	73·7	5
66·7	6	19·7	6 } Ir	72·4	6
65·5	5	18·5	5	71·5	6+
64·6	5	18·1	5	70·3	6 Pd
63·4	3 } (63·0)	17·5	6	69·1	6 Ir
62·3	6 }	17·0	6	69·0	6
61·2	6+ br.	16·5	6+	68·4	6 d. (Ir)
57·2	6+	15·1	6	67·1	5
56·6	6+	14·6	6	66·4	6
55·3	6	13·8	6	64·3	5
54·8	6	13·1	5	62·5	5
54·2	6	12·1	5 Ir	59·3	2 (59·2)
53·7	6+	11·7	6	58·0	6+
51·2	6+	10·7	6+	55·8	5
50·4	6+	09·6	6+	53·7	5
49·6	6+	07·4	3 (07·2)	52·6	5
47·8	5 Ni	06·3	6	51·5	5
45·1	6+ br.	05·3	6+	50·7	6
44·0	6	02·0	6	50·3	6
43·5	6	01·7	6+	49·9	5
41·8	6	3199·1	6 Ir	48·0	6+ d.
40·7	5	97·2	4	47·2	6+
39·3	5	94·6	6	45·7	6
38·6	6+	94·0	6	41·3	4 } (41·0)
37·9	5	91·2	4 (91·0)	40·4	6 }
37·5	6+	90·5	6	38·7	6+
36·3	6	90·1	6	37·9	5 Ir
36·0	6	89·2	5	37·6	6
34·3	6	88·7	4	34·3	5 Ni
33·6	4 } (33·2)	88·0	3 (87·8)	33·5	5 Ir
32·7	6 }	85·6	5	31·0	5
32·3	6	84·7	6+	30·0	6+
31·3	4 (31·3)	81·3	6	29·2	6+
29·5	6	80·5	6	28·5	6+ br.
29·0	6	80·0	5	26·2	6
27·9	6 Fe?	78·6	6	24·6	6+
25·4	6	77·7	6	23·8	4
24·7	5	77·3	6	23·1	6

λ	i	λ	i	λ	i
3122·1	5 Ir	3069·9	6	3015·0	6
21·2	5	69·1	5 Ir	11·8	6
20·0	6	67·5	5	10·5	6+
19·1	6 Ir	65·0	6+ Ir	09·7	4 } (09·3)
18·2	4	64·5	6+	09·1	3 }
17·7	6	63·9	6+	06·6	6
16·6	6+	62·5	4	06·0	6
15·2	5	59·9	5	04·5	5
14·0	6+ br. (Pd)	58·2	6	03·7	5 d. (Ni)
12·4	6+ br.	57·5	6	02·4	6
10·6	6+	55·8	3	02·2	6
09·0	5	54·2	6+	01·2	6
06·1	6+	52·7	6 d.	2998·0	6+
05·2	6	49·6	6	97·4	6
03·5	5	49·1	3 (49·0)	97·3	6
02·7	6	47·3	3 (47·2)	96·8	6
02·1	5 Ni	46·3	6	96·1	6
01·7	5 Ni	46·0	6	95·7	5
00·6	6	42·9	5	94·5	6 Fe
00·5	6 Ir	41·8	6+	91·6	6+ d.
3099·2	5 Ni	40·6	6+	90·7	6
97·0	4 (97·0)	39·4	6 Ir	89·5	6+
95·6	6+	38·6	6	88·9	3 (88·9)
93·7	3 } (93·3)	37·6	5	88·4	4
92·5	5 }	35·2	4	87·4	5
90·8	4	34·3	6+	87·0	5
88·3	6 Ir	33·0	6+	86·7	6
87·7	6	31·4	6 Pt	86·2	4 (86·1)
86·0	6+	29·6	6	85·2	6
84·2	4	28·8	5 d.	83·7	6
83·5	6	27·1	6+	83·2	6
83·3	6 Ir	26·5	6 Ir	82·5	6
81·8	5	26·0	6	81·9	6
78·5	6+	25·3	5	81·2	6
77·0	6	24·6	6	80·7	6 Pd
75·8	6	21·2	6	79·6	6
74·4	6	20·8	6	79·5	6
74·0	6	20·0	3 (19·9)	77·7	5
72·4	6+	17·3	6 Pt	76·5	6+
71·3	6	17·2	5	75·7	6+

λ	i	λ	i	λ	i
2975·0	6	2936·7	6 Ir	2896·2	4
74·2	6	36·0	6	95·7	5
73·2	6+	35·2	6	93·3	6+
72·6	6+ br.	34·7	5 Ir	92·0	6+
71·5	6	34·2	6	91·0	6+
70·8	6+	33·3	6	90·0	6
68·7	4	32·6	6	89·3	5+
68·2	6	32·1	5	87·8	6
67·1	6	31·6	6	86·0	6 d.
65·2	6	29·8	6 Ir	85·4	6
64·8	6	29·2	5	85·0	6
63·6	1 (63·4)	28·6	5	84·3	5+
62·2	4	27·0	3	82·7	6
60·0	6	25·1	6 Ir	82·5	6
58·7	6	24·9	5 Ir	82·0	6
58·4	6	24·2	2 } (23·8)	81·4	6
57·6	6	23·2	6 }	81·0	4+ (80·6)
57·5	6	21·3	6 Ir	79·3	6
57·0	6	21·0	6	78·7	6 } (78·4)
55·7	6	19·7	5	78·3	5+ }
55·5	6	18·7	6 Ir	78·0	6
55·0	5 Ir	17 0	6+	76·2	6
53·9	6	16·5	6 Ir	75·8	6 Pt
53 5	6	15·5	5	75·5	6
51·2	6 Ir	15·0	5	74·6	4 } (74·1)
50·6	6	13·5	4	73·8	6 }
49·8	6	12·7	6	73·2	5
49·3	6 Mn	10·3	1 (10·1)	72·0	6+
48·8	6	07·3	5	71·5	6 Pd
48·1	4	07·1	5	70·8	6
47·6	4	05·0	6	70·5	6
46·7	4	04·7	6	69·0	6+
46·1	6	04·3	6	68·4	6+
44·9	4	04·1	6	68·3	5
43·3	5 Ir	03·0	6+	67·5	5 (67·4)
41·2	6	00·3	6 Mn	65·8	5
40·6	6	00·0	6	64·7	6
39·7	6	2899·0	6	63·8	4
39·4	6 Ir	97·7	4	63·2	4 (62·9)
38·2	6+ br.	97·3	6 Ir	61·7	6

λ	i	λ	i	λ	i
2861·0	6	2821·1	6	2775·2	6 (75·6)
59·7	6	20·8	6	74·4	4
58·2	6+	19·5	2 } (19·1)	73·2	4
57·0	6	18·7	6+ }	72·5	6
56·2	6	16·8	5	71·6	6 Pt
54·4	6	13·9	5	71·2	6
53·6	6	13·4	5	68·3	6
53·5	6	12·9	5	67·8	6
53·0	6	12·3	6	66·6	4 (66·4)
52·3	6+	11·6	6+	65·0	4 } (64·6)
51·6	6	10·8	6	64·2	6 }
51·2	6	09·8	6+	64·0	6
50·5	5	05·7	5	63·4	6 Pt
48·9	6	04·1	4 (03·6)	62·3	6
48·5	6	02·4	4 (02·1)	61·3	5 } (61·1)
47·7	6	01·7	6	59·7	6 }
45·8	2 (45·5)	01·6	6	59·3	6+
44·6	6+ br.	00·9	6+	56·9	5
43·1	6+	2798·3	6	55·7	6 Fe
42·3	6	97·9	6	55·1	6 Pt
41·0	5	96·4	6	54·3	4
40·3	6 Ir	94·0	6	53·3	6
39·3	5 Ir	92·8	4 (92·6)	53·2	6
38·4	6	91·2	6+	53·1	6
37·3	6+	90·9	4 (90·7)	52·3	5
36·8	6	89·1	6+	51·6	6
36·5	6	88·0	6 Pd	49·4	6 Fe
35·6	6	85·3	6	48·4	6
34·3	5	84·8	6	47·7	4
33·4	5	84·3	6 d.	47·0	6 Fe
32·6	6	83·6	6	46·5	6 Fe
30·4	6 Pt	83·2	6	45·8	6
29·5	6	82·8	6	44·8	6+ br.
28·5	6+ br.	82·0	3 } (81·6)	43·3	6 Fe
27·5	6	81·2	6 }	41·8	6
27·0	4	80·6	6+	41·7	6
26·8	5+ (26·5)	79·8	6	40·0	2 (39·8)
24·6	5 Ir	78·8	6	37·5	2 } (37·2)
22·6	5	78·4	3 (78·1)	36·8	6 }
21·8	6	76·0	3 (75·6)	35·7	6

λ	i		λ	i		λ	i	
2735·2	6		2692·2	6		2640·6	5+	
34·2	6		91·2	4	(90·9)	39·8	6	
32·5	6	Ir	90·4	6		39·2	4	(39·0)
31·7	6		89·7	4	(89·4)	38·8	4	
30·8	4		88·3	6		37·0	6+	
29·7	6		86·7	6		36·5	6	
29·1	3	(28·9)	84·4	2	(83·8)	35·3	3	(35·1)
27·7	6		83·7	2		34·6	4	
27·6	6	Fe	81·7	4	(81·4)	33·4	6	
25·8	6		76·4	4	(76·3)	32·7	6	
25·1	6		74·5	2	(74·3)	31·3	6	
24·1	6		74·0	5		30·3	4	(30·3)
23·1	6		72·9	6		28·2	2	(28·1)
22·9	6		72·2	6		27·9	5	
22·3	6		72·0	6		26·7	4	
20·6	6		71·2	6		26·0	6	
20·1	6		70·1	6		25·5	2	(25·3)
18·5	6		69·3	4	(69·1)	24·8	5	
18·1	4		68·5	5		22·6	5	
16·7	6		67·2	5		21·2	6	
15·4	2	(15·2)	65·3	6		20·0	6	
14·3	6		64·9	6		19·0	6	
13·3	5		64·6	5		17·8	6+	
07·3	6		63·7	3	(63·6)	17·1	6	
06·7	5		62·1	6		16·0	6	
05·7	1	(05·5)	61·7	6		15·4	6	d.
04·9	4		59·1	2	(59·1)	14·7	6	
03·7	6		58·4	5		13·8	6	
03·5	6		57·3	4	(57·1)	13·6	6	
03·3	6		56·4	6+		11·8	5	
01·3	6		52·6	6		11·4	6	
00·7	4	(00·6)	51·8	1	(51·8)	10·3	6	
2699·9	5		50·8	5	Pt	09·7	6	
99·0	6+		49·5	6		09·0	2	(09·1)
97·1	5		49·0	6		08·3	6	
96·0	4		47·3	6		06·5	6	
94·3	5		47·1	6	Pt	04·3	5	(04·1)
93·5	5		44·2	6		03·3	5	(03·1)
92·9	6		42·8	4	(42·8)	01·5	5	
92·4	6		41·7	4	(41·5)	00·6	5	

λ	i		λ	i		λ	i	
2599·7	6		2554·7	6		2513·3	6	
99·4	6		54·2	6	Ir	12·5	6	Ir
98·3	6		53·1	6		11·2	5	
97·8	6		52·3	6		10·6	2	(10·7)
97·0	2	(96·8)	51·7	6	Pd	09·6	6	
95·3	5		47·6	6		08·1	5	
93·5	4	(93·3)	45·4	2	(45·3)	06·1	6	
92·1	3	(91·9)	44·0	4	(43·9)	02·4	6	
90·8	6		43·4	6		01·3	5	(01·5)
87·3	4	(87·1)	42·1	5	} Co	2499·2	5+	} (98·5)
86·4	4		41·1	5	} (41·8)	98·1	5+	}
83·3	6		39·7	6		96·8	6+	
82·7	5	(82·3)	39·2	6		93·4	6+	
81·6	4	(81·4)	38·6	6	d.	90·7	1	(90·8)
80·5	5		37·7	4	(37·6)	89·8	6	
79·7	5		37·1	6		89·2	6	
79·2	6		36·8	6		88·3	5	(88·5)
77·9	6		36·2	6		86·7	6	
77·3	6+		35·7	6		86·5	6	} Pd
77·0	6+	Pd	35·3	5		85·7	4	} (86·0)
76·0	6+	Mn	34·6	4	(34·8)	84·6	5+	
74·7	6+		34·0	6		83·3	6	
71·6	6+		33·5	5		82·7	4	(82·8)
70·4	6		32·3	5		81·2	5	(81·0)
69·0	4	} [1] (68·8)	31·3	4	(31·5)	80·4	4	(80·5)
68·8	4	}	29·3	5		79·1	6	
66·0	6		28·5	6	Co	78·6	6	
65·1	5	(64·8)	26·7	6		77·2	5	
64·3	6		26·0	6	d.	75·6	2	(75·6)
64·1	6	Co	23·4	5	(23·6)	74·1	6	
63·7	6		22·7	6		73·4	6	
62·6	6		21·4	6		73·0	6	Ni
62·0	5	(61·7)	20·5	2	(20·6)	72·5	6	Pd
59·8	4	(59·8)	19·3	5		71·2	6	Pd
58·7	6		17·5	4	(17·7)	69·6	6	
57·8	5		15·7	6		68·8	6	
57·1	3	(57·1)	15·3	5	(15·5)	68·2	6	
55·3	5	(55·2)	14·7	6		65·2	6+	

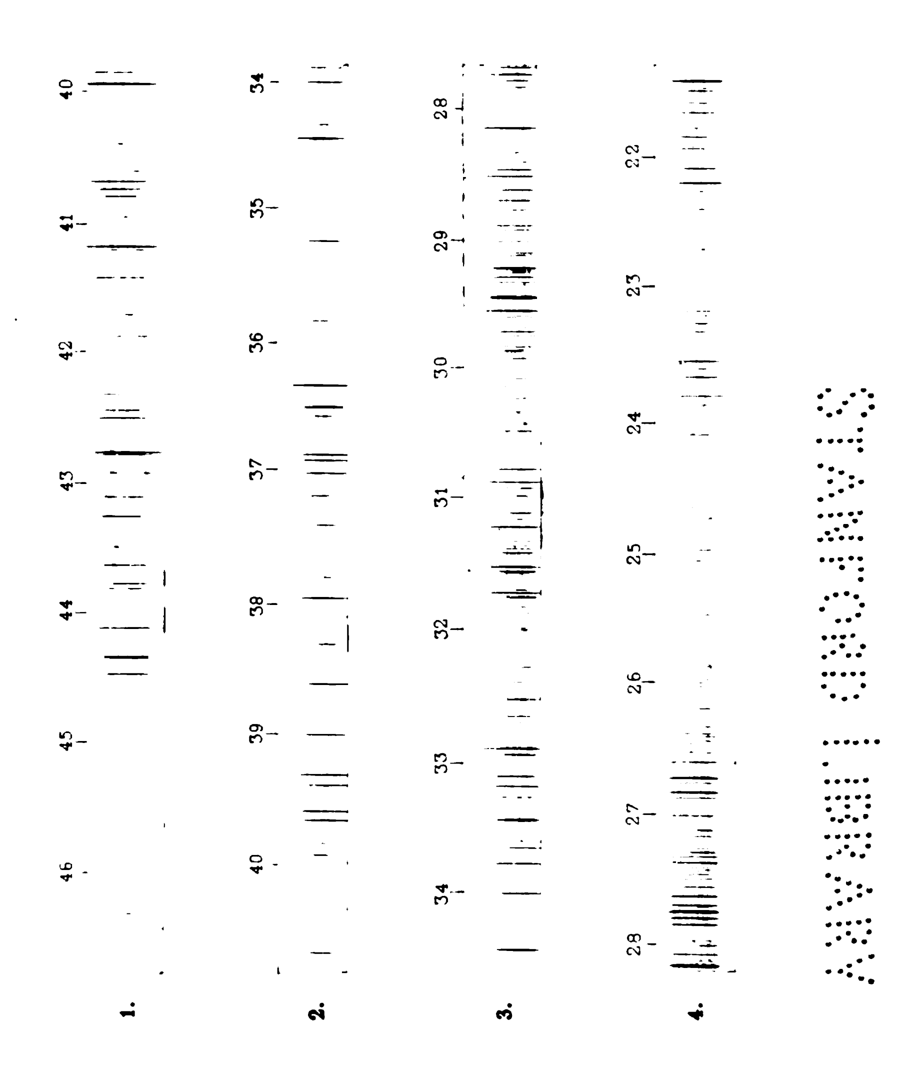
[1] Vielleicht eine umgekehrte Linie auf 2568·9.

λ	i	λ	i	λ	i
2461·0	2 (61·1)	2423·2	5 (23·3)	2373·7	6+ br.
56·2	4 } (56·0) [1]	22·6	6	72·9	6
55·7	2 }	22·2	5 (21·9)	72·1	6 Pd
52·1	6	20·1	5	71·7	6
51·0	6	18·7	6 Pd	70·3	6
50·5	6	17·5	4 (17·5)	69·7	5+ } (69·3)
50·0	6 Co	16·8	5	68·2	5 } Ir
49·5	6+	13·8	6	67·0	4 d. } (66·8)
48·8	6+	10·6	4 (10·7)	66·4	6+ }
47·8	4	07·8	6	65·3	6+
47·4	6	06·9	6	64·8	5 } (64·6)
46·1	6 Pd	05·3	4 (05·2)	64·3	5 }
45·2	5	04·0	6	63·8	6 Co
44·2	5 } (44·0)	03·3	5 (03·5)	63·2	6
43·8	5 } Co	00·6	5	62·2	6
42·8	5 Co	2399·3	6	61·6	6
41·3	6	98·9	6	60·9	6
40·6	6	96·6	2 (96·6)	60·5	6
38·7	4 (38·8)	95·7	6	59·7	5
37·9	6 Ni	92·4	2 (92·3)	58·0	6
36·8	4 (36·7)	90·7	4 (90·7)	55·8	6
35·2	5	89·9	6	55·2	6
35·0	6	89·2	6	54·2	6
33·6	6+	87·9	5	53·7	6
33·4	6+	86·2	5 (86·0)	53·0	6+ } (52·8)
32·7	6	85·5	4 (85·5)	52·5	6 }
31·5	5	84·9	6 Ir	51·7	6
30·8	5	83·6	4 (83·6)	51·3	6
29·5	5	82·8	5	48·0	5 } (47·7)
29·1	5	82·1	5	47·2	6 }
27·2	5 } (27·1)	81·9	5 Ir	46·8	5 } (46·6)
27·1	4 }	81·0	6	46·5	4 }
26·5	5	79·5	6+	45·0	5
25·4	6	78·6	6+ Co	44·4	6+
24·5	5 } (24·3)	78·0	4 (77·8)	43·6	6
24·1	5 }	76·8	6	43·3	6
23·8	6	76·4	6	42·5	5
23·5	5 (23·3)	75·0	5 (74·6)	41·8	6

[1] Oder eine umgekehrte Linie auf 2456·0.

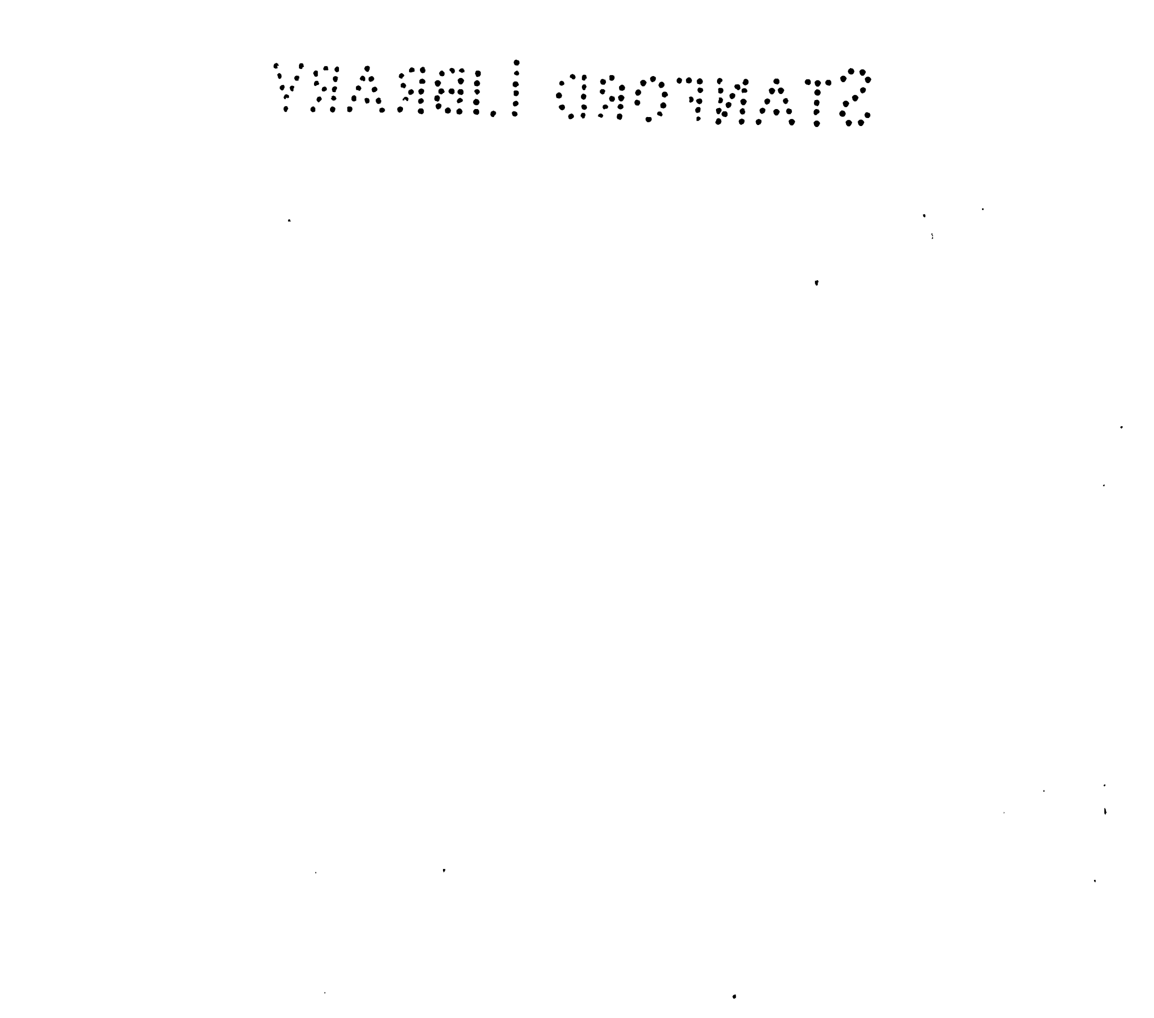
λ	i	λ	i	λ	i
2340·1	6	2284·2	4 (84·1)	2246·3	5
36·9	5	83·6	6	41·0	6
35·9	6	83·2	6	40·8	6
35·2	5	83·0	6	40·2	6
33·4	4 (33·3)	81·4	6	39·2	5
29·5	6+ d.	81·2	6	38·4	6
28·5	5	80·9	6	37·7	5
27·8	4 (27·6)	80·1	6	37·2	6
25·5	6	78·1	6	36·7	6
22·6	6	78·0	6	36·5	6
17·4	6	77·3	6	36·0	6
16·6	6	76·3	5	35·3	6
14·2	6	74·2	6	30·7	5
13·9	6	73·7	6	29·2	6+
13·5	6	71·5	6	28·3	6
12·6	5 (12·8)	70·5	6	26·7	5
09·0	6	68·9	5	26·0	6
08·2	6	68·0	6	25·1	5
05·9	5 (06·1)	65·7	6+	22·0	6
05·0	6	63·5	4 (63·3)	20·9	6
01·9	6	61·8	5 (61·6)	20·4	6
00·5	6+	58·6	6	19·4	6
2298·8	6 } (98·5)	58·4	6	06·5	6
98·3	4 }	57·3	6	2199·0	6
94·6	5 } (94·3)	55·7	6	96·2	6
94·2	4 }	55·5	5	94·2	6
90·2	2 (90·1)	50·9	5	92·8	6
89·7	6	50·1	6	91·0	6
88·3	6	49·7	6	86·0	6
86·4	6 Co	48·7	6+	82·0	6
86·2	6	47·8	6+	67·3	5
85·1	6	47·0	6		

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

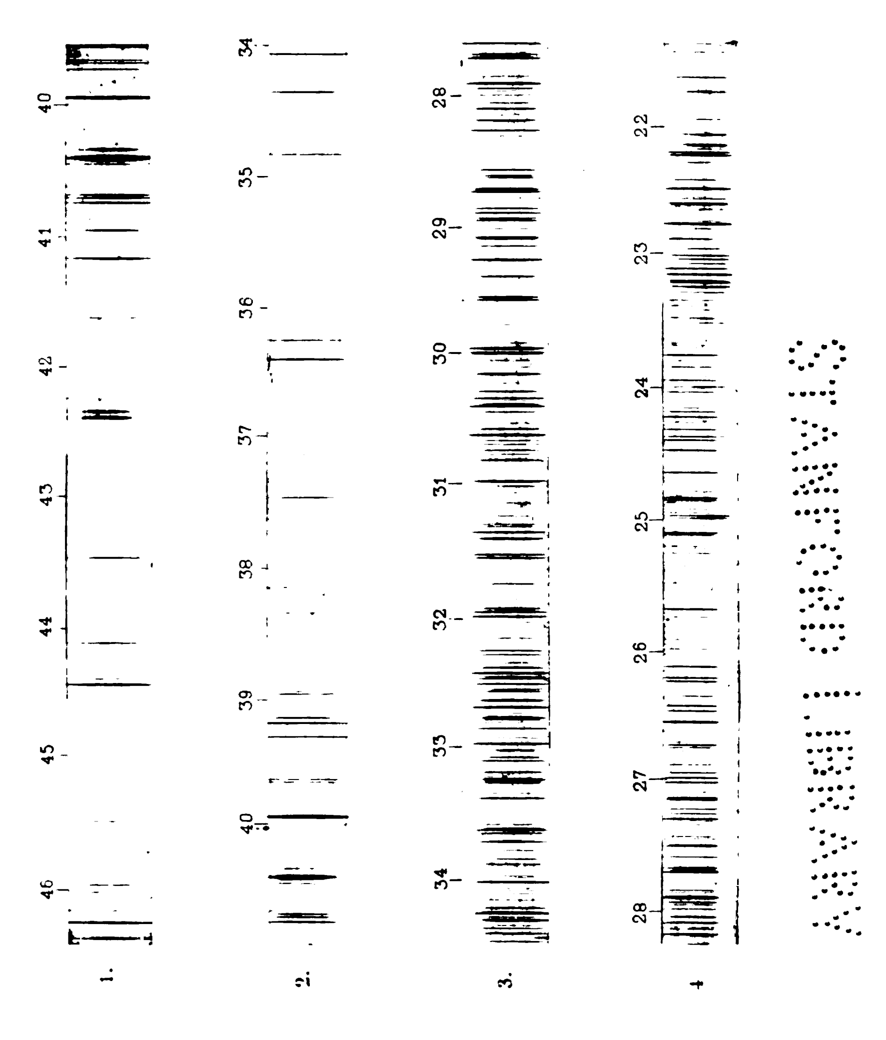


Molybdän.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

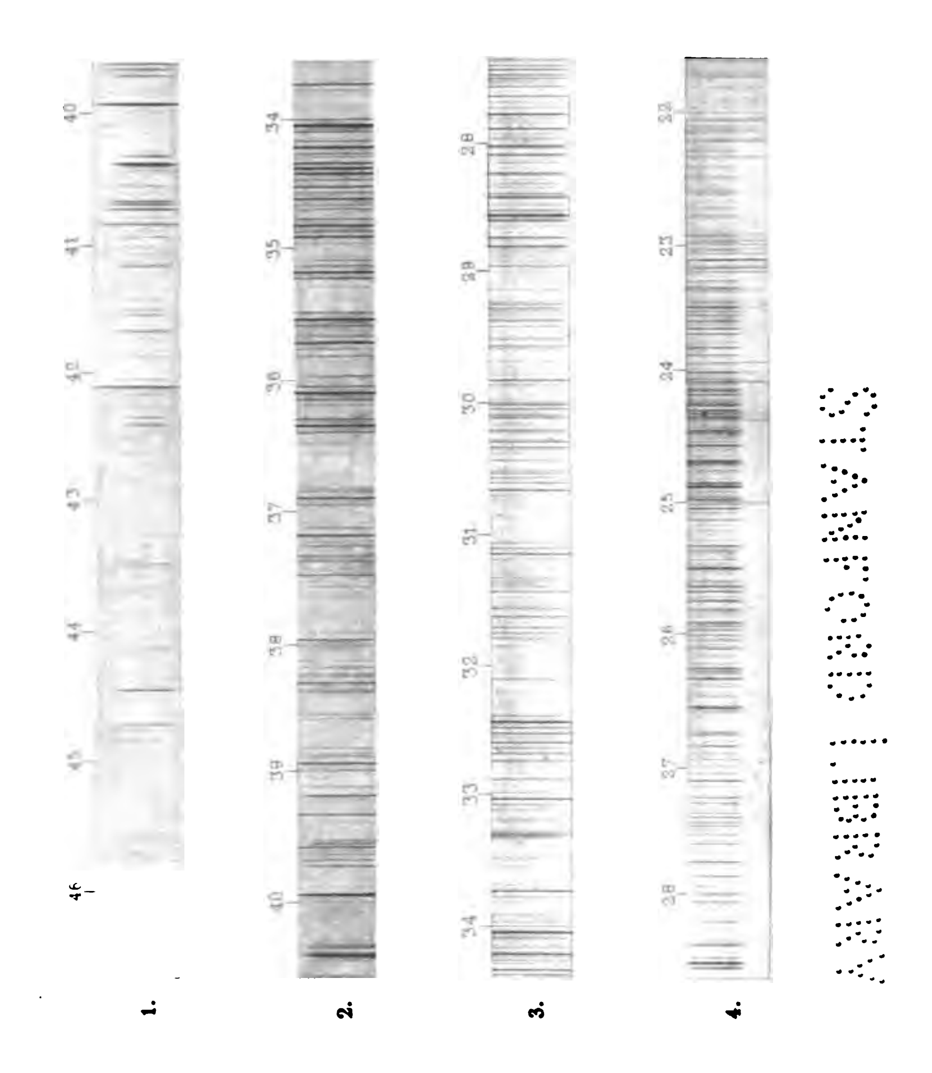


Platin.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Taf. III.

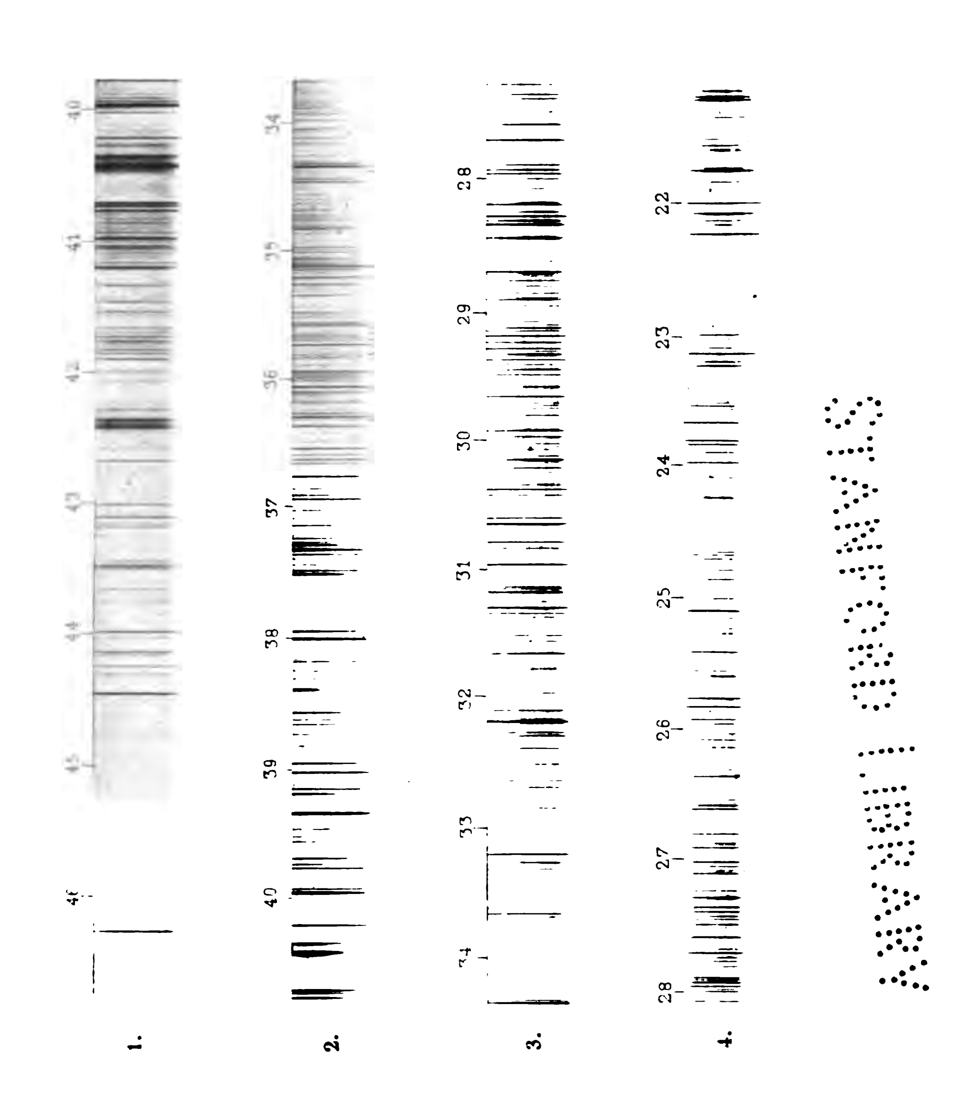
F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Palladium.

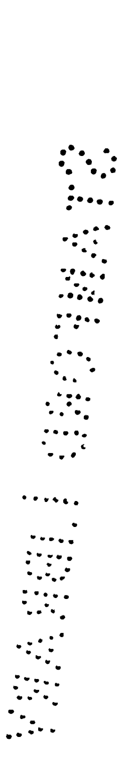
Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

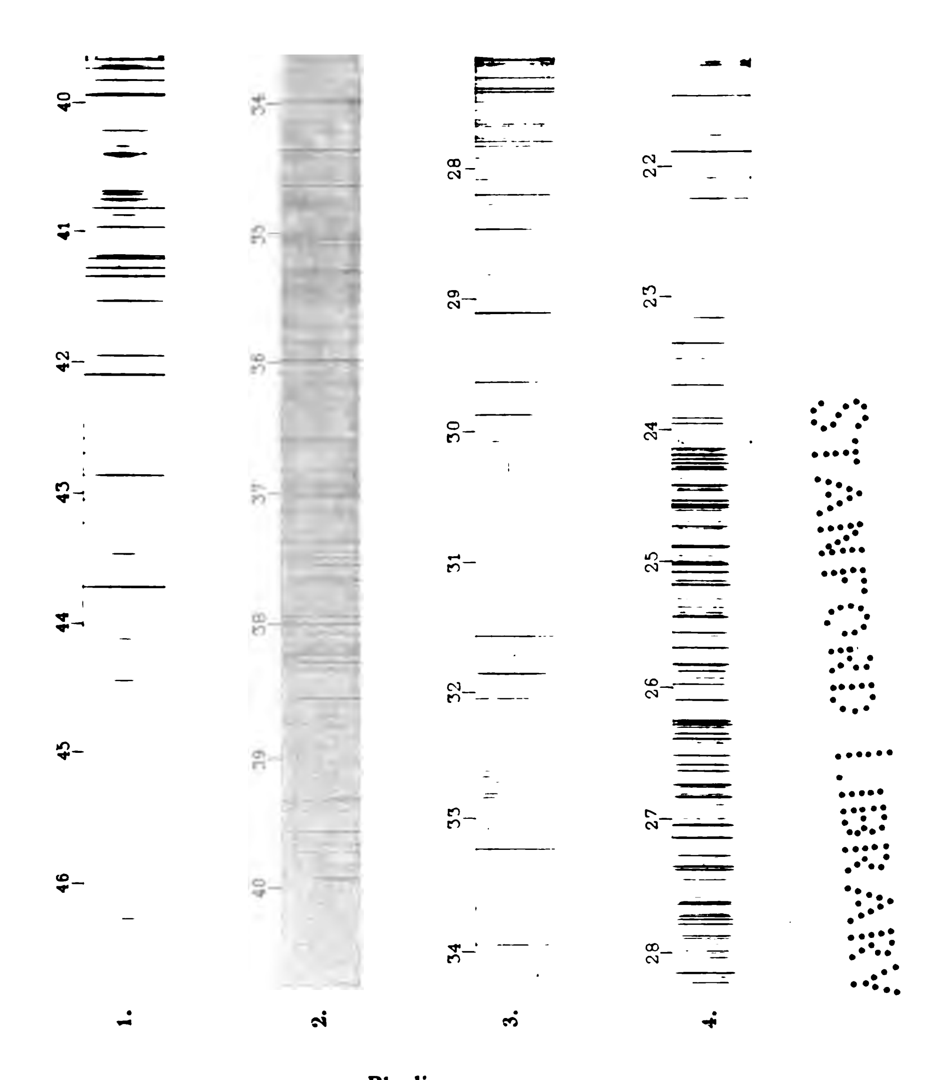


Iridium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Rhodium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes

von

W. Wirtinger in Innsbruck,

c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1896.)

I.

Während die Theorie des Potentials unter Annahme des Newton'schen Gesetzes seit Langem das Interesse der Physiker und Mathematiker in Anspruch genommen hat, ist dies nicht in gleichem Grade mit demjenigen allgemeineren Gesetz der Fall gewesen, bei welchem die Potentialfunction eines wirksamen Punktes durch $kmr^{-1-\alpha}$ gegeben ist.

Neuerdings hat nun Herr C. Neumann in seinem Buche: »Über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen« (Leipzig 1896) überhaupt die mit der Annahme eines elektrostatischen Gleichgewichtes verträglichen Anziehungsgesetze näher untersucht und dabei die Aufmerksamkeit auf die besondere Stellung, welche das obige Gesetz einnimmt, gelenkt. Da bereits Green dieses Gesetz ausführlicher behandelt hat, so nennt er dasselbe Green'sches Gesetz, und in diesem Sinne soll der Name auch hier gebraucht werden.

Green selbst hat sich mit diesem Gesetz in zwei Arbeiten befasst, von denen die erste aus dem Jahre 1832 den Titel führt: »Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids analogous to the electric fluids, with other similiar researches« (Cambridge Transactions, 1833, wieder abgedruckt in Mathematical Papers of Green, p. 119). Diese Arbeit erwähnt auch Herr Neumann ausführlich.

Die zweite Abhandlung stammt aus dem Jahre 1833 und führt den Titel: »On the Determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities« (Cambridge Transactions, 1835; Mathematical Papers, p. 187). Hier wird nun eine viel allgemeinere Auffassung zu Grunde gelegt und insbesondere gezeigt, wie durch Einführung einer neuen, zunächst überzähligen Variablen für das neue Gesetz eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gewonnen werden kann und daher auch ähnliche Methoden der Integralumformung anwendbar sind wie in der Theorie des Newton'schen Potentials. Diese Abhandlung werde ich im Folgenden noch häufig zu erwähnen haben.

Wenn man nun diese von Green geschaffenen Hilfsmittel verbindet mit dem Weierstrass'schen Begriff der Fortsetzung einer analytischen Function, so gelangt man zum Beweise eines Satzes, welcher die eigenthümliche Sonderstellung des Newton'schen Gesetzes innerhalb des allgemeinen Green'schen kennzeichnet. Dieser Satz lautet:

Ist unter Zugrundelegung des Elementargesetzes $mr^{-1-\alpha}$ für das Potential das Potential einer räumlichen Masse in einem endlichen massenfreien, übrigens beliebig kleinen Raumtheil gegeben, so ist dadurch die Massenvertheilung selbst eindeutig bestimmt in allen Fällen, in welchen α positiv und von Null verschieden ist, dagegen sicher nicht bestimmt für $\alpha = 0$.

Ein ganz analoger Fall gilt auch für den Raum von n Dimensionen und das Potentialgesetz $mr^{2-n-\alpha}$ und der Beweis überträgt sich ohneweiters auf diesen allgemeineren Fall. Dass für $n = 3$, $\alpha = 0$ aber die Massenvertheilung durch das Potential nicht bestimmt ist, ist längst bekannt und erhellt schon daraus, dass eine homogene Kugel in mannigfacher Weise durch concentrische Kugeln oder Kugelschalen ersetzt werden kann, ohne das Potential im Äusseren der ursprünglichen Kugel zu ändern.

Sei nun $k(\xi, \eta, \zeta)$ die räumliche Dichte im Punkte ξ, η, ζ und

$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

so ist das Potential der vorhandenen Massen im Punkte xyz gegeben durch

$$V = \int \frac{k(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r^{1+\alpha}}. \tag{1}$$

Anstatt nun V direct zu betrachten, studiren wir mit Green l. c. zunächst die Eigenschaften einer Function W, welche ausser xyz noch die Variable u enthält und für $u = 0$ in V übergeht. Wir definiren diese durch die Gleichung

$$W = \int \frac{k(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}}. \tag{2}$$

So lange nun der Punkt xyz nicht im Integrationsgebiet liegt und überdies gleichzeitig $u = 0$ ist, kann man W ohneweiters beliebig oft unter dem Integralzeichen differenziren. Eine einfache Rechnung lehrt dann, dass W der Differentialgleichung genügt:

$$\Delta W + \frac{d^2 W}{du^2} + \frac{\alpha - 1}{u} \cdot \frac{dW}{du} = 0, \tag{3}$$

welche bereits Green l. c. aufgestellt hat. Dabei bezeichnet ΔW wie üblich, die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten xyz. Ist nun W bekannt, so kann leicht $k(\xi,\eta,\zeta)$ ermittelt werden, wenn k in der Umgebung von $\xi\eta\zeta$ stetig und endlich ist. Im Gegenfalle verliert übrigens der Begriff der räumlichen Dichte seine unmittelbare Bedeutung als Grenzwerth des Quotienten: Masse durch Volumen, und ist nach Umständen erst durch Grenzübergang aus Nachbargebieten, in welchen Stetigkeit und Endlichkeit stattfindet, festzulegen.

Wir betrachten nun, um k aus W zu bestimmen, den Differentialquotienten

$$\frac{dW}{du} = -(1+\alpha)\,u \iiint \frac{k(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} \tag{4}$$

und grenzen um die Stelle x, y, z eine Kugel K vom Radius ρ ab, innerhalb welcher $k(\xi,\eta,\zeta)$ eine stetige Function des Ortes

ist. Ferner spalten wir das Integral in zwei Theile, von denen einer I_1 über die Masse innerhalb K erstreckt ist, der andere I_2 alle übrigen Massen umfasst.

Das Integral I_2 wird nun gewiss vergrössert, wenn wir im Nenner statt r^2+u^2 einsetzen ρ^2 und gleichzeitig im Zähler $k(\xi, \eta, \zeta)$ durch seinen absoluten Werth ersetzen. Wir bekommen so die Gleichung

$$I_2 = \theta \rho^{-3-\alpha} M,$$

wo θ einen echten Bruch und M die gesammte in Betracht kommende Masse ohne Rücksicht auf ihr eventuelles Vorzeichen bedeutet. Diese letztere setzen wir natürlich als endlich voraus.

Um für das erste Integral ebenfalls eine Abschätzung zu bekommen, sei $\varkappa$ der grösste Werth der Differenz zweier in der Kugel K vorkommenden Werthe von $k(\xi, \eta, \zeta)$. Dann sinkt nach der Voraussetzung über die Stetigkeit von k immer $\varkappa$ unter jede Grenze, wenn ρ unter jede Grenze abnimmt. Man kann dann setzen

$$I_1 = (k(x, y, z) + \Theta_1 \varkappa) \iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}},$$

wo Θ_1 wieder einen echten Bruch bedeutet. Für das Integral findet man bei Einführung von Polarcoordinaten

$$\iiint \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} = 4\pi \int_0^\rho \frac{r^2\, dr}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} =$$

$$= 4\pi u^{-\alpha} \int_0^{\frac{\rho}{u}} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}}, \tag{5}$$

wo $r = ut$ gesetzt ist.

Damit folgt nun aus 4) die Gleichung

$$u^{\alpha-1} \frac{dW}{du} = -4\pi(1+\alpha)(k(x, y, z) + \Theta_1 \varkappa) \int_0^{\frac{\rho}{u}} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}} +$$

$$+ \theta u^\alpha \rho^{-3-\alpha} M. \tag{6}$$

Wird nun zunächst ρ beliebig klein, aber fest gewählt und lässt man hierauf u zu Null abnehmen, so convergirt, da α positiv ist, der zweite Theil der obigen Summe gegen Null, während das Integral des ersten Theiles zur oberen Grenze ∞ erhält und nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Gammafunctionen nach Einführung einer neuen Variablen für t^2 den Werth liefert:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\alpha}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1+\alpha)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}.$$

Da ferner die linke Seite der Gleichung 6) von ρ ganz unabhängig ist, so muss es auch die rechte Seite sein und wir erhalten schliesslich, wenn wir mit u zur Grenze Null übergehen

$$\lim_{u=0} u^{\alpha-1}\frac{dW}{du}=-4\pi^{3/2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\cdot k(x,y,z). \qquad 7)$$

Diese Formel wurde bereits von Green aufgestellt, ist aber hier auf einem anderen, mehr directen Weg bewiesen.

Zufolge der Differentialgleichung 3) kann man die Formel 7) auch schreiben

$$\lim_{u=0} u^{\alpha}\left(\Delta W+\frac{d^2W}{du^2}\right)=4\pi^{3/2}\frac{(\alpha-1)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}\cdot k(x,y,z),$$

wodurch ihre Analogie mit der Laplace-Poisson'schen Gleichung mehr hervortritt, jedoch der Fall $\alpha=1$ eine besondere Untersuchung nöthig machen würde.

Können wir also W ermitteln für alle Werthe des u ausser $u=0$, sobald uns V gegeben ist, so können wir nach Formel 7) durch einen Grenzprocess hieraus auch die Dichte finden, so lange α positiv und von Null verschieden ist. Wir bezeichnen nun der Kürze halber dasjenige Gebiet der Variablen x, y, z, u,

für welches $u = 0$ ist und zugleich der Punkt xyz innerhalb der Massen liegt, als Gebiet M. Aus der Integralformel für W ergibt sich dann unmittelbar, dass W in der Umgebung jeder Stelle x_1, y_1, z_1, u_1, welche ausserhalb des Gebietes M liegt, nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, $u-u_1$ entwickelt werden kann. Dabei sind selbstverständlich die Variablen durchaus reell genommen. Daraus folgt aber, dass die Function W ein eindeutiger Zweig einer analytischen Function ist, so lange $xyzu$ reell und ausserhalb des Gebietes M bleiben. Da ferner das dreifach ausgedehnte endliche und begrenzte Gebiet M das vierfach ausgedehnte Gebiet der Variablen $xyzu$ nicht in Theile zerlegt, so ist W ein einziger Zweig einer solchen Function.

Daraus folgt, dass die Function W schon im ganzen Gebiet $xyzu$, ausgenommen das Gebiet M, vollständig bestimmt ist, wenn sie in einen beliebig kleinen, aber endlichen Theil des Gebietes, der mit M nichts gemeinsam hat, gegeben ist. Denn man kann dann von der Potenzreihenentwicklung um eine erste Stelle ausgehend, durch eine endliche Anzahl von Fortsetzungen, d. h. durch eine endliche Anzahl identischer Umformungen der nach $(x-x_1)$, $(y-y_1)$, $(z-z_1)$, $(u-u_1)$ fortschreitenden Potenzreihe zu der Potenzreihenentwicklung für die Umgebung einer beliebigen Stelle ausserhalb M gelangen.

Aber da W der Differentialgleichung 3) genügt, so ist W bereits vollständig bestimmt, wenn es nur in einem endlichen, massenfreien Raumtheil gegeben ist, für welchen $u = 0$ ist. In der That ist für $u = 0$ und eine Stelle ausserhalb des Gebietes M der Differentialquotient $\frac{dW}{du} = 0$, und da es sich in der Umgebung einer solchen Stelle um Potenzreihen aller Variablen handelt, so kann man dieselben auch nach u ordnen und setzen

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} V_n u^n,$$

wo die V_n Functionen von x, y, z allein sind und V_0 die in einem endlichen Raumtheil als gegeben angenommene Function V ist, während V_1 gleich Null ist.

Unter diesen Umständen kann man die Potenzreihe für W direct in die Differentialgleichung 3) einsetzen und erhält zur Bestimmung der V_n die Gleichung

$$\Delta V_n + (n+2)(n+\alpha) V_{n+2} = 0.$$

Hieraus ergibt sich wegen $V_1 = 0$ allgemein

$$V_{2\varkappa+1} = 0$$

und

$$V_{2\varkappa} = (-1)^{\varkappa} \frac{\Delta^{\varkappa} V_0}{2^{\varkappa}.\varkappa!\,\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2\varkappa-2)}. \qquad 8)$$

Dagegen versagt diese Bestimmung, wenn $\alpha = 0$ ist. Hier bedeutet $\Delta^{\varkappa}$ das Resultat der $\varkappa$maligen Anwendung der Operation Δ.

Kennt man also in einem noch so kleinen, aber endlichen massenfreien Raumtheil die Function V_0, d. i. das Potential der wirkenden Massen, so kennt man in einem endlichen Gebiet der Variablen $xyzu$ die Function W. Da aber diese überallhin ausserhalb des Gebietes M fortsetzbar ist und der Grenzwerth in der Gleichung 5) nicht im Gebiete M, sondern bei Annäherung an dasselbe von aussen zu nehmen ist, so ist dadurch auch $k(x, y, z)$ vollständig bestimmt und unser Satz daher bewiesen.

II.

Es ist im Vorigen ausdrücklich zu beachten, dass die Function V_0 im Ausgangsgebiet nicht etwa willkürlich gegeben sein darf, sondern vielmehr vorausgesetzt ist, sie sei das Potential einer bloss räumlich vertheilten, nicht aber auf Linien oder Flächen concentrirten Masse. Es ist jedoch nicht schwer, ein System von hinreichenden Bedingungen dafür anzugeben, dass eine solche Function Potential einer im Endlichen gelegenen räumlich vertheilten Masse ist.

Wenn nämlich eine Function V

1. überall innerhalb des betrachteten endlichen Gebietes nach ganzen positiven Potenzen entwickelbar ist;

2. die mit Hilfe von 8) hergestellte Reihe

$$W = \sum_{0}^{\infty} V_{2\varkappa} u^{2\varkappa}$$

einen Convergenzbereich hat, wenn sie als Potenzreihe der Variablen $x-x_1, y-y_1, z-z_1, u$ aufgefasst wird;

3. die Function W für alle reellen Werthe von x, y, z, u, für welche u von Null verschieden ist, fortgesetzt werden kann und sich hiebei als eindeutig erweist;

4. der Grenzwerth

$$\lim_{u=0} u^{\alpha-1} \frac{dW}{du}$$

im Allgemeinen gleichmässig convergirt und nur in einem endlichen Gebiet der x, y, z von Null verschieden und in diesem Gebiet eine Function von x, y, z ist, welche im Allgemeinen stetig ist;

5. wenn schliesslich die Werthe von W auf einem Gebiete, welches durch die Gleichung $x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2$ charakterisirt ist, von einem bestimmten Werth von R an sämmtlich kleiner sind als $AR^{-1-\alpha}$, während die Werthe von $\frac{dW}{dR}$ kleiner werden als $BR^{-2-\alpha}$;

dann ist V in der Form darstellbar

$$V = \int \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^{1+\alpha}},$$

wenn die Function k durch die Gleichung definirt ist:

$$\lim_{u=0} u^{\alpha-1} \frac{dW}{du} = -4\pi^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} k(x, y, z).$$

Dass die Eigenschaften 1, 2, 3, 5 nothwendig sind, folgt ohneweiters aus der Integralform für V, dagegen würde es zu complicirten Untersuchungen führen, auch die Eigenschaft 4) auf das nothwendige Mass zurückzuführen. Zu bemerken ist, dass aus 1, 2, 3 sich bereits ergibt, dass W der Differentialgleichung 3) genügt.

Um nun diese Bedingungen als hinreichende zu erkennen, betrachten wir mit Green das Integral

$$I=\int du\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,u^{\alpha-1}\left(\frac{dW}{dx}\cdot\frac{dU}{dx}+\frac{dW}{dy}\cdot\frac{dU}{dy}+\right.$$
$$\left.+\frac{dW}{dz}\cdot\frac{dU}{dz}+\frac{dW}{du}\cdot\frac{dU}{du}\right),$$

wobei die Integration über ein Gebiet erstreckt ist, innerhalb dessen und auf dessen Grenze die Functionen U, W eindeutig endlich stetig sind und ebensolche erste und zweite derivirte haben. Man kann dasselbe durch partielle Integration, wie beim Beweise des gewöhnlichen Green'schen Satzes umformen und erhält:

$$\int u^{\alpha-1}U\frac{dW}{dn}\cdot d\omega-\int u^{\alpha-1}U\left[\Delta W+\frac{d^2W}{du^2}+\frac{\alpha-1}{u}\frac{dW}{du}\right]d\xi\,d\eta\,d\zeta\,du$$

und hieraus durch Vertauschung von U mit W und Subtraction

$$\int u^{\alpha-1}\left|U\left(\Delta W+\frac{d^2W}{du^2}+\frac{\alpha-1}{u}\frac{dW}{du}\right)-W\left(\Delta U+\frac{d^2U}{du^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\alpha-1}{u}\frac{dU}{du}\right)\right|du\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\int u^{\alpha-1}\left(U\frac{dW}{dn}-W\frac{dU}{dn}\right)d\omega. \qquad 9)$$

Dabei bedeuten $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dW}{dn}$ die Differentialquotienten nach der Normale der Begrenzung des vierdimensionalen Integrationsgebietes und $d\omega$ das Differential der dreifach ausgedehnten Begrenzung. Es ist also, wenn in der Nähe einer Stelle der Begrenzung dieselbe durch die Gleichung $\Phi(x, y, z, u) = 0$ definirt ist:

$$\frac{dU}{dn}=S\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\,\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial x}\,\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)$$

wenn

$$S=\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Dabei ist das Vorzeichen von S so zu bestimmen, dass der Punkt mit den Coordinaten

$$x+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}S,\quad y+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}S,\quad z+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}S,$$

$$u+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial u}S$$

für genügend kleine positive λ im Innern des Integrationsgebietes liegt, wenn x, y, t, u auf der Grenze desselben liegen.

Setzt man in der Gleichung 9) nun

$$U=(r^2+u^2)^{-\frac{1+\alpha}{2}},$$

wo wieder

$$r^2=(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2$$

und x, y, z eine Stelle bedeutet, an welcher sich W regulär verhält, und integrirt links in 9) über ein Gebiet, welches durch die Bedingungen $\xi^2+\eta^2+\zeta^2+u^2\leqq R^2$ und $u\geqq h$ definirt ist. wo h eine beliebig kleine, R eine beliebig grosse positive Grösse bedeutet, sind ferner für die Function W die Bedingungen 1. bis 5. erfüllt, so gilt auch die Gleichung 9), und zwar reducirt sich ihre linke Seite auf Null, weil sowohl W, als U der Differentialgleichung 3) Genüge leisten. Das Integral links ist dann gesondert über die Mannigfaltigkeit $x^2+y^2+z^2+u^2=R^2$, $u>h$ und die Mannigfaltigkeit $x^2+y^2+z^2<R^2-h^2$, $u=h$ zu erstrecken. Geometrisch ausgedrückt integriren wir also über eine dreifach ausgedehnte Halbkugel des vierdimensionalen Raumes und über ein Stück eines zum Raume xyz parallelen, im Abstand h gelegenen ebenen Raumes, welches innerhalb der Kugel $x^2+y^2+z^2+u^2=R^2$ liegt. Dabei kommt es jedoch nur auf die Grenzwerthe dieser Integrale für $R=\infty$ und $h=0$ an. Beginnen wir mit der Integration über die Mannigfaltigkeit $u=h$, so erhalten wir, da $\frac{dW}{du}=-\frac{dW}{dn}$, $\frac{dU}{du}=-\frac{dU}{dn}$ wird

$$-\lim_{h=0}h^{\alpha-1}\int\left(U\frac{dW}{du}-W\frac{dU}{du}\right)_{u=h}d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

und da $\lim\limits_{u=0} u^{\alpha-1} \frac{dW}{du}$ nur in einem endlichen Gebiet von Null verschieden ist, so erhalten wir in der Grenze vom ersten Glied einfach

$$4\pi^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \int \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^{1+\alpha}},$$

wenn wieder die Function k durch die Formel 7) mit Hilfe von W definirt wird.

Wegen

$$\frac{dU}{du} = \frac{-(1+\alpha)u}{(r^2+u^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}}$$

liefert das zweite Glied des obigen Integrals in der Grenze überall 0, ausser in der Nähe der Stelle x, y, z.

In der Nähe dieser Stelle aber können wir das nämliche Grenzverfahren, durch welches seinerzeit Formel 7) bewiesen wurde, anwenden. Denn wenn wir hier W nach positiven Potenzen von u entwickeln, so sehen wir sogleich, dass nur das Anfangsglied der Entwicklung einen Beitrag zur Grenze liefern kann. Wenn man dies berücksichtigt, so tritt in der Ableitung von Formel 7) einfach $W(\xi, \eta, \zeta, 0) = V$ an die Stelle von k. Daher liefert das zweite Glied zum Integral den Beitrag

$$-4\pi^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} W(x, y, z, 0).$$

Von dem Integral über die Halbkugel $x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2$ sieht man sogleich, dass es zufolge der Voraussetzung 5) die Null zur Grenze hat, da es kleiner wird als $G.R^{-\alpha}$, wenn G eine endliche Grösse bedeutet. Wir erhalten also schliesslich die Gleichung

$$\int \frac{k(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r^{1+\alpha}} = W(y, y, z, 0) = V(x, y, z).$$

Unter den angegebenen Bedingungen ist also in der That V das Potential einer räumlichen Masse, deren Vertheilung durch die Formel 7) mit Hilfe der Function W dargestellt ist.

In ähnlicher Weise lassen sich auch andere Probleme der gewöhnlichen Potentialtheorie auf das Green'sche Gesetz übertragen, und es ist mir vielleicht erlaubt, bei anderer Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Über die Brechungsquotienten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen

von

Dr. **Anton Lampa.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

I.

Herr P. Lebedew hat zu seiner schönen Untersuchung über die Doppelbrechung der Strahlen elektrischer Kraft[1] eine Versuchsanordnung verwendet, welche Wellen von 6 *mm* Länge und bei weiterer Verkleinerung des Erregers noch kürzere zu liefern im Stande war. Es schien mir an sich interessant genug, eine Versuchsanordnung aus eigener Anschauung kennen zu lernen, welche es ermöglicht, die classischen Versuche von Hertz auf dem Raume eines Tisches auszuführen, und so ging ich daran, mir die Apparate zur Herstellung so kurzer Wellen anzufertigen, zumal Herr Lebedew einen Versuch betreffend die Drehung der Polarisationsebene nicht gemacht oder mindestens nicht beschrieben hat. Obzwar der Erfolg, soweit er die letztgenannte Frage betrifft, meinen Erwartungen entsprach, d. h. ebenso wie Herrn Righi's mit circa 10 *cm* langen Wellen angestellter Versuch[2] negativ ausfiel, so wurde mir doch die ziemliche Mühe und Zeit, welche die Zusammenstellung der Versuchsanordnung in Anspruch nahm, anderweitig reichlich gelohnt. Über die Resultate meiner Arbeit soll in dieser Abhandlung berichtet werden.

[1] Wied. Ann., Bd. 56, S. 1, 1895.

[2] Beiblätter, 1895, S. 357.

Die Anordnung, welche ich traf, war jedoch in vielen Einzelheiten von der Lebedew'schen abweichend, da ich bei der Zusammenstellung auch die Bedürfnisse der Demonstration im Auge hatte. Dies veranlasste mich zu versuchen, ob nicht der Coherer, den Herr v. Lang bei seinen Interferenzversuchen mit elektrischen Wellen[1] als Detector verwendet hatte, meinen Zwecken genügen würde. Dies war in der That der Fall. Auf diese Weise gelang es, eine bedeutende Einfachheit der Anordnung zu erzielen. Den Erreger stellte ich nach Herrn Lebedew's Angaben her. Es ist schwierig, so kurze Platincylinder, wie sie zur Erzeugung der kurzen Wellen nothwendig sind, in der richtigen Weise in Glasröhren einzuschmelzen. Ich schnitt mir daher von einem Thermometerrohre, in dessen Lumen die 0·5 *mm* dicken Platincylinder hineinpassten, zwei circa 6 *cm* lange Stücke ab, schob nun die Platincylinder so weit hinein, dass etwa ihre Hälfte noch herausragte und befestigte dieselben noch seitlich durch eine Spur von Einschmelzglas, um Verrückungen ganz zu verhindern. Die Stromzuführung zu den Platincylindern geschah durch Funkenstrecken von 2·5 *mm* Länge. Als Zuleiter innerhalb der Glasröhren dienten Platindrähte von 0·2 *mm* Durchmesser. Diese beiden Drähte wurden dann unmittelbar mit den Polen eines durch eine Tauchbatterie von 8 Smee-Elementen betriebenen Inductoriums mittlerer Grösse (Funkenlänge 25 *mm*) durch Kupferdraht verbunden. Von der Einschaltung eines Flüssigkeitswiderstandes und eines Condensators sah ich ab, ebenso wie von der Einsenkung des Erregers in eine Flüssigkeit. Die Nothwendigkeit, welche sich bei dieser bequemen Anordnung geltend macht, die Endflächen der Erregercylinder zeitweilig zu putzen — was übrigens im Verlauf meiner ganzen Arbeit nur zweimal geschah — erscheint mir gegenüber der Anwendung eines Flüssigkeitsbades als das kleinere Übel.

Den Primärleiter befestigte ich in einem parabolischen Cylinderspiegel ebenfalls in der einfachsten Weise. Dieser Spiegel hatte 6 *mm* Brennweite und 56 *mm* Öffnung. Hergestellt wurde er in der Weise, dass ich aus einem 10 *mm*

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CIV, II. a. 1895.

dicken Brettchen von weichem Holze zwei entsprechende Parabeln ausschnitt und an dieselben ein dünnes Zinkblech mittelst kleiner Schrauben befestigte, so dass der innere Abstand der beiden Brettchen 30 *mm* betrug. Hierauf wurden auf der Drehbank in die Brettchen zwei geeignete Löcher gebohrt, deren Centra mit den Brennpunkten der Parabeln zusammenfielen. Die Glasröhren, welche den Primärleiter tragen, passen in die Löcher genau hinein, jedoch sind Verschiebungen möglich. Letztere wurden auch nur mit der Hand vorgenommen; ich habe auch das Bedürfniss nach einer Feineinstellung mit Mikrometerschraube nicht empfunden.

Zum Nachweis der elektrischen Wellen benützte ich, wie schon erwähnt, einen Coherer, welcher, abgesehen von der Grösse der Schrauben — die von mir benützten wogen etwa 0·06 *g* — nach den Angaben von v. Lang (l. c.) angefertigt war. Der Coherer liegt horizontal auf zwei an der Längsseite eines Holzkistchens, welches aussen ganz mit Zinkblech von 1 *mm* Dicke verkleidet wurde, angebrachten Trägern von Holz. In demselben Kistchen befindet sich das Trockenelement. Gegenüber der Mitte des Coherers befindet sich ein kreisförmiger Ausschnitt von circa 46 *mm* Durchmesser, in welchem ein Messingrohr von 45 *mm* innerer Lichte und circa 3 *cm* Länge eingelöthet ist. An der einen Schmalseite des Kistchens ist ein zweiter kleinerer Ausschnitt mit Messingrohransatz angebracht, durch welchen die beiden Leitungsdrähte zu einem für objective Ablesung eingerichten v. Lang'schen Galvanometer hinausführen. Das letztere war von dem Experimentirtische etwa 6 *m* entfernt und für die Wirkung der Primärspule des Inductoriums ganz unempfindlich.

Grosse Sorgfalt muss auf die Beschirmung der Zuleitungsdrähte gegenüber den elektrischen Wellen verwendet werden. Die Widerstandsverminderung des Coherers tritt auch dann ein, wenn die Leitungsdrähte, welche ihn mit dem Trockenelement und der Galvanometerrolle verbinden, von den Wellen getroffen werden. Ich umwickelte dieselben daher mit Stanniol, was jedoch keinen genügenden Schutz gewährte, indem durch die nicht ganz zu vermeidenden Ritze in der Stanniolumhüllung eine noch wirksame Bestrahlung eintrat. Ich versuchte in Folge

dessen sogar, bloss ein Stück des Leitungsdrahtes als Empfänger zu verwenden, jedoch ohne Erfolg. Zu diesem Zwecke muss das betreffende Stück der Leitung senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung der Wellen stehen und bei dieser Stellung erweist sich die Bestrahlung als unwirksam. Ich ersetzte hierauf die Stanniolbewicklung durch ein Bleirohr, welches einerseits in das Kistchen hineinragte, anderseits bis nahe an das Galvanometer hinführte. Eine Beschirmung der Galvanometerrolle erwies sich bei der angegebenen Entfernung als überflüssig. Die zinkverkleidete Kiste war auf ihrer oberen Seite bloss durch einen abhebbaren Deckel von Zinkblech verschlossen.

Mit den beschriebenen Apparaten lassen sich die Hertz'schen Versuche sehr leicht und präcise demonstriren. Der Primärleiter steht dabei vertical. Ich halte mich bei der Beschreibung dieser bekannten Versuche nicht auf und erwähne nur kurz, dass die aus dem Spiegel austretenden Wellen vollständig polarisirt sind. Der Versuch, die Polarisationsebene der Wellen zu drehen, indem ich sie durch einen 40 *cm* langen und 30 *mm* dicken Holzcylinder, welcher in einem Solenoid von drei Windungslagen stak, hindurchschickte, blieb, wie erwähnt, erfolglos. Das Solenoid war hiebei von einem Strome von 15 Ampère durchflossen.

II.

Bei der Anstellung des Brechungsversuches, zu welchem ich ein Paraffinprisma benützte, zeigte es sich, dass die Lage des Maximums der Einwirkung auf den Coherer ein recht scharf bestimmbares sei; dies veranlasste mich, meine Versuchsanordnung zu einigen quantitativen Bestimmungen zu verwenden. Zunächst ergänzte ich meine Apparate durch Anfertigung eines primitiven, für diese Zwecke jedoch hinreichenden Goniometers. Ein Theilkreis von 190 *mm* Durchmesser wurde auf einem Fusse drehbar befestigt. Der Zapfen, welcher den Theilkreis trägt, tritt durch denselben hindurch und dient gleichzeitig einem auf den Theilkreis aufgesetzten Tischchen von 112 *mm* Durchmesser als Drehpunkt. Das Tischchen ist fix mit einer Alhidade verbunden und trägt bei den Versuchen den Primärleiter. Zu diesem Zwecke ist es mit einem Schlitz ver-

sehen, durch welchen das aus dem unteren Brettchen des Spiegels herausragende Glasrohr hindurchgeschoben werden kann und welcher ausserdem die Entfernung des Primärleiters von dem Mittelpunkt des Goniometers zu variiren gestattet. Der Theilkreis ist in Grade getheilt, die Alhidade trägt bloss eine Marke; bei der Ablesung wurden die Bruchtheile von Graden geschätzt. Goniometer und Zinkkasten wurden so aufgestellt, dass die Funkenstrecke der Mitte des Kreisausschnittes gegenüber zu liegen kam. Das Inductorium stand auf einem anderen Tische als der Coherer, denn der letztere ist gegen Erschütterungen sehr empfindlich; ich habe bemerkt, dass

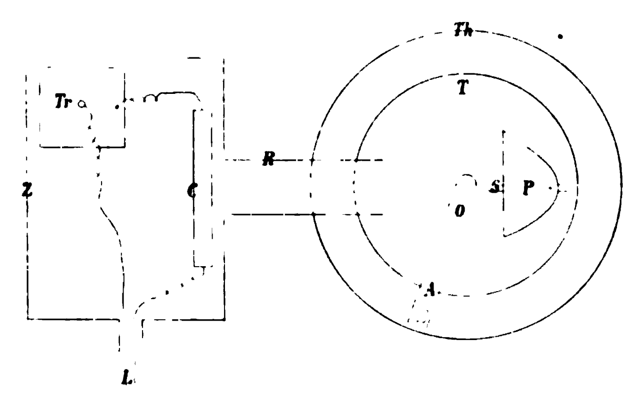


Fig. 1.

Erschütterungen, welche ihn longitudinal durcheilen, den Widerstand herabsetzen, auch Töne (Pfiffe) wirken in gleicher Weise, während eine starke Erwärmung (durch Bespülung mit einer kleinen Flamme) den Widerstand erhöht. Das 3 *cm* lange Messingrohr, von welchem ich oben sprach, wurde durch einen 18 *cm* langen, gleich weiten Ansatz verlängert; der Nutzen dieses Ansatzes wird gleich besprochen werden.

In der nebenstehenden Fig. 1 ist die gesammte Anordnung dargestellt. Darin bedeuten: *Z* Zinkkasten, *R* Ansatzrohr, *Tr* Trockenelement, *C* Coherer, *L* Leitung zum Galvanometer, *Th* Theilkreis, *T* Tischchen, *A* Alhidade, *P* Parabolischer Spiegel, *S* Schlitz. Die Entfernung des Mittelpunktes 0 vom Coherer beträgt 25 *cm*.

Die Nulllage wurde stets nur auf Grund der geometrischen Verhältnisse eingestellt; eine scharfe Einstellung durch die Wellen selbst ist nicht möglich, woran jedenfalls auch der Umstand Schuld trägt, dass der Spiegel nicht streng parabolisch und das ihn verlassende Strahlenbündel demgemäss nicht parallel ist. Die Anwendung eines Spaltes am Ansatzrohr schien mir in Folge seiner beugenden Wirkung auch nicht vortheilhaft und in der That war auch kein Erfolg mit einem solchen zu erzielen. Für die Bestimmung der günstigsten Stellung des Prismas war jedoch der mangelnde Parallelismus des Strahlenbündels von keiner Bedeutung. Der Haupttheil der den Spiegel

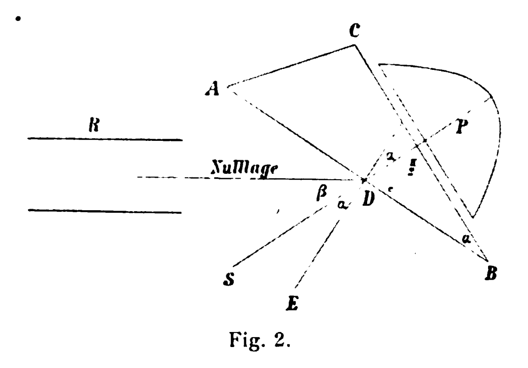


Fig. 2.

verlassenden Strahlen ist doch parallel zu der Symmetrieebene desselben, die abweichenden Strahlen werden durch die Brechung im Prisma noch weiter divergent gemacht, so dass sie in das Ansatzrohr nicht mehr eintreten. Der Brechungsquotient wurde auf die Weise bestimmt, dass die eine Prismenfläche senkrecht zur Strahlenrichtung orientirt wurde, während die zweite Prismenfläche die Drehungsaxe des Goniometertischchens enthielt. Hierauf wurde diejenige Stellung des Prismentisches aufgesucht, bei welcher die Wirkung auf den Coherer ein Maximum war.

Die Berechnung des Brechungsquotienten erhellt aus Fig. 2. P ist der parabolische Spiegel, ABC das Prisma mit dem brechenden Winkel α, E das Einfallsloth, S die Mittellinie des Spiegels, D die Drehungsaxe des Tischchens, R das Ansatzrohr.

Ist β der Winkel, um welchen diese Mittellinie gedreht wurde, so ist der Brechungsquotient

$$n = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}.$$

Die Einstellung auf das Maximum ist, wie gesagt, eine ziemlich genaue, wenn sich auch das Nachlassen der Wirkung der Batterie geltend macht. Um eine Vorstellung von der Genauigkeit zu geben, setze ich eine Messungsreihe hieher. Nach jeder Messung wird der Coherer zurückgeklopft, wobei darauf geachtet wird, dass das Lichtbild möglichst zu der alten Ruhelage zurückkehrt. Die folgende Messungsreihe wurde bei einem Crownglasprisma gewonnen; es bedeuten β die Drehungswinkel, A die Ausschläge in Skalentheilen:

β	A
25°	28 Theilstriche.
23	35 »
22	24 »
23	31 »
25	27 »
23	28 »
24	21 »
23	30 »

Das Maximum liegt also bei 23°. Die Genauigkeit der Einstellung lässt sich jedoch noch weiter treiben bei Substanzen von hohem Brechungsvermögen; denn bei denselben ist die oben besprochene Wirkung auf die divergenten Strahlen eine grössere.

Bezüglich der Grösse der verwendeten Prismen ist zu bemerken, dass sie die ganze Öffnung des Spiegels verdecken.

III.

Ehe ich die eigentlichen Messungen mittheile, will ich einen Beugungsversuch anführen, welchen ich zur Bestimmung der Wellenlänge angewendet habe. Das Beugungsgitter wurde aus Bleifolie ausgeschnitten. Die Streifen waren 10 *mm*, die Zwischenräume zwischen denselben 20 *mm* breit. Das Gitter wurde wieder senkrecht zu der Strahlenrichtung und so auf-

gestellt, dass die Drehungsaxe des Tischchens in seiner Ebene lag. In Bezug auf den Erreger wurde es so orientirt, dass ein Streifen und zwei Zwischenräume in Wirksamkeit traten. In die Berechnung der Wellenlänge geht daher die Grösse von 30 *mm* ein. Eine besonders scharfe Einstellung war nicht zu erzielen. Für die Lage des ersten Minimums ergab sich ein Ablenkungswinkel von 7—8°. Wählt man den mittleren Werth 7° 30′ zur Berechnung, so ergibt sich

$$\frac{\lambda}{2} = 30.\sin 7^\circ\,30' = 3\cdot 96\,mm,$$

also λ circa = 8 *mm*.

Das erste Maximum lag beiläufig bei 16°. Daraus ergibt sich

$$\lambda = 30.\sin 16^\circ = 8\cdot 27\,mm,$$

also auch beiläufig 8 *mm*. Das Minimum liess sich aber etwas genauer einstellen. Es kann, wie aus diesen Messungen hervorgeht, die Länge der von dem Erreger ausgesendeten Wellen zu 8 *mm* angesetzt werden. Dies stimmt auch mit den Dimensionen der Erregercylinder, deren jeder 2 *mm* lang war, so dass die Gesammmtlänge des Erregers, welche ungefähr der halben Wellenlänge gleich ist, von der wenig einflusshabenden Länge der Funkenstrecke abgesehen, 4 *mm* betrug. Der angegebenen Wellenlänge entspricht eine Schwingungszahl $N = 37500.10^6$.

IV.

Feste Körper.

a) Paraffin. Zur Untersuchung gelangten drei Prismen mit den brechenden Winkeln $\alpha_1 = 34°$, $\alpha_2 = 29° 30'$, $\alpha_3 = 20°$. Mit jedem dieser Prismen wurden einige Bestimmungen ausgeführt:

$\alpha_1 = 34°$		$\alpha_2 = 29° 30'$		$\alpha_3 = 20°$	
β	n	β	n	β	n
24°	1·516	20°30'	1·55	11°	1·506
24 20'	1·522	19 30	1·533	11	1·506
24	1·516	20	1·545	11 15'	1·517
		19 30	1·533		

Als Mittel aus diesen Bestimmungen ergibt sich

$$n = 1 \cdot 524$$

und daher

$$n^2 = 2 \cdot 32.$$

Naheliegende Werthe der Dielektricitätsconstante fanden Boltzmann 2·32, Hopkinson 2·29, Donle 2·29.

Für den Brechungsquotienten für Wellen von 85·2 *mm* Länge gibt v. Lang[1] 1·71. Darnach wäre die Dispersion anormal.

b) Ebonit. Untersucht wurden zwei Prismen. Die Resultate gibt die folgende Tabelle:

$\alpha_1 = 20° 20'$		$\alpha_2 = 29° 30'$	
β	n	β	n
16° 30'	1·725	29°	1·737
17	1·745	29 30'	1·747
17	1·745	29 40	1·750
16 20	1·7054	29 40	1·750
16 50	1·739	29 30	1·747

Hieraus folgt:

$$n = 1 \cdot 739$$

und

$$n^2 = 3 \cdot 027.$$

Naheliegende Dielektricitätsconstante fanden: Boltzmann 3·15—3·48, Schiller 2·76, Winkelmann 2·72; Lecher bei einer Ladungszeit von 0·5″: 2·64, 0·0005″: 2·81, 0·0000003″: 3·01.

c) Glas. Untersucht wurden ein Crownglas- und ein Flintglasprisma.

Crownglas. $\alpha = 15°$		Flintglas. $\alpha = 10°$	
β	n	β	n
23°	2·3785	20° 30'	2·923
23	2·3785	20	2·88
23 10	2·388	20 10	2·894

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CV, II.a., 1896.

Es ergibt sich für Crownglas

$$n = 2\cdot381 \text{ und } n^2 = 5\cdot66,$$

für Flintglas

$$n = 2\cdot899 \text{ und } n^2 = 8\cdot41.$$

Hopkinson gibt für Crownglas D.-C. = 5·96, für Flintglas D.-C. = 6·61—9·096.

d) Schwefel. Zwischen Glasplatten wurde ein Schwefelprisma gegossen; der brechende Winkel wurde nach Loslösung der Glasplatten bestimmt. Er betrug 25°.

β	n
24° 30'	1·799
24	1·786
25 20	1·821

Es folgt

$$n = 1\cdot802$$

und

$$n^2 = 3\cdot24.$$

Es geben an: Boltzmann D.-C. = 3·84—3·90, Wüllner: D.-C. = 3·04.

e) Doppelbrechung des Holzes. An Holzprismen, welche aus einem Stück Weissbuchenholz, jedoch mit verschiedener Orientirung der Faserrichtung gegen die brechende Kante ausgeschnitten wurden, liess sich die Verschiedenheit der Brechungsquotienten deutlich constatiren. Da jedoch Messungen an Holz weiter kein Interesse bieten, führe ich diese Thatsache bloss im Allgemeinen an. Sie illustrirt immerhin die Überlegenheit der kurzen Wellen über die langen. Herr Mack hat bei seinem Versuche, in diesem Falle die Prismenmethode anzuwenden,[1] keinen befriedigenden Erfolg erzielt.

---

[1] Wied. Ann., Bd. 56, S. 717, 1895.

V.

Flüssigkeiten.

Für die Untersuchung der Flüssigkeiten wurde ein Hohlprisma hergestellt, indem in ein Ebonitprisma passender Grösse ein Loch von 50 *mm* Durchmesser gebohrt wurde. Die Seitenflächen wurden durch Glasplatten verschlossen. Das so gewonnene Hohlprisma hatte einen brechenden Winkel von 16°30′. Nur Wasser verlangte ein Prisma von kleinerem brechenden Winkel; dieses wurde aus Glasplatten allein zusammengekittet. Die in beiden Fällen verwendeten Glasplatten waren circa 1 *mm* dick.

a) Benzol reinst. Das verwendete Benzol war dasselbe, welches Herr v. Lang untersucht hatte und dessen Dielektricitätsconstante von Herrn Hasenöhrl[1] nach einer statischen Methode zu 2·115 bei 23° C. bestimmt worden war. Ich beobachtete bei derselben Temperatur.

δ	n
13° 40′	1·77
13 30	1·761
13 40	1·77

Es folgt hieraus

$$n = 1\cdot767$$

und

$$n^2 = 3\cdot13.$$

v. Lang findet (l. c.): $n = 1\cdot85$.

Die Dispersion ist also anormal.

b) Glycerin. Dasselbe war gleichfalls von Herrn v. Lang untersucht worden und hatte die Dichte 1·24. Die Wellen erfahren eine ziemliche Absorption.

[1] Diese Sitzungsber., Bd. CV, II. a., (1896).

β	n
15°	1·84
15 10'	1·8485
15	1·84

Hieraus folgt

$$n = 1\cdot843 \quad \text{und} \quad n^2 = 3\cdot4.$$

Die anormale Dispersion des Glycerins erhellt aus der folgenden Tabelle (Drude—v. Lang):

$N =$	25.10^6	D.-C. = 56·2	Thwing
	125.10^6	39·1	Drude
	400.10^6	25·4	Drude
	3520.10^6	14·1	v. Lang
	37500.10^6	3·4	Lampa.

c) Terpentinöl rectificirt.

β	n
14°	1·7875
14 10'	1·796
13 30	1·761

Es ist hienach

$$n = 1\cdot782 \quad \text{und} \quad n^2 = 3\cdot17.$$

v. Lang gibt für seine Wellen: $n = 1\cdot74$.

d) Für Vaselinöl und Mandelöl, welche Herr Hasenöhrl untersucht hatte, fand ich

$$n = 1\cdot626, \quad n^2 = 2\cdot65,$$

respective

$$n = 1\cdot734, \quad n^2 = 3\cdot01.$$

Herr Hasenöhrl fand für Vaselinöl:

$$\text{D.-C.} = 2\cdot118,$$

für Mandelöl:

$$\text{D.-C.} = 2 \cdot 833.$$

Salvioni gibt für Mandelöl:

$$\text{D.-C.} = 3 \cdot 01.$$

e) Absoluter Alkohol. Die anormale Dispersion ist für diese Substanz bis zu Schwingungszahlen $N = 400.10^6$ nicht besonders stark.[1] Die D.-C. ändert sich von circa 26 bis 23. Hingegen fand Herr Cole[2] für Wellen von 5 *cm* Länge, also einer Schwingungszahl von 6000.10^6 den Brechungsquotient 3·2, also $n^2 = 10 \cdot 24$. Aus meinen Messungen folgt, dass die Dispersion von dieser Schwingungszahl ab noch stark anormal ist. Die Absorption ist ziemlich beträchtlich, stört jedoch nicht die Messungen.

β	n
30°	2·5545
30	2·5545
30 30'	2·596

Es folgt:

$$n = 2 \cdot 568 \quad \text{und} \quad n^2 = 6 \cdot 76.$$

Die Dispersion stellt folgende Tabelle dar:

N	D.-C.	
N = klein,	D.-C. = 25·9	Nernst[3]
	25·5	Tereschin[3]
25.10^6	24·8	Thwing[3]
150.10^6	24·4	Drude[3]
$400 \cdot 10^6$	23·0	Drude[3]
6000.10^6	10·2	Cole
37500.10^6	6·8	Lampa.

f) Wasser destillirt. Temperatur 23° C. Beobachtet wurde mit einem Prisma von 4° brechendem Winkel. Die Absorption ist ziemlich stark. In Folge dessen wurden die drei letzten Beobachtungen bei sehr gesteigerter Empfindlichkeit des

[1] Drude, Wied. Ann., Bd. 58, S. 1, 1896.

[2] Wied. Ann., Bd. 57, S. 290, 1896.

[3] Siehe Anm. 1).

Galvanometers durchgeführt. Man sieht aber, dass selbst bei der geringeren Empfindlichkeit noch gute Messungen ausführbar wären, denn die letzten Bestimmungen liegen in der Mitte der beiden ersten. Die Einstellung auf das Maximum war hier besonders scharf möglich.

β	n
34° 30'	8·923
35	9·022
34 45	8·972
34 45	8·972
34 45	8·972

Es resultirt als Mittel

$$n = 8 \cdot 972 \quad \text{und} \quad n^2 = 80 \cdot 45.$$

Die Dispersion gibt folgende Tabelle, die ich der citirten Abhandlung Herrn Drude's entnehme und ergänze:

$N =$ klein,	D.-C. $=$ 80·9	Heerwagen
	80·0	Nernst
25.10⁶	79·4	Thwing
150.10⁶	79·7	Drude
400.10⁶	80·2	Drude
6000.10⁶	77·44	Cole[1]
37500.10⁶	80·45	Lampa.

Abgesehen von dem Werthe, welchen Herr Cole aus seinen Versuchen folgert, der aber doch etwas unsicher sein dürfte, ist also die Dispersion des Wassers für den Bereich $N = 25.10^6$ bis $N = 37500.10^6$ normal.

Ich beschliesse diese Arbeit mit dem herzlichsten Danke an Herrn Prof. Franz Exner, welcher mir mit ausserordentlicher Liebenswürdigkeit die Hilfsmittel seines Institutes zur Verfügung stellte.

[1] Siehe Anm. 2) der vorhergehenden Seite.

XVIII. SITZUNG VOM 9. JULI 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. II. a., Heft II—IV (Februar bis April 1896).

Der Secretär legt Dankschreiben für bewilligte Subventionen von den Herren Prof. Dr. V. Uhlig und Prof. Dr. F. Becke in Prag vor.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt als Fortsetzung seiner photographischen Mondvergrösserungen 19 weitere Blätter von speciellen Gegenden des Mondes mit hierauf bezüglichen Erläuterungen.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. C. Freiherr von Ettingshausen übersendet eine Abhandlung: Über neue Pflanzenfossilien in der Radoboj-Sammlung der Universität Lüttich«.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner übersendet eine in Gemeinschaft mit Herrn E. Haschek, stud. phil., ausgeführte Arbeit: »Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« (IV. Mittheilung).

Herr Dr. Max Bamberger in Wien übersendet eine Arbeit: »Über den Nachweis von Argon in dem Gase einer Quelle in Perchtoldsdorf bei Wien«.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Zd. H. Skraup übersendet eine Abhandlung: »Über die Cincholoiponsäure«.

Das c. M. Herr Prof. Guido Goldschmiedt übersendet folgende sechs Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag.

1. »Über die Einwirkung von Jodmethyl auf Papaverinsäure«, von G. Goldschmiedt und A. Kirpal.
2. »Über Allentricarbonsäureester«, von G. Goldschmiedt und G. Knöpfer.
3. »Über Indolinone«, von Prof. Karl Brunner.
4. »Über β-Benzoylpicolinsäure und β-Phenylpyridylketon«, von Dr. Berthold Jeiteles.
5. »Zur Kenntniss der Arachinsäure«, von Max Baczewski.
6. »Zur Kenntniss der Wirkung des Aluminiumchlorids«, von Dr. Moriz Freund.

Das c. M. Herr Prof. Dr. H. Molisch übersendet eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag von dem Herrn Privatdocenten Dr. A. Nestler ausgeführte Abhandlung, betitelt: »Untersuchungen über die Ausscheidung von Wassertropfen an den Blättern«.

Der Secretär legt eine Abhandlung von Prof. E. Waelsch an der k. k. technischen Hochschule in Brünn: »Über die Lame'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung« vor.

Herr Dr. Alfred Burgerstein in Wien übersendet eine Arbeit, betitelt: »Weitere Untersuchungen über den histologischen Bau des Holzes der Pomaceen nebst Bemerkungen über das Holz der Amygdaleen«.

Die Herren Professoren Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida in Wien übersenden eine gemeinsam ausgeführte Arbeit unter dem Titel: »Beiträge zur Kenntniss des Cholesterins« (IV. Abhandlung).

Herr Prof. Dr. V. Hilber in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Geologische Reise in Nord-Griechenland und Türkisch-Epirus 1895«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach überreicht eine Abhandlung von Dr. Ludwig Mach, betitelt: »Weitere Versuche über Projectile«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Boltzmann legt folgende drei Abhandlungen vor:

Die erste von ihm selbst unter dem Titel: »Über die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charles'schen Gesetz und die Dissociation«.

Die zweite von Herrn Prof. Ignaz Klemenčič in Innsbruck: »Über permanente Magnete aus steirischem Wolframstahl«.

Die dritte von Herrn Theodor Wulf in Innsbruck: »Über Rückstandsbildung und Oscillationen bei verschiedenen Condensatoren«.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner legt einen kurzen vorläufigen Bericht über die zoologischen Arbeiten im Rothen Meere während der Expedition Sr. Majestät Schiff »Pola« in den Jahren 1895 und 1896 (von October 1895 bis Ende April 1896) vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchung von Dr. Fritz Blau: »Über die Einwirkung von Brom auf chlorwasserstoffsaure Salze und ein Verfahren zur exacten Bestimmung der beiden Halogene nebeneinander«.

Ferner überreicht Herr Hofrath Lieben noch zwei andere Arbeiten aus seinem Laboratorium, nämlich:

1. »Studien über den Desoxaläther«, von A. Steyrer und W. Seng.
2. »Löslichkeitsbestimmungen von Salzen der Capronsäure und Önanthylsäure«, von E. Altschul.

Das w. M. Herr Prof. Sigm. Exner legt eine Untersuchung vom Herrn Privatdocenten Dr. L. Réthi vor, welche im physiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführt wurde, betitelt: »Experimentelle Untersuchungen über den Schwingungstypus und den Mechanismus der Stimmänder bei der Falsettstimme«.

Herr Prof. Sigm. Exner überreicht ferner eine Abhandlung von stud. med. Friedrich Schenk, Demonstrator am zahn-

ärztlichen Institute der k. k. Universität in Wien, betitelt: »Die erste Unterkiefer- und Alveolenanlage«.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung des Universitäts-Docenten und Adjuncten der k. k. Sternwarte in Prag Dr. Rudolf Spitaler, betitelt: »Bahnbestimmung des Kometen 1890 VII (Spitaler).

Das w. M. Herr Prof. H. Weidel überreicht zwei Arbeiten aus dem I. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien:

1. »Studien über Quercetin und seine Derivate« (XII. Abhandlung), von Dr. J. Herzig.

2. »Über zwei isomere Nitrosophloroglucindiäthyläther«, von D. Moldauer.

Herr Dr. Heinrich Albrecht in Wien überreicht eine Arbeit, betitelt: »Beitrag zur vergleichenden Anatomie des Säugethierkehlkopfes«.

Weitere Versuche über Projectile

von

Dr. **Ludwig Mach.**

(Mit 5 Tafeln und 14 Textfiguren.)

Diese Mittheilung enthält den Bericht über eine Reihe von Versuchen, welche an ältere Arbeiten anknüpfen,[1] und dieselben zum Abschluss bringen. Bisher ist über diese letzten Versuche nur eine kurze vorläufige Mittheilung erschienen.[2] Ich war bestrebt, die vorher verwendeten Methoden wesentlich zu verbessern, um durch eine sorgfältige und umsichtige Technik reine Resultate zu erhalten. Die Arbeit wurde im September 1892 begonnen und mit einigen Unterbrechungen bis August 1893 fortgeführt. Ich verwendete theils ein Werndl-, theils ein Mannlicher-Gewehr und untersuchte sowohl nach der Schlierenmethode, als auch nach der Interferenzmethode, in letzterem Falle mit dem von mir construirten Apparat.[3]

Aufstellung und Apparate für die Schlierenversuche.

Zunächst lasse ich die Beschreibung der Vorrichtungen folgen, welche bei den Schlierenversuchen verwendet wurden, die übrigens zum Theil auch bei den Interferenzversuchen in Function blieben.

Der Spiegel. Als Kopf des Schlierenapparates wurde bei den neuen Versuchen ein sphärischer Glassilberspiegel S (von

[1] Die letzte derselben ist: E. Mach und L. Mach, Weitere ballistische Versuche. Diese Sitzungsber., Bd. XCVIII, Abth. II. a., November 1889.

[2] Akademischer Anzeiger, 1893, Nr. 19, S. 198.

[3] Bei einigen Versuchsreihen hat mir theils mein verstorbener Bruder Heinrich, theils mein College Dr. W. Pascheles in aufopfernder Weise Hilfe geleistet.

K. Fritsch in Wien) verwendet. Derselbe hatte 15·6 *cm* freie Öffnung, 1·6 *m* Brennweite, und lieferte in der Aufstellung Fig. 1 ein Feld von 7 *cm* Durchmesser. Mit Hilfe eines Steinheil-schen Gruppenantiplanets *A* (von 78 *mm* Öffnung und 44 *cm* Brennweite) erhielt ich genügend scharf definirte Bilder, in welchen das 23 *mm* lange Projectil nur auf 9 *mm* verkürzt erschien. Die Aufstellung war, wegen des beträchtlich kürzeren Lichtweges, weniger empfindlich als die ältere, was durch eine sehr scharfe exacte Blendung ausgeglichen werden musste.

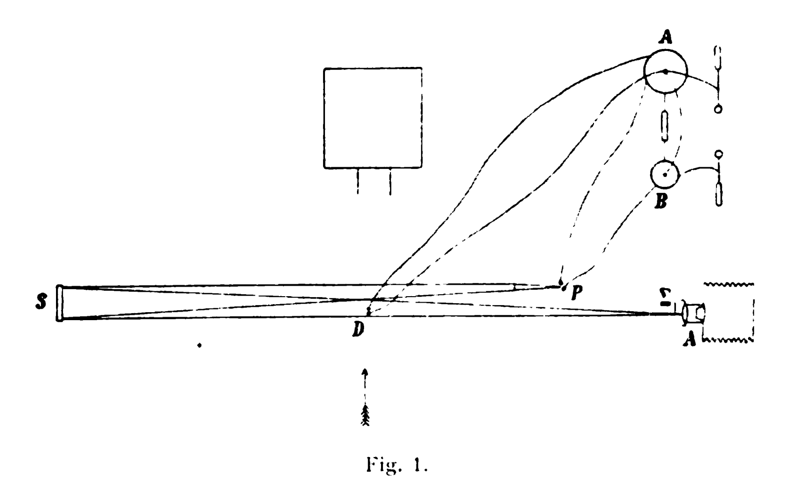


Fig. 1.

Die Beleuchtungsvorrichtung. Um nicht durch die Abweichungen des Beleuchtungsfunkens von der geradlinigen Bahn (das Springen des Funkens) Versuche zu verlieren, habe ich folgende kleine Vorrichtung hergestellt. Die Funkenführung besteht aus einem um die horizontale Axe *a* (Fig. 2) drehbaren Hartgummiprisma *P*, das an dem einen Ende einen mit Gas zu speisenden kleinen Brenner *b*, an dem anderen die Funken-führung *p* trägt. Die Elektroden *ee'* bestehen aus prismatischen, an den Enden mit Schellackstielen versehenen Magnesium-drähtchen, die in der ebenfalls prismatischen Rinne *r* streng eingepasst sind. Die Rinne *r* ist durch eine *P* bis an die Rück-wand durchsetzende feine Bohrung mit der äusseren Luft in Communication gebracht, und vorne mit einem dünnen (mög-lichst wenig fluorescirenden), durch Gummiringe ausgedrücktem

Deckgläschen verschlossen. Damit das Überspringen der Funken nur in der Rinne stattfindet, ist es nöthig, mit Hilfe eines Tropfglases etwas Petroleum zwischen Glas und Prisma aufsaugen zu lassen. Der Funken hält dann genau die geradlinige Bahn ein, doch ist man genöthigt, wegen der Russbildung durch das verbrennende Petroleum und wegen der Arrosion des Glases,



Fig. 2.

die Rinne öfter zu reinigen und mit einem neuen Deckglase zu versehen. Man verwendet die Vorrichtung, indem man den Brenner *b* nach oben und genau vertical stellt, was durch das Einschnappen einer kleinen Sperrvorrichtung hinter *P* bewerkstelligt wird. Mit Hilfe der kleinen leuchtenden Gasflamme controlirt man die richtige Trennung der Lichtbündel (Fig. 1), indem man Pauspapier in dieselben bringt, und stellt sodann das scharfe Bild der Flamme auf die Blendung (Σ, Fig. 1) ein.

Die Mattscheibe des photographischen Apparates wird so verschoben, dass von einem bei *D* (Fig. 1) eingebrachten Körper ein scharfes Bild entsteht. Durch einfaches Umlegen von *P* (Fig. 2) um 180° wird genau an die Stelle der Flamme der Funke gesetzt, und man kann nun mit Funkenlicht weiter operiren.

Die Blendung. Die Herstellung eines gut geblendeten Feldes bei einer so kurzen Aufstellung erfordert eine mikro-

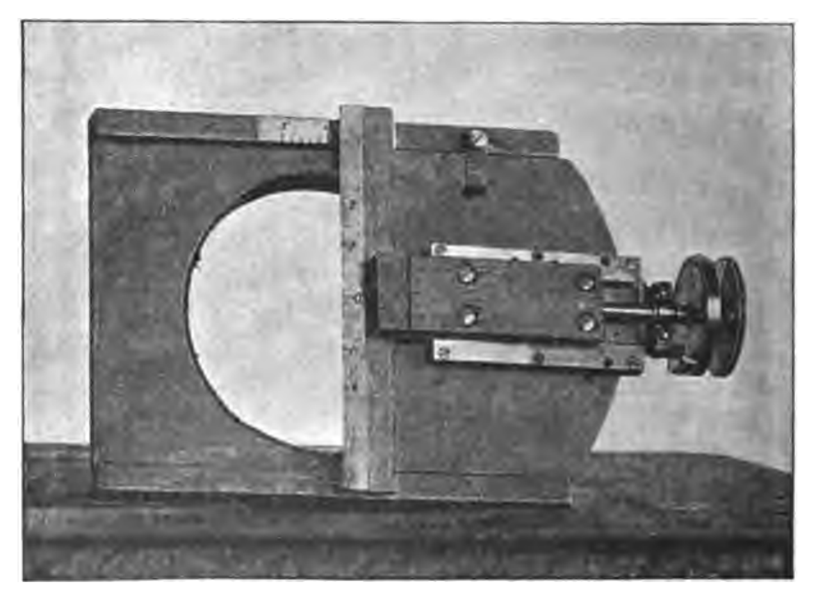


Fig. 3.

metrisch verschiebbare Blende mit geringem todten Gang. Fig. 3 zeigt die von mir verwendete Blendung, bestehend aus dem Holzschieber *H* zur groben Einstellung und einem auf demselben befindlichen Mikrometerschlitten mit der Blendungsschneide.

Ich muss noch einiges über die Technik der so wichtigen Blendung erwähnen. Bei einer exacten Blendung soll sich die Schneide optisch genau in der Ebene des schärfsten Bildes der Lichtquelle befinden. Die gewöhnliche Einstellung des scharfen Bildes mit Hilfe des Auges ist, wie die Erfahrung zeigt, selbst bei dauernden Lichtquellen keineswegs genügend, um so

weniger bei Funkenlicht, in welchem Falle das Auge den momentan aufblitzenden Lichtstreifen nicht genügend percipiren kann. Überlegt man jedoch (siehe Fig. 4, *a* und *b*), dass, wenn die Blende vor dem Bilde steht *(a)*, im Falle einer scharfen Abblendung der Schatten von der entgegengesetzten Seite in das Feld rückt, dagegen bei der Anordnung *b* von derselben Seite hereinkommt, so kann auf Grund dieser Beobachtung aus der reinen Blendungserscheinung auf den Stand der Schneide geschlossen werden. Man verschiebt so lange vor- und rückwärts, bis bei scharfer Blendung das Feld ganz gleichmässig matt wird. Man erhält in der That bei einem solchen Felde, welches einen mattblauen Farbenton aufweist, ganz vorzügliche Bilder.

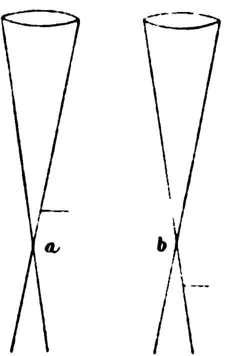


Fig. 4.

Länge des Beleuchtungsfunkens. Um das Gruppenantiplanet möglichst gut auszunützen, verwendete ich zuerst einen 15 *mm* langen Beleuchtungsfunken. Es zeigte sich aber, dass bei dieser Länge der Lichtquelle der Spiegel nicht mehr gleichmässig beleuchtet erscheint, sondern vielmehr in dem Feld zwei gegen das Centrum convex begrenzte Partien von hervorstechender Helligkeit vorhanden sind. Durch eine einfache Überlegung findet man, dass dieses durch eine zu grosse Länge des Beleuchtungsfunkens, namentlich durch die stärker leuchtenden Elektrodenenden, bedingt ist. Bei Abkürzung des Funkens auf 11 *mm* und Abdeckung der Elektrodenenden mit Mattfilms verschwindet die Störung.

Richtung der Schusslinie. Es schien vortheilhaft, die Richtung der Schusslinie nicht senkrecht gegen die Axe der Lichtrichtung zu wählen, sondern dieselbe von dieser Senkrechten um etwa 4° abweichen zu lassen. Es scheinen hiebei mehr Einzelheiten sichtbar zu werden.

Der Kugelfang besteht aus einer Kiste von weichem Holz (in Form eines Würfels von 70 *cm* Seite), die mit Holzbohlen ausgefüllt ist, welche hinten an eine Gussplatte von 1·5 *cm* Dicke anstossen. Messingprojectile schlagen sich meistens pilz-

förmig platt, wogegen sich die Stahlmantelgeschosse des österreichischen Mannlicher-Gewehres beim Aufschlagen zu einer feurigen Sonne von geschmolzenem Blei auflösen, wobei die Manteltrümmer die einen Zoll starken Holzwände der Kiste messerartig durchschneiden. Aus diesem Grunde muss man die hinteren Partien der Kiste besonders gut verwahren. Unterlässt man dies, so setzt man sich regelmässig einem Regen von Stahl- und Bleisplittern aus.

Die Panzerplatte. Als Panzerplatte diente mir anfangs eine 3 *cm* starke Eisenplatte der Firma Friedrich Krupp in Essen, die sich noch heute im Prager Laboratorium befindet. Fünf Schüsse des Mannlicher-Gewehres (mit dem ebenfalls experimentirt wurde) auf ein und denselben Punkt dieser Platte abgegeben, gaben zu einer kraterförmigen Ausbiegung Veranlassung, und bei weiteren Schüssen entstand ein Riss, womit natürlich diese Stelle unbrauchbar war. Ich liess mir deshalb in Bubna bei Prag nach folgender Methode eine Platte giessen. Es wurde das $2^1/_2$ *cm* starke, mit acht Rippen verstärkte Plattenmodell mit der gerippten Seite in feinen, eben gestrichenen Thon abgedrückt. Nach dem Trocknen wurde hievon abermals in Thon eine Form abgenommen und dieselbe mit einem hohen Rand umgeben. Diese Form, mit Eisen ausgegossen, ergab erst eine eiserne Gussform für die eigentliche Panzerplatte. Man rieb sie etwas mit Petroleum ein, stäubte Graphit darauf und dann wurde der Eisenfluss eingegossen. Nach dem Erkalten konnte man die Panzerplatte aus der eisernen Form herausnehmen, und das Resultat war, wie ich erwartet hatte, eine an der Oberfläche glasharte Platte, die von den Stahlspitzen der Projectile nicht einmal geritzt wurde. Es wird nämlich dem rothglühenden Eisen an der Oberfläche durch die sehr massige metallene Form rasch Wärme entzogen, was ein Gussstück mit zwar harter Oberfläche, aber weichem Kern ergibt. Eine durchaus harte Platte zerspringt, wie der Versuch gelehrt hat, beim ersten Schuss.

Die elektrische Aufstellung und die Auslösung des Beleuchtungsfunkens. An der elektrischen Aufstellung wurde zunächst wenig geändert. Die in Fig. 1 dargestellte Anordnung functionirt recht gut. Die Flasche *A* (3500 *cm* Capacität)

wird durch das zwischen die Drahtlagen bei *D* eindringende Projectil in sich entladen, wobei sich ohne merkliche Zeitdifferenz die kleine Flasche *B* von 500 *cm* Capacität durch die Funkenstrecke *P* (den Beleuchtungsapparat) in die grosse Flasche entleert. Später wurden jedoch die Drahtgitter und die Funkenauslösung durch das die Gitter durchsetzende Projectil ganz aufgegeben. Abgesehen von den Unregelmässigkeiten der Entladung, welche durch die Gitter, namentlich die Ladungsverluste an denselben, eingeführt wurden, wirken die Gitter noch in anderer Weise schädlich. Durch die zahlreichen Wellenreflexionen an den Gittern werden nämlich die gewonnenen Bilder sehr verunstaltet, und wichtige Einzelheiten derselben werden hiedurch oft ganz gedeckt. Es war daher mein Bestreben, den Beleuchtungsfunken auszulösen, während das Projectil frei im Felde stand. Nach einigen Bemühungen gelang dies auch vollständig, und gerade durch dieses Verfahren wurde es ermöglicht, wirklich reine Resultate zu erhalten.

Nach mancherlei anderen Versuchen, die hier nicht beschrieben werden sollen, blieb ich bei folgender Anordnung stehen: Das Projectil erregt an einer Stelle seines Weges eine Schallwelle, welche fortläuft, dann eine Flamme bewegt, und durch diese den elektrischen Schluss und die Entladung der Beleuchtungsflasche auslöst.

Ich construirte nun den in Fig. 5 dargestellten Apparat. In einiger Distanz vom Feldcentrum wird der mit Strohpapier überzogene, auf das Messingrohr *R* aufgesteckte Holzreif *r* vom Projectil durchsetzt. Es läuft nun in dem Rohr eine Luftwelle bis zur Spitze, die in eine kleine, aus dem Brenner *b* herausbrennende Gasflamme taucht, und stösst durch die Bohrung des elektrischen Schirmes *S* einen Pilz heissen Gases gegen die Kugel am Ende der Elektrode *c* (in der Figur durch den Schirm verdeckt), und bildet, da das Rohr und die Kugel in den Schliessungsbogen einer Flasche eingeschaltet sind, einen Schluss. Der Apparat muss in einer solchen Distanz vom optischen Feldcentrum aufgestellt werden, dass das Projectil in der Zeit, die vom Durchschlagen der ersten Papierlamelle bei *r* bis zur Funkenauslösung verstreicht, den Weg von *r* bis zum optischen Feldcentrum zurücklegt.

Die Vorrichtung functionirt sehr gut. Man muss jedoch berücksichtigen, dass der Vorgang der Flammenbewegung gegen die Schallfortpflanzung im Rohr sehr träge ist. Eine Verlängerung des Rohres *R* von 5—10 *cm* bewirkte z. B. eine Verschiebung des Projectilbildes um 1—2 *cm*, wogegen das Entfernen der Elektrodenkugel um 4—8 *mm* fast die doppelte Distanz des Ringes *r* vom Feldcentrum erforderte. Bei

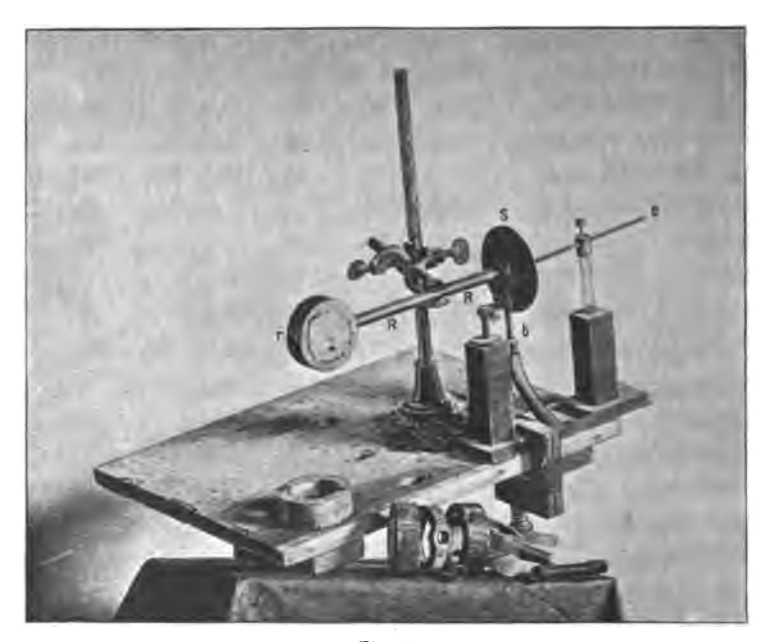


Fig. 5.

den von mir empirisch ermittelten Dimensionen versagte die Vorrichtung niemals.[1] Besonders beim Mannlicher-Gewehr waren die Variationen sehr gering. Zweifellos empfiehlt sich diese Auslösung auch für das Studium der Kanonenprojectile,

---

[1] Ich gebe hier anmerkungsweise die ungefähren Dimensionen des Auslösungsapparates. Distanz vom Trommelende bis zur Spitze 25 *cm*, vom Schirm bis zur Kugel 1·3 *cm*, Distanz der Auspuffspitze von der Schirmbohrung 6 *mm*. Die Flamme muss 13 *mm* unter der Auspuffspitze ihren Brenner haben Die Entfernung der Trommel vom Feldcentrum verhält sich bei den einzelnen Projectilen und Pulversorten folgendermassen:

da man die Gasflamme, wie ich mich überzeugt habe, ohne Nachtheil durch eine überall anwendbare Kerzenflamme ersetzen kann.

Die Aufstellung für die Versuche ohne Drahtgitter, welche in den Souterrainlocalitäten des Institutes untergebracht wurde, ist in Fig. 6 veranschaulicht. Die Gewehrmündung hatte einen Abstand von 2·5 *m* vom Ring *r*, und dieser war rund 30 *cm* vom Feldcentrum entfernt. Der Spiegel *S* war auf einem festen Stativ angebracht und mehrfach beweglich. Die Bündel I und II sind nur in der Horizontalen getrennt, und I ist durch eine achromatische Linse *L* (von 5 *cm* Öffnung und 43 *cm* Brennweite) auf 1·9 *m* verkürzt. Die elektrische Aufstellung stimmt mit jener in Fig. 1 überein, nur ist statt der Drahtgitter der Ringapparat in dieselbe eingeschaltet.

Vor den Kugelfang ist eine Kerze *k* gestellt, deren Licht durch die Schirme *EE* von dem Spiegel und dem Antiplanet abgehalten wird. Diese Beleuchtung reicht vollständig zum genauen Zielen aus. Die Höhe des Lichtes ist so eingestellt, dass es nach jedem Schusse erlischt, indem das Projectil die Dochtspitze streift, wodurch man die photographische Platte vor zu viel falschem Licht schützt. Die Regulirung der Flamme des Auslösungsapparates ist recht heikel, doch trifft man nach einiger Übung bald das Richtige. Ich stellte diesen Apparat auf einen mit Höhentransport versehenen Kreuzsupport, wodurch es mir möglich wurde, den Ring systematisch in die richtige

---

Werndl, doppelt stumpfes Messingprojectil	28·5 *cm*	Distanzen vom Feldcentrum bei möglichst unverrückter Flammen- und Schirmstellung.
Werndl, Aluminiumprojectil	52 *cm*	
Werndl, Messingprojectil circa 360 *m* sec	25 *cm*	
Mannlicher, Stahlmantelgeschoss, Schwarzpulver M. 1886	34 *cm*	
Mannlicher, rauchschwaches Pulver	48 *cm*	

Die Entfernung des Ringes vom Feldcentrum war in den einzelnen Fällen nicht immer gleich, so betrug sie z. B. bei einer Versuchsreihe mit rauchschwachem Pulver nicht 41, sondern über 50 *cm*. Die Variation ist bloss auf minimale Änderungen in der Distanz der Auspuffspitze von dem Schirme, auf die Art, wie die Flamme die Spitze umspült u. s. w. zurückzuführen. Sorgt man dafür, dass dieser Apparattheil nicht geändert wird, so erscheint das Projectil mit grosser Präcision an derselben Stelle des Feldes.

Höhe und die entsprechenden Entfernungen vom Felde zu bringen. Zum Verschlusse des Ringes verwendete ich durch Petroleum transparent gemachtes Josephpapier, das in der Mitte einen mit Kienruss markirten Zielpunkt trug. Bei dem niedrig tragenden Militärgewehr wurde natürlich immer höher angelegt.

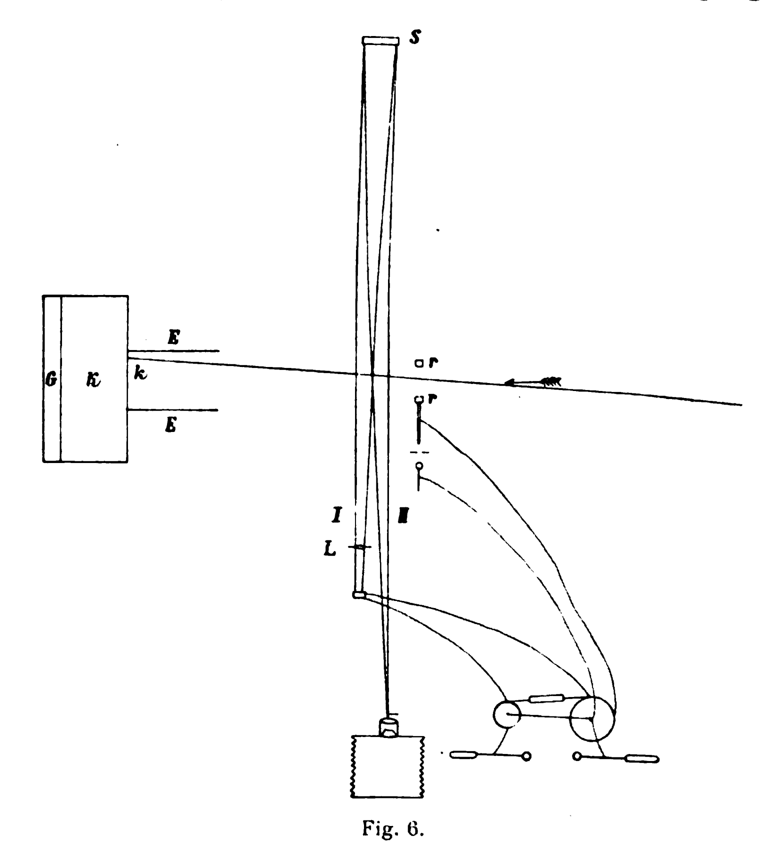


Fig. 6.

Man kann auch anstatt des Papiers Collodiummembranen verwenden, was den Vortheil hat, dass das Ringfeld absolut durchsichtig ist, und die Zielmarke frei in der Luft zu schweben scheint. Und endlich gelang es auch, bloss durch das Durchschiessen des offenen Ringes den Funken auszulösen, wobei ein auf einem diametral aufgespannten Faden aufgeklebtes Cartonscheibchen das Ziel bildete. Dabei muss man allerdings berücksichtigen, dass die Auslösung etwas träger, sonst aber

ebenso regelmässig vor sich geht, wie mit den Verschlussmembranen, und dass man also nur nöthig hat, den Ring vom Feldcentrum etwas zu entfernen.

Die Photographie. Bei den meisten der hier beschriebenen Versuche gelangt, besonders bei scharfer Blendung, nur wenig Licht auf die photographische Platte, so dass mancherlei Kunstgriffe angewendet werden müssen, um ein durchgearbeitetes Bild zu erhalten. Die Schleussner'schen Platten haben sich hier vollkommen bewährt. Von Originalaufnahmen, welche durch 1—2 Stunden entwickelt worden waren, konnte ich noch fünffache brauchbare Linearvergrösserungen herstellen. Herr Dr. Karl Schleussner hat mir durch seine freundliche Unterstützung die Durchführung dieser Arbeit erst ermöglicht, wofür ich hier herzlich danke.

Das Entwicklungsverfahren ist in der »Süddeutschen Photographen-Zeitung« (Bd. I, Juli 1894) näher beschrieben. Hier sei nur bemerkt, dass die lange Einwirkung einer schwachen Entwicklungsflüssigkeit auf die schwach belichteten Platten sehr vollkommene Bilder lieferte.

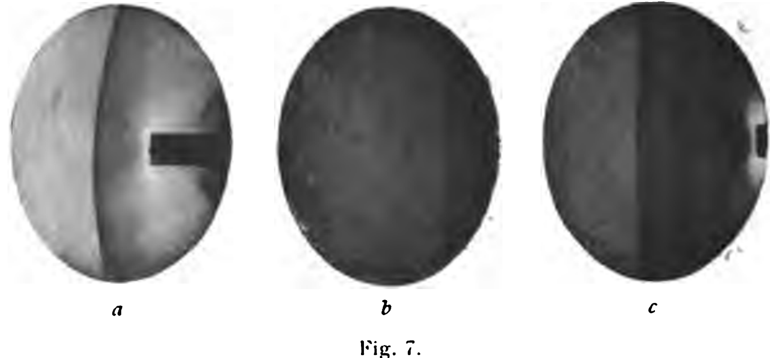
Die schwächsten Belichtungen wurden bei den später zu beschreibenden Interferenzversuchen angewendet. Ich glaube bemerkt zu haben, dass Vorbelichtung durch das rothe Licht einer guten Dunkelkammerlaterne oder Vorwärmung (durch ein Wasserbad) die Resultate wesentlich verbesserte.

Ergebnisse der Schlierenversuche.

Schon in der ersten Mittheilung wurde dargelegt, dass mit abnehmender Projectilgeschwindigkeit die Kopfwelle dem Projectil vorauseilt, an Stärke und Krümmung abnimmt, bis sie beim Herabsinken der Projectilgeschwindigkeit auf die normale Schallgeschwindigkeit endlich verschwindet. Es schien nun interessant, bei geringen Geschwindigkeiten (ungefähr 360 *m*/sec) diese Verhältnisse besonders zu untersuchen. Dieselben werden durch Fig. 7, *a*, *b*, *c* (im Text) erläutert.

Bei so geringen Geschwindigkeiten finden wir das Feld ausser der schwach gekrümmten Kopfwelle von eigenthümlichen, fast geraden Verticallinien durchzogen, welche noch 70 *cm* vor dem Projectil und 90 *cm* hinter dem Projectil mit

Sicherheit photographirt werden konnten. Diese Linien sind aller Wahrscheinlichkeit nach jene Schallwellen, welche der nicht ganz gleichmässigen (ruckweisen) Explosion der Pulvergase entsprechen,[1] und welche bei Gelegenheit früherer Versuche unmittelbar vor der Laufmündung nachgewiesen wurden. Fig. 7, *c* sieht so aus, als ob eine Welle (Kopfwelle) an einer anderen Welle (Explosionswelle) reflectirt worden wäre.[2] Die Frage ist nicht ohne Interesse, warum ein Analogon der gebrochenen Welle hier nicht sichtbar ist. Bei Steigerung der Projectilgeschwindigkeit rückt die Kopfwelle näher an das Projectil heran. Bei sehr spitzen Projectilen berührt der Scheitel



a *b* *c*

Fig. 7.

der Kopfwelle aus nahe liegenden Gründen fast die Spitze des Projectils (Fig. 6, Taf. III; Fig. 4, Taf. II; Fig. 7, Taf. IV).

Auf die erste Verdichtungswelle (Kopfwelle) folgen abwechselnd Verdünnungs- und Verdichtungswellen. Was bei den älteren Aufnahmen einfach schien, erweist sich jetzt als sehr zusammengesetzt, erscheint in einen ganzen Fächer aufgelöst. Die Zahl der Zwischenwellen zwischen Kopf- und Schwanzwelle hängt von der Länge und Oberflächenbeschaffenheit des Projectils ab. Längere Projectile zeigen eine ganze Reihe von Zwischenwellen. Dreht man in ein Geschoss Rinnen ein, so geht von jeder solchen Rinne eine Welle aus. Bei einem

[1] Vergl. die oben citirte Mittheilung von E. Mach und L. Mach.

[2] Man vergleiche Riemann's Ausführungen über ebene Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

Projectil (Fig. 5, Taf. III) war die Stahlspitze abgefeilt, und der Mantel war durch Heraustreten der Bleifüllung etwas geknittert. Von diesen wahrscheinlich spiralig angeordneten Unebenheiten gehen ganze Reihen von Zwischenwellen aus. Auch an den Aluminiumprojectilen sind solche Erscheinungen zu sehen (Fig. 1, Taf. I).

Stellt man die Blendung des Schlierenapparates so, dass das Licht der Verdichtungskopfwelle auf diese Blendung abgelenkt wird, so erscheint in dem Negativ die Kopfwelle hell ausgespart, grenzt sich aber gegen das mattgraue äussere Feld durch eine scharfe schwarze Linie ab. Bei Ocularinspection würde also die Kopfwelle, wie jeder undurchsichtige Körper, im Felde dunkel mit einer feinen hellen Linie umsäumt erscheinen. Die letztere kann nur eine Beugungserscheinung sein, welche dadurch entsteht, dass die Kopfwelle als Schirm die ins photographische Objectiv eindringende Lichtwelle begrenzt.

Die schwarze Grenzlinie erscheint an guten Bildern doppelt. Sieht man genau zu, so findet man auch den Kopf und das Ende des Projectils doppelt, wenn der Grund auf dem sie erscheinen nicht zu dunkel ist. Kurz, man hat zwei ineinandersteckende Bilder vor sich, welche sehr wenig gegeneinander verschoben sind. Es ist dies eine Folge der Dauer der Funkenbeleuchtung, beziehungsweise des zeitlichen Abstandes der am stärksten leuchtenden Oscillationen desselben. Aus dieser Bildverschiebung kann bei bekannter Projectilgeschwindigkeit die Funkendauer, beziehungsweise die Oscillationsdauer ermittelt werden. Bei sehr grossen Geschwindigkeiten, wie z. B. bei dem Aluminiumprojectil (Fig. 1, Taf. I), kann man sogar drei ineinandersteckende Bilder unterscheiden.

Das Bild eines Projectils von 620 *m*/sec Geschwindigkeit wies, auf natürliche Grösse reducirt, einen Abstand der Doppellinie von 0·8 *mm* auf, was einer Funken-, beziehungsweise Oscillationsdauer von $^1/_{800000}$ Secunde entspricht. Selbst die kleine Beleuchtungsflasche von 1000 *cm* Capacität hat eine merkliche Entladungsdauer, und es ist gewiss zu berücksichtigen, dass die Beleuchtungszeit noch durch die nachglühenden abgerissenen Elektrodentheilchen, sowie durch die Fluorescenz des Deckglases vergrössert wird. In den schwach belichteten

Feldtheilen kann letzteres Licht immer noch schwache Wirkungen ausüben.

Bei sehr aufmerksamer Betrachtung eines Negativs, namentlich eines Projectils von grösserem Kaliber, sieht man so zu sagen einen zarten hellen Streifen, der wie eine Verlängerung des Projectils aussieht, die Kopfwelle durchbrechen, und in das matte graue Feld vor der Kopfwelle hinausragen, wo sich derselbe allmälig verliert. Die Erscheinung ist wohl kaum anders als durch die an Lichtintensität sehr allmälig abnehmenden Funkenoscillationen in der eben angedeuteten Weise zu erklären. Das Projectil nimmt eben in seinen späteren Lagen in jenem Felde, welchem ohnehin sehr wenig Licht zukommt, auch von diesem noch einen beträchtlichen Bruchtheil hinweg.

Vor dem Projectilkopf liegt anscheinend eine kleine helle Scheibe, die man am natürlichsten als aus comprimirter Luft bestehend ansehen wird. Ihre Form hängt von jener des Projectilkopfes ab. Am stärksten tritt die Erscheinung, die in Fig. 8, *a—d* in verschiedenen Formen dargestellt ist, bei stumpfen Projectilen von hoher Geschwindigkeit auf.

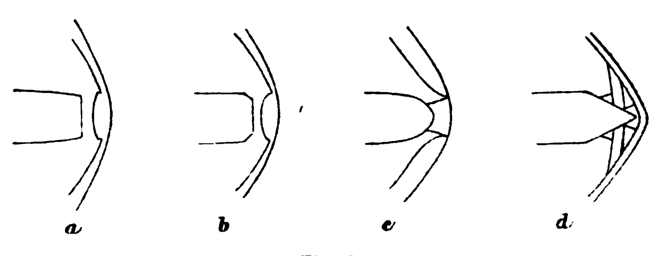


Fig. 8.

Das merkwürdige Aussehen der Erscheinung bei den von Herrn Hauptmann Weigner hergestellten Projectilen (Fig. 8, *d*) rührt, wie ich mich überzeugt habe, von zwei Riefen her, welche die Kegel sämmtlicher Projectile trugen, und die offenbar von einer nicht genügend ausgearbeiteten Stanze herstammen. Bei Projectilen mit sehr scharfer Spitze gibt es keine Luftscheibe. Zwischen dem als Luftscheibe bezeichneten Gebilde und dem Projectil scheint sich Luft von sehr geringer Dichte zu befinden, denn dieser Raum erscheint im Bilde tief schwarz. Bei zuge-

rundeten Geschossen, wie z. B. beim gewöhnlichen Stahlmantelgeschoss (Taf. II, 4) liegt die Scheibe unmittelbar vor dem Projectilkopf, und es ist zwischen beiden keine Verdünnung wahrzunehmen.

Bei stumpfen Projectilen findet sich hinter der Scheibe die grösste Verdünnung. An Projectilen mit scharfen Spitzen sind die scharfen Kanten, da wo der Kegel an den Cylinder stösst, von verdünnter Luft umgeben. Die Verdünnung muss hier sehr bedeutend sein, indem bei stark geblendetem Feld, so dass Kopfwelle und Projectil schon unsichtbar sind, diese Kanten mit tief schwarzen Büscheln umgeben erscheinen. Ein Projectil mit sehr langer allmälig in den Cylinder übergehende Spitze zeigt sehr schwache Verdünnungen.

Zwischen der beschriebenen Luftscheibe und einem stumpfen Projectilkopf befindet sich zuweilen noch ein dünnes Scheibchen, dessen Natur wegen der Variabilität der Erscheinung in den Bildern schwer zu ermitteln ist. Mitunter sieht dasselbe wie ein Doppelbild des Projectilkopfes aus, doch ist die verschiedene Lage und Grösse des Scheibchens mit dieser Auffassung schwer zu vereinigen.

Die Kopfwelle ist als eine stationäre Schallwelle anzusehen, welche sich aus den durch das Projectil fortwährend neu erregten Verdichtungen stets regenerirt. Sie deformirt sich nicht, wie dies eine Riemann'sche Welle von endlicher Schwingungsweite, sich selbst überlassen, thun müsste, sondern bleibt bei constanter Geschwindigkeit des Projectils beständig. Darin liegt das Hauptinteresse dieser Erscheinung für den Akustiker.

Über die Reibungsverhältnisse des Projectils erhält man Aufklärung, wenn man das Bild eines Projectils fixirt, welches eben eine Flamme eines Bunsenbrenners durchdringt. Man sieht dann, dass die Flamme fast wie ein fester Körper durchlöchert wird. Während der Durchbohrung ist eine Ausbreitung der Bewegung durch Reibung noch nicht sichtbar. Die vom Projectil ausgehenden Wellen gehen durch die Flamme hindurch und schreiten über dieselbe hinaus fort. Nur in der Flamme selbst sind diese Wellen wegen der optischen Eigenschaften der Flamme weniger deutlich. (Fig. 3, Taf. II.)

Zweifellos spielt die Reibung bei der Wirbelbildung an den Projectilen eine Rolle. Bei der Form *a*, Fig. 9, sind an den Längsseiten des Projectiles ziemlich hohe Wirbelzüge zu sehen; das ist die Luft, die vom Kopf gegen das Projectilende abströmt. Mit dem Wachsen der Geschwindigkeit werden die Wirbel immer flacher, bis sie endlich bei sehr hohen Geschwindigkeiten zu einer Linie zusammenschrumpfen. Besonders gut kann man sie bei einer zur Projectilaxe parallel gestellten Blendungsschneide sehen. (Fig. 8, Taf. IV.)

Zwei Projectile von gleichem Gewicht und gleicher Pulverladung, von denen jedoch das eine rückwärts stumpf, das andere zugespitzt ist, haben nahezu dieselbe Anfangsgeschwindigkeit. Die Kopfwelle, die Zwischenwellen, aber auch die

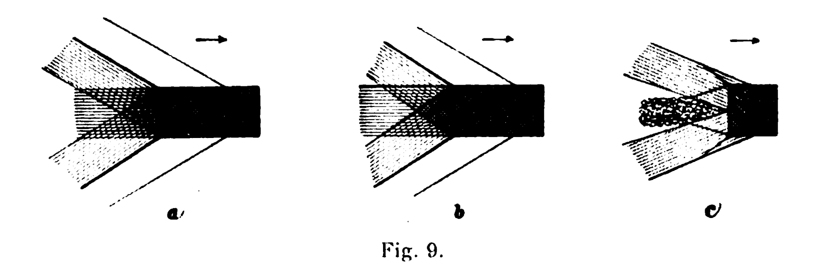


Fig. 9.

Schwanzwellen schliessen in beiden Fällen denselben Winkel mit der Projectilaxe ein. Die Existenz der hinteren Spitze (Fig. 9, *a* und *b*) beeinflusst auch nicht den Ansatz der Wellenfächer und die Grösse des von innen eingeschlossenen Winkels. Diese beginnen immer an den Rändern mit zwei dunkleren Geraden, und brechen dann mit einer leicht grauen Grenze gegen den lichten Raum ab, doch immer so, dass die Verlängerung der Wellengrenze durch den Rand des Projectilbodens hindurchgeht. Im Falle *b* schmiegen sich die Fächer der Spitze an; es sind beinahe keine Wirbel im Schusscanale vorhanden, wohl aber kann man sehr gut feine Wirbel verfolgen, wie sie vom Kopfe nach den Längsseiten des Projectiles über die Spitze hinuntergleiten, um sich dann aufzulösen. Ein eigenthümliches Verhalten zeigt sich noch bei hohen Geschwindigkeiten, wie bei den Aluminiumprojectilen von ungefähr 900 *m*/sec. (Fig. 1, Taf. I.) Hier verengt sich der Schusscanal ziemlich rasch und

verringert 7 *cm* hinter dem Projectil seinen ursprünglichen Durchmesser von 11 *cm* auf bloss 5 *cm*. Die Verlängerungen der inneren Grenzlinien der Wellenfächer gehen nicht mehr durch den Rand, sondern das Centrum des Projectilbodens. Die Wirbelbildung im Schusscanal ist ungewöhnlich stark (Fig. 9*c*).

Aufstellung und Apparate für die Interferenzversuche.

Theilt man ein Lichtbündel in 2 beträchtlich getrennte cohärente Bündel von bedeutendem Querschnitt, welche nachher zusammengeführt interferiren, und ein Feld mit geradlinigen Interferenzstreifen darbieten, so kann eine solche Anordnung benützt werden, die Vorgänge in der Umgebung der Projectile zu untersuchen. Blitzt nämlich die Lichtquelle nur in dem Moment auf, als das Projectil sich in dem einen der beiden Bündel befindet, so erscheinen die Streifen jenes Feldes, wo dieselben in die Luftwelle eintreten, geknickt und verkrümmt. Man kann aus der Grösse der Streifenverschiebungen und aus der Weglänge in der Luftwelle auf die Grösse der Dichtenänderungen schliessen. Für diesen Zweck müssen jedoch die beiden Lichtbündel besonders grossen Querschnitt haben und weit voneinander verlaufen, und keiner der bekannten Interferenzapparate konnte verwendet werden. Es wurde deshalb ein besonderes aus vier Platten bestehendes Interferenzrefractometer construirt, welches bereits anderwärts beschrieben worden ist.[1]

Das Refractometer *R* Fig. 10 stand auf dicken Filzunterlagen in der Schusslinie des Gewehres, und dahinter die mit Holz wohl verkleidete Panzerplatte. Auf den Planplatten und Spiegeln lag ein Dämpfer in Form eines viereckigen mit Flanell beklebten Holzrahmens. Das Licht des Funkens *f* wurde durch eine Linse *L* auf dem spaltförmigen Diaphragma *D* entworfen, passirte den Interferenzapparat, um endlich vom Gruppen-Antiplanet *G* in einer Reihe von Bildern gesammelt

[1] L. Mach, Akademischer Anzeiger, 1891, Nr. 22, 5. November; Über ein Interferenzrefractometer. — Diese Sitzungsberichte, Bd. CI, Abth. II. a., Jänner 1892. — Über ein Interferenzrefractometer. Ebendaselbst, Bd. CII, Abth. II. a., October 1893. — Akademischer Anzeiger, 1893, Nr. 19, S. 198.

zu werden. Durch die Blende *B* wurden sämmtliche Bündel abgeblendet bis auf eines, welches das erste Streifensystem enthält, und welches in das kleine Gruppen-Antiplanet *A* von 16 *mm* Öffnung und 5 *cm* Brennweite gelangt. Dieses entwirft von dem kreisförmigen Interferenzfelde (76 *mm* Durchmesser) ein kleines Bild von 4 *mm* Durchmesser. Diese Aufstellung gestattet auch mit monochromatischem Licht zu arbeiten, indem man vor das Diaphragma ein möglichst kurzes Prisma mit gerader Durchsicht einschaltet. Recht unangenehm war es, dass ich fast nur mit Sonnenlicht die Streifen einstellen konnte. Bei der Anwendung von so intensivem Licht projicirt sich die Platte mit dem Rahmen, den Befestigungskeilen und den Streifensystemen auf einem über das Gruppen-Antiplanet gehängten Papierblatte, und es ist ungemein leicht, die Streifen horizontal oder vertical zu stellen, oder sie genau in die Mitte zu bringen, bei welch letzterer Manipulation die Befestigungskeile bequeme Marken bilden. Will man vom Sonnenlicht unabhängig sein, so muss man zwischen den beiden Elektroden mit Hilfe einer grossen Influenzmaschine oder eines Ruhmkorffs ununterbrochen Flaschenfunken springen lassen. Dieses Licht reicht jedoch keineswegs aus zur Projection der Streifen, sondern man ist vielmehr gezwungen, bei *P* zu beobachten, was wegen der Kleinheit des Bildes unangenehm ist, und obendrein macht die Distanz des photographischen Apparates vom Refractometer mehrere Hughes'sche Schlüssel nothwendig. Bei der Einstellung mit Sonnenlicht schiebt man genau an die Stelle der Funkenstrecke ein Blechdiaphragma, und entwirft mit Hilfe der Linse *l* und einem Uhrheliostaten auf demselben ein Sonnenbild. Ein nach Bedürfniss eingeschaltetes total reflectirendes Prisma *T* gestattet auch ein zweites Heliostatenfenster zu benützen.[1] Man muss vor jedem Schuss den Streifen die entsprechende Breite und Lage ertheilen, da dieselben durch die Lufterschütterung immer etwas verschoben werden. Über Nacht können die Streifen durch starke Temperaturschwan-

[1] Der beste Ersatz für Sonnenlicht ist natürlich elektrisches Licht, doch waren die vom Gasmotor und der Lichtmaschine ausgehenden Erschütterungen selbst im Souterrain des Institutes so merklich, dass die genaue Einstellung der Interferenzstreifen Schwierigkeiten hatte.

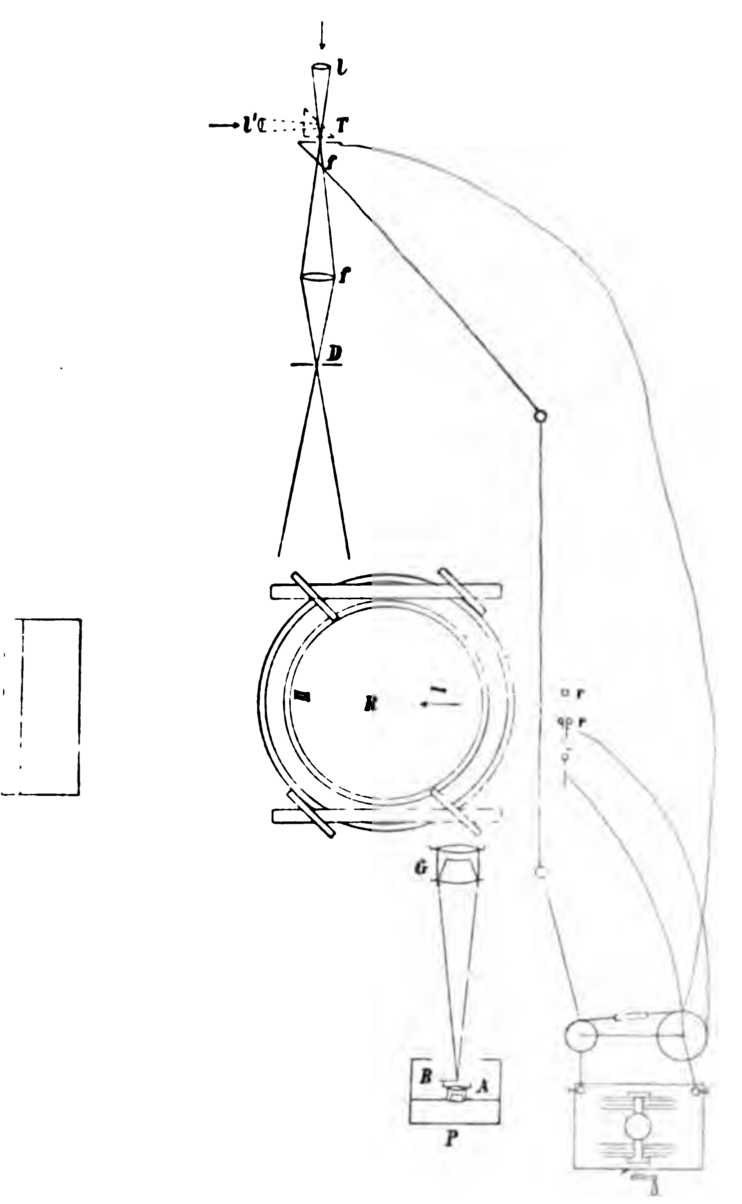


Fig. 10.

kungen aus dem Felde gehen, stellen sich jedoch bei Rückkehr der früheren Temperatur genau wieder ein.

Die elektrische Aufstellung blieb dieselbe, wie bei den Schlierenversuchen, nur wurde statt der einfachen Influenzmaschine eine solche mit vier Scheiben verwendet.

Der Auslösungsapparat erlitt eine kleine Änderung, welche ein exactes Zielen wesentlich erleichterte, was bei der Gefährlichkeit eines Fehlschusses für den kostbaren Interferenzapparat von Wichtigkeit war.

Hinter dem Holzring des Auslösungsapparates befindet sich eine kleine Kiste (Fig. 11) mit geknicktem Schlot, schwarz

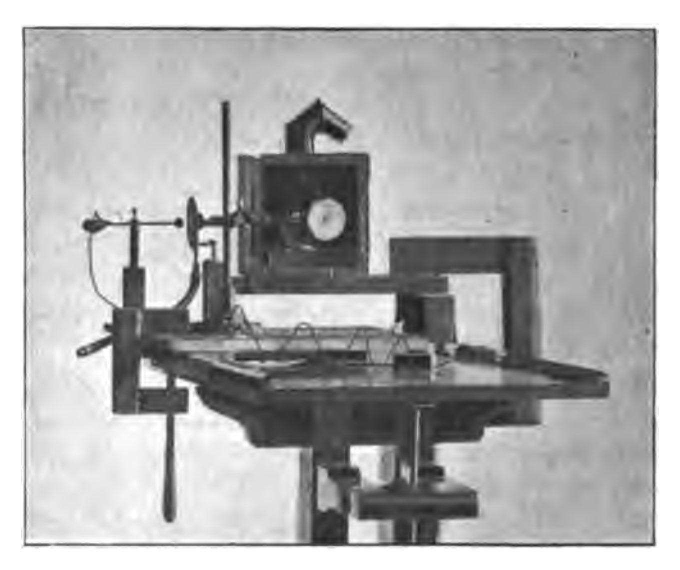


Fig. 11.

ausgestrichen, und an der Rückseite mit einem Ausschnitt in der Ringgrösse versehen, welcher mit schwarzem Papier verklebt ist. In der Kiste steht eine Kerze, welche das Verschlusspapier des Auslösungsringes beleuchtet, auf dem sich ein schwarzer Zielpunkt befindet. Durch die Kopfwelle des Projectils wird bei jedem Schluss die Flamme ausgelöscht. Diese Anordnung hat neben der intensiven Beleuchtung des Ringes auch noch den Zweck, jedes falsche Licht vom Apparat auszuschliessen. Würde man das Licht, wie bei den Schlierenaufnahmen, vor den Kugelfang stellen, so würde trotz aller

Abblendungen durch die vielen reflectirenden Flächen des Interferenzapparates Licht in das Objectiv *A* geworfen, was eine Trübung der photographischen Platte zur Folge hätte.

Der Beleuchtungsfunken bildet die grösste Schwierigkeit. Bei Beschreibung des Interferenzapparates wurde schon erwähnt, dass man (wegen der vielen nicht exact parallelen Flächen) ein reines Streifensystem nur mit einer punktförmigen Lichtquelle erhält. Die Funkenlänge, welche hier angewendet werden konnte, überstieg nun nicht 1·8 *mm*. Die verwendbare Lichtquantität wurde jedoch fast auf das Doppelte dadurch gesteigert, dass ein kleiner Hohlspiegel (aus einem Amici'schen Spiegelmikroskop) hinter den Beleuchtungsfunken gestellt wurde, und zwar so, dass letzterer fast in den Mittelpunkt des Spiegels, und somit das Funkenbild, unmittelbar neben den Originalfunken fiel. Dennoch musste man sich auf sehr kleine Bilder (4 *mm*) beschränken.

Ergebnisse der Interferenzversuche.

Ich kann nicht unterlassen, gleich hier zu bemerken, dass, so sehr sich der neue Interferenzapparat bei anderen Versuchen bewährt hat, die Ergebnisse bei den Projectilversuchen hinter den Erwartungen zurückgeblieben sind. Es liegt dies hauptsächlich an der geringen Lichtmenge, welche bei der Momentbeleuchtung in Form sehr kurzer Funken (1·8 *mm*) zur Verwendung kommen musste. Hiedurch war wieder die Grösse des Originalbildes (auf 4 *mm*) beschränkt, und bei der nothwendigen Vergrösserung dieser Bilder zum Zwecke des Studiums kam natürlich das Korn der Platte sehr bedeutend zum Vorschein.

Die meisten Bilder wurden mit weissem Licht gewonnen. Dieselben gewähren den Vortheil, dass man den Interferenzstreifen, der dem Gangunterschied Null entspricht, auch in der Photographie deutlich erkennt, und dass man denselben auch in seinen Verschiebungen und Verkrümmungen leicht verfolgen kann. Zu beiden Seiten dieses Streifens befinden sich in diesem Falle nur wenige deutliche Streifen, dann tritt eine Verwischung ein, und erst die folgenden Streifen sind wieder deutlicher. Man sieht dies an den Interferenzbildern, welche

bei verschiedener Streifenrichtung (ohne Projectil) auf Tafel V dargestellt sind.

Hat man sich so über den Hauptverlauf der Streifen orientirt, so wünscht man natürlich an einem reineren Bilde, welches mit monochromatischem (einer Stelle des Funkenspectrums entsprechendem) Licht hergestellt ist, den genaueren Verlauf zu studiren. Die so gewonnenen Bilder sind aber ungemein zart und schwach, so dass dieselben durch ein besonderes Verstärkungsverfahren deutlich gemacht werden müssen. Ich sehe von denselben hier vorläufig ab. Leider bin ich erst nach Beendigung der Versuche zur Einsicht gelangt, dass es zweckmässiger gewesen wäre, statt monochromatischer Beleuchtung des Interferenzfeldes, einfach ein Spectrum über dasselbe auszubreiten, was zwar eine etwas umständlichere Interpretation, aber einen beträchtlichen Gewinn an Lichtintensität gegenüber der monochromatischen Beleuchtung ergeben hätte.

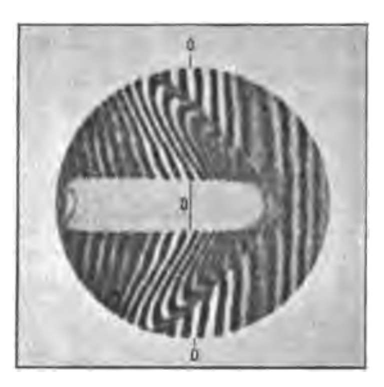


Fig. 12.

Es soll nicht unbemerkt bleiben, dass das kleine photographische Objectiv mit der Blendung, welches das Interferenzbild aufnimmt, zugleich als Schlierenapparat wirkt, weshalb auf den Bildern eine Silhouette der Kopfwelle erscheint, welche das Streifensystem durchzieht. An manchen Stellen, so am Projectilende, greifen die Streifen über das Projectilbild über, eine Erscheinung, deren vollständige Erklärung ich hier noch nicht geben kann. Ich beschränke mich hier, da ich nun äusserer Umstände wegen diese Arbeit doch zu einem vorläufigen Abschluss bringen muss, auf einige quantitative Angaben von grösserer Sicherheit.

Fig. 12 stellt eine Vergrösserung des Projectbildes im Interferenzfelde vor. Die folgende schematische Fig. 13 ist nach verschiedenen photographischen Bildern in natürlicher Grösse entworfen. Wir denken uns z. B. 19 *mm* hinter dem Projectil-

kopf einen auf die Projectilaxe senkrechten (kreisförmigen) ebenen Schnitt durch die Kopfwelle geführt. Die Streifenverschiebung für einen Strahl, welcher in einer bestimmten Entfernung r von der Projectilaxe in diesem Schnitt verläuft,

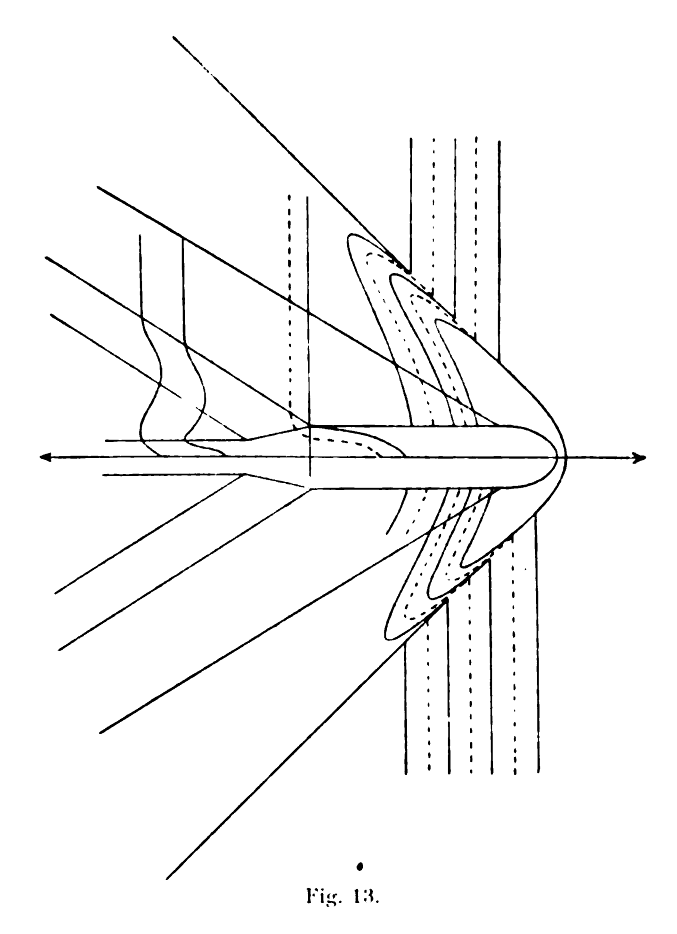


Fig. 13.

kann unmittelbar aus der Zeichnung abgelesen werden; dieselbe hängt von r ab, mit welchem r zugleich der Weg des Strahles durch die Kopfwelle gegeben ist. Man hat nun zu bedenken, dass die Luftdichte ebenfalls von r abhängt, und dass in dem betrachteten Schnitt in jeder Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Projectilaxe liegt, überall gleiche Dichte herrscht.

Stellt also Fig. 14 jenen Kreisschnitt vor, so zerfällen wir denselben in Ringe und betrachten die jene Ringe tangirenden Strahlen in der Ordnung von aussen nach innen.

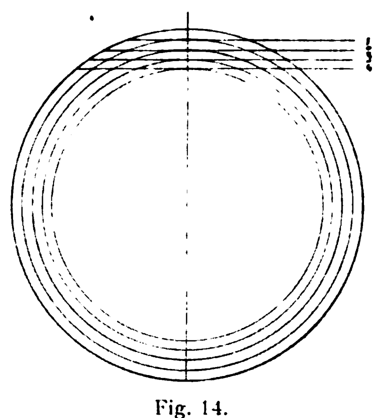


Fig. 14.

Der eine der interferirenden Strahlen geht durchaus durch normale Luft, der andere auf dem Wege s durch Luft, welche gegen jene den Dichtenunterschied ρ darbietet. Nach dem Fresnel'schen Princip ist, wenn v die Verschiebung des Interferenzstreifensystems bedeutet,

$$s.\rho = k.v$$

und nach einer früheren Entwicklung von E. Mach[1] kann für unseren Fall einfach gesetzt werden

$$s\rho = 2v,$$

wenn s den Weg in Millimetern, ρ die Dichtenzunahme in Atmosphären und v die Verschiebung in Streifenbreiten bedeutet. Bezeichnet man nun die Werthe für die auf einander folgenden Schichten von aussen nach innen mit dem Index 1, 2, 3 ..., so ergeben die Gleichungen:

$$s_1\rho_1 = 2v_1$$
$$s_1'\rho_1 + s_2\rho_2 = 2v_2$$
$$s_1''\rho_1 + s_2'\rho_2 + s_3\rho_3 = 2v_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei darauf Rücksicht genommen ist, dass die Weglängen der auf einander folgenden Strahlen durch Schichten derselben Dichte verschieden sind, wie dies Fig. 14 veranschaulicht. Diese Gleichungen können aus Fig. 13 und 14 hergestellt werden, indem die s und v unmittelbar abgelesen werden können. Dann folgt aus der ersten Gleichung ρ_1, welches in die zweite ein-

[1] E. Mach und J. v. Weltrubsky, Über die Formen der Funkenwellen. Diese Sitzungsberichte, Bd. LXXVIII, Abth. II, Juli 1878.

gesetzt ρ_2 liefert, während beide Werthe ρ_1, ρ_2 in die dritte Gleichung eingeführt ρ_3 liefern u. s. w., so dass man von aussen nach innen fortschreitend den Schichtenbau der Welle in dem betreffenden Schnitt construirt. Es ergibt sich so

r^{mm}	ρ^{atm}
24—22·5	+0·166
22·5—20·5	+0·20
20·5—17·5	+0·1
17·5—14	—0·032
14—4	—0·085

wobei die ρ natürlich nur Mittelwerthe vorstellen.

Multiplicirt man den Ringflächen der Fig. 14 proportionale Zahlen mit $1+\rho$, und vergleicht die Summe mit einer der ganzen Schnittfläche (mit Einschluss des Projectilquerschnittes) proportionalen Zahl, so erhält man eine Vorstellung von der Gesammtwirkung des Projectils. Die Zahlen verhalten sich in unserem Falle wie 582 : 576 und entsprechen den Luftmassen, welche in einer dem Schnitt parallelen dünnen Schichte mit und ohne Projectil enthalten sind. Das Projectil hat also die umgebende Luft nur etwas nach aussen und vorne zusammengeschoben, ohne im Ganzen eine grosse Verdichtung zu erzeugen. Das ist ja zu erwarten, da das Projectil keine neue Luftmasse schafft, sondern nur die vorhandene verschiebt, und da zudem der Einfluss der Reibung auf die eben durchsetzte Luft, wie aus dem Schuss durch die Flamme hervorgeht, nur gering ist, entgegen der Vorstellung, die Melsens seinerzeit entwickelt hat.

Durch analoge Betrachtungen an Fig. 13 findet man in der Schwanzwelle eine Verdünnung von 0·07 Atmosphären, und unmittelbar am Projectilende ist sogar $\rho = -1$, d. h. man muss daselbst ein Vacuum annehmen. Die Verdünnung nimmt im Schusscanal mit der Entfernung vom Projectil rasch ab. In einiger Entfernung vom Projectil erhalten die Streifen ein etwas wirres Ansehen. Das Licht geht dort wahrscheinlich durch die erwärmte wirbelnde Luft des Schusscanals.

Hiemit ist das erschöpft, was sich nach meiner Meinung gegenwärtig mit einiger Sicherheit angeben lässt.

Tabelle der verwendeten Geschosse.[1]

Gewehr-Art	Geschoss		Ladung		Geschwindigkeit	
	Art → (Flugrichtung)	Gewicht	Pulversorte	Gewicht	V_1 m/sec.	V_2 m/sec.
Werndl 11 mm	Messingprojectil	18 g		5 g	503	
Werndl 11 mm	Messingprojectil	18 g		5 g	567	
Werndl 11 mm	Messingprojectil	18 g		5 g	425	
Werndl 11 mm	Aluminiumprojectil	1·9 g		5·5 g	974	

Werndl 11 *mm*	Projectil aus Buchsbaumholz	0·7 *g*		5·5 *g*		
Mannlicher 8 *mm*	Österreichisches Stahlmantel-geschoss M. 1888	15·85 *g*	Schwarzpulver M 92.	4 *g*	493	530 *m* sec.
Mannlicher 8 *mm*	Österreichisches Stahlmantelgeschoss M. 1888. Die Spitze abgeschnitten	13·65 *g*	Schwarzpulver M. 92.	4 *g*	518	
Mannlicher 8 *mm*	Österreichisches Stahlmantel-geschoss M. 1888	15·75 *g*	Rauch-schwaches Pulver	2·75 *g*		620 *m* sec.
Mannlicher 8 *mm*	Stahlmantel-geschoss mit nach der Curve kleinsten Widerstandes geformter Spitze	15·8 *g*	Schwarzpulver M. 92	4 *g*	498	530 *m* sec.

[1] V_1 nach der Form der Wellengrenze geschätzt, V_2 officiell.

Erklärung der Tafeln.

Die elliptische Form des Feldes ist durch die optische Aufstellung (Trennung der Bündel in der Horizontalen) bedingt. Die ersten vier Tafeln enthalten die nicht retouchirten Reproductionen der doppelt vergrösserten Originalaufnahmen (die grosse Axe beträgt 37 *mm*). Bei der Anwendung hochempfindlicher Schleussnerplatten musste gegen $1^1/_2$ Stunden entwickelt werden.

Taf. I.

Fig. 1. Doppelt stumpfes Aluminiumprojectil 974 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (23. December 1892).

Fig. 2. Hinten gespitztes Messingprojectil 420 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (19. December 1892).

Taf. II.

Fig. 3. Österreichisches Stahlmantelgeschoss 530 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (26. December 1892).

Fig. 4. Das Stahlmantelgeschoss inmitten eines von einem Bunsenbrenner aufsteigenden heissen Luftstromes 530 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (31. December 1892).

Taf. III.

Fig. 5. Abgestumpftes österreichisches Stahlmantelgeschoss 558 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (26. December 1892).

Fig. 6. Abgestumpftes österreichisches Stahlmantelgeschoss 518 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (27. December 1892).

Taf. IV.

Fig. 7. Spitzes Stahlmantelgeschoss nach Prof. August's Angaben von Herrn Hauptmann Adolf Weigner in Wien hergestellt. Die Geschwindigkeit beträgt nach der Grösse des Schwanzwellenwinkels etwa 530 *m*/sec. Blendungsschneide senkrecht zur Projectilaxe (1. August 1893).

Fig. 8. Österreichisches Stahlmantelgeschoss 530 *m*/sec. Blendungsschneide parallel der Projectilaxe.

Taf. V.

Alle Projectile gehen von links nach rechts durch das Interferenzfeld (78 *mm* Durchmesser). Die Tafelreproductionen sind fünffache Linearvergrösserungen der kleinen Originalbilder von blos 4 *mm* Durchmesser. Die

Entwicklung letzterer dauerte bei der Verwendung vorbelichteter Schleussnerplatten meist gegen vier Stunden. Das Projectil wurde immer im Bündel I aufgenommen (Fig. 10 des Textes). Als Lichtquelle diente ein 1·8 *mm* langer zwischen stumpfen Magnesiumspitzen frei überspringender Flaschenfunken (500 *cm* Capacität). Der Apparat war immer so eingestellt, dass bei jeder Lage des Streifensystems die beiden tief schwarzen Streifen, zwischen denen der Gangunterschied Null liegt, genau durch das Feldcentrum verlaufen. Die Streifenverschiebung nach links bedeutet eine Verdichtung.

Fig. 9 und 10. Stahlmantelgeschoss von 620 *m*/sec. Geschwindigkeit bei vertical stehendem Streifensystem (10. August 1893).

Fig. 11. Kopf des Stahlmantelgeschosses von 620 *m*/sec. Geschwindigkeit bei vertical stehendem, aber etwas feinerem Streifensystem (15. August 1893).

Fig. 12 und 14 Stahlmantelgeschoss von 620 *m*/sec. Geschwindigkeit bei schiefgelegtem Streifensystem (15. August 1893).

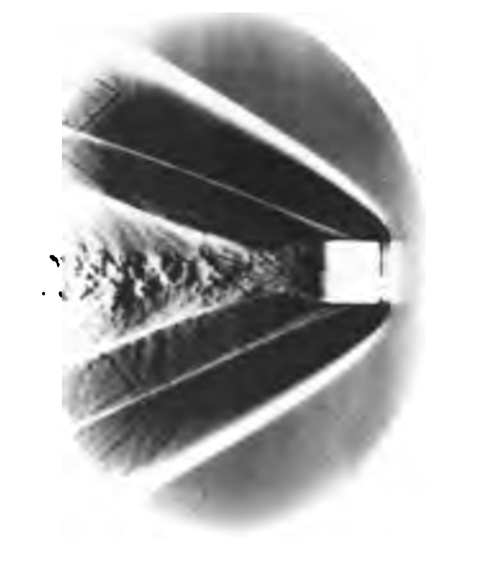
Fig. 13. Das schiefgelegte Streifensystem (15. August 1893).

Fig. 15. Schwanzpartie des Stahlmantelgeschosses von 620 *m*/sec. Geschwindigkeit bei vertical stehendem Streifensystem (10. August 1893).

Fig. 16. Schwanzpartie des Stahlmantelgeschosses von 620 *m*/sec. Geschwindigkeit bei schiefgelegtem Streifensystem (10. August 1893).

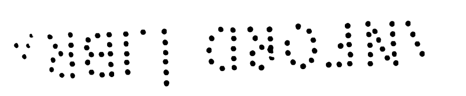
Fig. 17. Schwanzpartie des Stahlmantelgeschosses von 620 *m*/sec. Geschwindigkeit bei horizontal gelegtem Streifensystem (10. August 1893).





1.

2.



Lichtdruck von J. Löwy, k. u. k. Hofphotograph, Wien.



3.

4.

Lichtdruck von J. Löwy, k. u. k. Hofphotograph, Wien.



5



6

Lichtdruck von J. Löwy, k. u. k. Hofphotograph, Wien

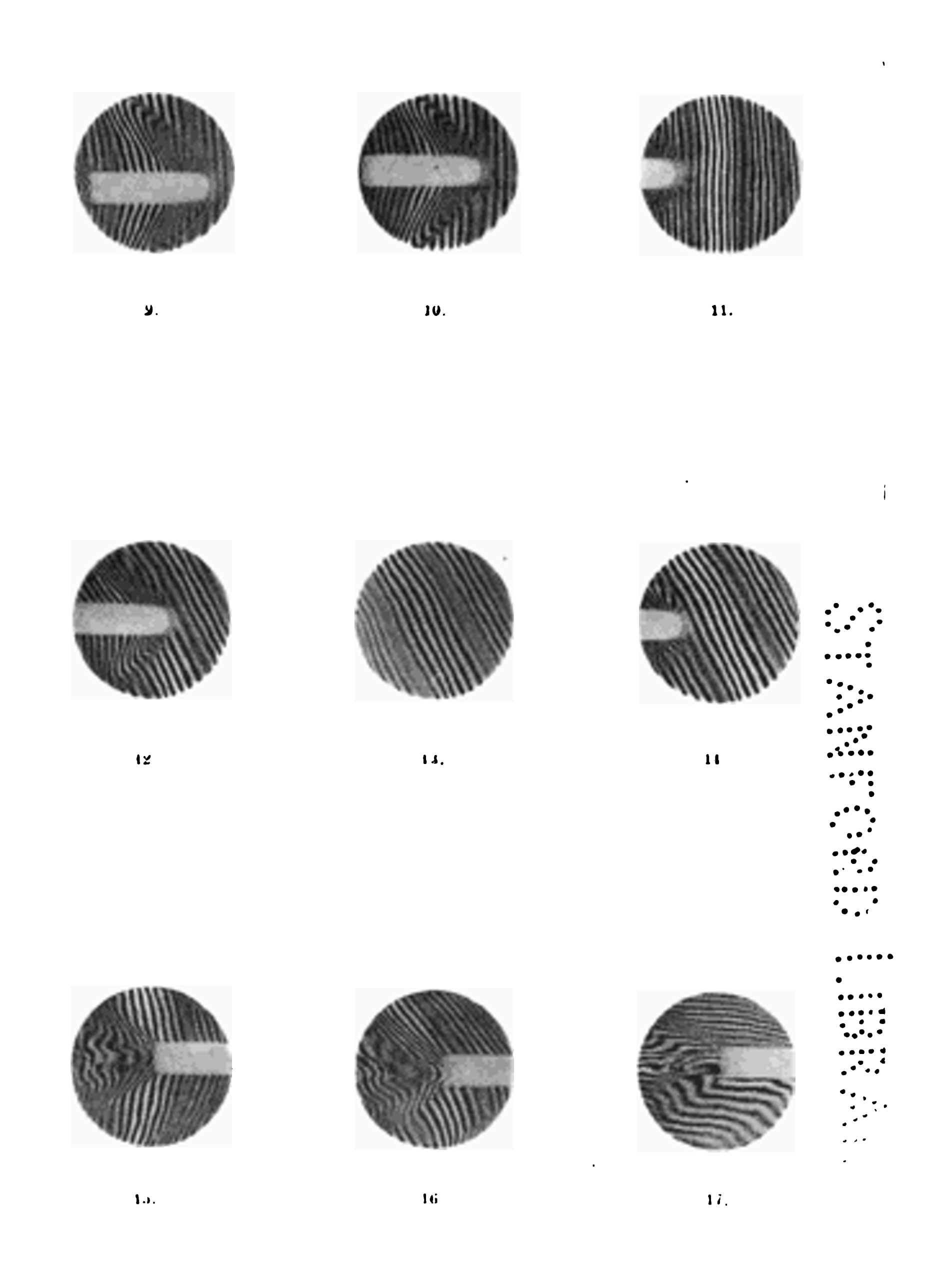


7.



8.

Lichtdruck von J. Löwy, k. u. k. Hofphotograph, Wien



9. 10. 11.

12. 13. 14.

15. 16. 17.

Lichtdruck von J. Löwy, k. u. k. Hofphotograph, Wien.



Über permanente Magnete aus steirischem Wolframstahl

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

Die Frage der Herstellung guter permanenter Magnete ist mit Rücksicht auf die vielfache Verwendung solcher bei der Construction und Aichung von elektrotechnischen und physikalischen Apparaten, sowie bei erdmagnetischen Beobachtungen sowohl für den Elektrotechniker, als auch für den Physiker von grossem Interesse. Unter der Güte eines Magnets wird man wohl in erster Linie einen möglichst unveränderlichen Werth seines magnetischen Moments verstehen; dann aber sind auch andere Eigenschaften, wie ein hoher specifischer Magnetismus, ein geringer Inductionscoëfficient u. s. w. sehr schätzenswerth. Bekanntlich waren die älteren Magnete hinsichtlich der Haltbarkeit des magnetischen Moments sehr schlecht, indem es ja manchmal vorkam, dass das magnetische Moment im Verlaufe von einigen Monaten um viele Procente des ursprünglichen Werthes sank. In neuerer Zeit werden permanente Magnete erzeugt, welche in dieser Beziehung viel besser sind.

Zur Herstellung guter Magnete scheint der von der Gussstahlfabrik Gebrüder Böhler & Co. in Kapfenberg in Steiermark erzeugte Wolframstahl ganz besonders geeignet zu sein. Über einige Eigenschaften dieses steirischen Wolframstahls, namentlich über den Zusammenhang zwischen Härtungstemperatur und permanentem Magnetismus hat schon Holborn [1] in einer

[1] Zeitschrift für Instrumentenkunde, XI. Jahrg., S. 113.

Thatsache, dass für dieses Intervall v nahezu einen constanten Werth von 2·5 besitzt. Aus den Abmessungen der Magnete und aus deren Gewicht folgt im Mittel ein specifisches Gewicht von 7·75.

1. Die Änderung des magnetischen Moments.

Sämmtliche Stäbe wurden am 7. Jänner d. J. im Felde von 639 abs. E. magnetisirt, und zwar geschah die Magnetisirung in der Weise, dass der Stab in die Spule eingelegt und sodann der Magnetisirungsstrom ungefähr 4 Secunden lang geschlossen wurde. Hierauf wurde der Strom unterbrochen, der Magnet aus der Spule genommen und sofort am Magnetometer untersucht. Die Änderungen des Moments ΔM sind in der nachfolgenden Tabelle II angegeben. Die grösste Änderung in 20 Tagen beträgt 3·6% bei Nr. 3, davon entfällt aber eigentlich der beträchtlichste Theil auf den ersten Tag. Ein Einfluss des Dimensionsverhältnisses auf die Grösse der Änderung lässt sich kaum erkennen, eher würde man sagen, dass die Änderungen bei den dicken Stäben etwas grösser ausfallen als bei den dünnen.

Tabelle II.

	Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ΔM in Proc.	1. Tag	1·4	1·6	3·2	3·0	1·1	2·0	1·0	1·3	2·0	0·7	2·1	1·2	1·4	0·5	0·9
	20. Tag	3·1	2·7	3·6	3·1	1·6	2·6	1·3	1·4	2·0	1·0	2·6	1·3	1·7	0·7	0·9

Nach dem 20. Tage blieb das Moment nahezu ganz unverändert. In Tabelle III werden speciell einige Beobachtungen an drei Stäben angeführt, die einen Zeitraum von ungefähr sechs Monaten umfassen. Statt der Momente sind direct die Magnetometerablenkungen zu verschiedenen Zeiten angegeben.

Die Magnetometerablenkungen zeigen allerdings auch nach dem 27./1. (nach dem 20. Tage) kleine Verschiedenheiten, die zum Theile vielleicht in einer wirklichen vorübergehenden Änderung des Moments, zum grössten Theile aber wahrscheinlich in einer Änderung der Constanten des Magnetometers liegen.

Tabelle III.

Nr.	Magnetometerablenkungen und Datum der Beobachtung											
	7./1.	8./1.	12./1.	27./1.	20./2.	8./3.	17./3.	11./4.	8./5.	4./6.	23./6.	1./7.
1	702·5	692·5	689·4	681·4	677·7	680·2	678·6	681·5	681·4	682·8	678·6	680·5
9	65·6	64·3	64·3	64·5	64·0	64·2	63·9	64·4	63·8	64·1	63·8	63·9
11	149·9	146·8	145·5	146·1	144·4	145·3	144·7	145·1	145·3	145·8	145·0	145·1

Jedenfalls lässt sich aus den angeführten Zahlen eine dauernde Abnahme des Moments nach dem 20. Tage kaum constatiren. Die übrigen Magnete zeigten alle ein ebensolches Verhalten, sie wurden jedoch nicht so lange beobachtet, da ich sie mittlerweile in anderen Richtungen untersuchte. Es sei noch erwähnt, dass die Magnete während der Beobachtungszeit ruhig liegen blieben und den Temperaturschwankungen, wie sie eben in einem Locale durch die Jahresverhältnisse bedingt sind, ausgesetzt waren.

Die Stäbe Nr. 2, 5, 7, 8 und 14 wurden im genannten Magnetfeld am 19./4. neu magnetisirt, diesmal jedoch so, dass die Stromrichtung in der Spirale 50mal gewechselt wurde und die Magnete daher 50 Polwechsel durchmachten. Auch diese Magnete blieben hierauf längere Zeit ruhig liegen. Tabelle IV gibt einige Daten, welche das Moment dieser Magnete betreffen.

Tabelle IV.

Nr.	Magnetometerablenkungen und Datum der Beobachtung						
	19. 4.	20. 4.	30. 4.	8. 5.	4. 6.	23. 6.	1. 7.
2	594·0	591·7	589·7	591·1	591·9	590·3	590·9
5	503·3	501·4	499·2	500·6	501·5	499·6	500·0
7	368·0	367·6	367·1	367·7	368·4	366·8	366·8
8	121·5	120·8	120·8	121·2	121·0	120·3	120·6
14	73·5	73·1	73·2	73·3	73·4	73·1	73·2

Die Zahlen dieser Tabelle zeigen ganz deutlich den ausserordentlich günstigen Einfluss der mehrmaligen Ummagneti-

sirung auf die Haltbarkeit des magnetischen Moments. Die Änderungen übersteigen selbst innerhalb des ersten Tages nirgends $0\cdot5^0/_0$. Was den absoluten Werth des magnetischen Moments anbelangt, so ist dieses nach einer 50maligen Magnetisirung gar nicht grösser als nach der einmaligen.

Schliesslich unterzog ich (25./4.—2./5.) die Magnete Nr. 3, 4, 6, 10, 12 und 13 dem Verfahren von Strouhal und Barus, indem ich sie in Wasserdampf kochte, und zwar zuerst 2, dann 4, wieder 4 und schliesslich 6 Stunden lang. In jeder Pause wurden die Magnete 50mal hin- und hermagnetisirt. Durch das oftmalige Kochen sank schliesslich der specifische Magnetismus um $10-20^0/_0$. Die Änderungen des magnetischen Moments bei diesen Stäben waren ebenso gering wie bei jenen der Tabelle IV. Ein besonderer Vorzug des Auskochens konnte innerhalb der Dauer der Beobachtungen bei diesem Material nicht constatirt werden.

2. Der Inductionscoëfficient.

Bringt man einen Magnetstab in ein schwaches magnetisches Feld, so wird sein permanentes Moment vorübergehend verändert, und zwar je nach der Richtung des Feldes wird es vergrössert oder verkleinert. Man versteht unter dem Inductionscoëfficienten eines Magnets die vorübergehende Änderung des magnetischen Moments, bezogen auf 1 *g* und auf die Feldstärke 1.

Bezeichnen wir den Inductionscoëfficienten mit λ, mit δm die Gesammtänderung des magnetischen Moments in abs. E. im schwachen Felde von der Intensität H und ist G das Gewicht des Stabes, so ist

$$\lambda = \frac{\delta m}{GH}.$$

Die Bestimmung von λ wurde nach der Methode von Kohlrausch[1] (l. c.) mit Hilfe einer langen, bifilar gewickelten Spirale vorgenommen. Innerhalb der benützten Felder von

[1] F. Kohlrausch, Wied. Ann., XXII, 417; Praktische Physik, 7. Auflage, S. 336.

0·99, 1·55, 2·74 und 3·70 abs. E. erwies sich der Inductionscoëfficient bei allen Stäben als constant, und zwar wurden folgende Werthe erhalten:

Nr.	3,	6,	8,	9,	10,	12,	13.
Λ	0·228,	0·160,	0·140,	0·141,	0·180,	0·154,	0·191.

Mit Ausnahme von Nr. 3 besitzen alle Magnete einen sehr kleinen Inductionscoëfficienten, und zwar fällt er umso kleiner aus, je niedriger das Dimensionsverhältniss des betreffenden Stabes liegt. Die Abweichung bei Nr. 3 dürfte wohl auf eine Anomalie in der Härtung zurückzuführen sein. Kohlrausch gibt (l. c.) als Grenzen für den Inductionscoëfficienten gewöhnlicher Magnete die Werthe 0·2—0·3 an, welche weit über unseren Zahlen liegen.

Die Bestimmungen wurden nach dem Auskochen der Magnete zum Theile wiederholt und folgende Daten gefunden:

Nr. ...	3,	6,	12,	13.
Λ ...	0·220,	0·182,	0·171,	0·220.

Die Inductionscoëfficienten sind also bis auf Nr. 3, welches wieder ein abnormales Verhalten zeigt, durch das Auskochen grösser geworden.

3. Dauernde Änderungen des Moments durch schwache Felder.

In vielen Fällen ist es interessant und wichtig zu wissen, welchen schwachen Feldern man einen Magnet noch aussetzen darf, ohne sein Moment dauernd zu verändern. Um einige diesbezügliche Werthe zu erhalten, habe ich die Stäbe in derselben Spule, welche zur Bestimmung der Inductionscoëfficienten diente, schwachen Feldern ausgesetzt, und zwar wurde jedes Feld etwa 20mal gewechselt, während sich der Magnet in der Spule befand. In allen Fällen, wo überhaupt eine Änderung auftrat, war eine Verminderung zu constatiren. In Tabelle V sind einige Resultate angegeben.

Im Mittel betragen die Änderungen im Felde von 3·7 abs. E. 0·1%, und selbst im Felde von 5·6 erreichen sie nirgends die

Höhe von 1%. Beobachtungen, welche H. Sack[1] mit einigen Magneten in ähnlicher Richtung angestellt, zeigen bei zwei Parallelepipeden (bezogen von Hartmann und Braun) entschieden grössere Verluste in diesen Feldern, während ein Cylindermagnet aus englischem Gussstahl von Burys & Co. etwa das gleiche Verhalten zeigte wie die hier untersuchten. Das Auskochen ändert wenig an dem Verhalten der Magnete in dieser Beziehung; doch scheinen die Änderungen bei den ausgekochten Magneten etwas früher einzusetzen.

Tabelle V.

Feldstärke	Verluste in Procenten						
	Nr. 3	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10	Nr. 12	Nr. 6	Nr. 13
2·1	0	0	0	0	0	0	0
2·7	0	0·1	0	0·1	0	0	0
3·7	0	0·2	0·2	0·2	0·1	0	0·1
5·6	0·7	0·3	0·3	0·8	0·7	0·4	0·5
9·4	3·5	1·0	0·8	1·9	2·3	0·8	1·8

4. Der Einfluss der Erschütterungen.

Über den Einfluss der Erschütterungen hat bereits Holborn (l. c.) einige Beobachtungen mit zwei Magneten aus steirischem Wolframstahl und zwei Magneten aus Werkzeugstahl von Marsh Brothers & Co. gemacht. Er liess die Magnete 1 *m* hoch auf Holz oder Messing fallen. Beide Sorten lieferten das gleiche Resultat, nämlich eine Abnahme des Moments um einige Procente, wenn der Stab mehrmals von 1 *m* Höhe auf Messing fiel bei frisch magnetisirten Stäben. Nach dem Auskochen der Magnete war der Einfluss der Erschütterung nur mehr äusserst gering. Ich liess die Magnete Nr. 3, 5, 6 und 7 von 1 *m* Höhe auf eine Steinplatte fallen. Die Magnete 3 und 6 waren ausgekocht. Es wurden folgende procentische Abnahmen constatirt:

[1] Wied. Ann. Bd. XXIX, S. 53.

Nr.	3,	5,	6,	7
Abnahme nach 1maligem Fallen	0·1,	0·5,	0·3,	0·3
» » 10 » »	0·4,	1·1,	0·6,	1·1

Hier zeigt sich ganz entschieden die günstige Wirkung des Auskochens. Im Allgemeinen folgt aber aus den Zahlen, dass bei dieser Stahlsorte der Einfluss der Erschütterung nicht gross ist und dass eine Änderung des magnetischen Moments durch zufällige Erschütterungen nicht zu befürchten ist.

5. Der Einfluss der Berührung durch Eisen oder Stahl.

Nach einer Ausmessung der Dicke einiger Magnete mit einem Dickemesser zeigten alle diese Stäbe eine Abnahme des magnetischen Moments um etwa 3%. Es zeigte sich, dass das Berühren der Stäbe mit der eisernen Spindel und dem eisernen Anschlagzapfen des Dickemessers das magnetische Moment vermindert. Ich machte nun weitere Versuche in dieser Richtung und fand, dass eine blosse Berührung des Magnets mit einem Stab aus weichem Eisen oder Stahl, sei es am Pol oder an der Seite, das Moment gar nicht verändert; sobald man jedoch mit dem Stab ein wenig längs des Magnets streicht, wird das Moment sofort beträchtlich vermindert. Ich nahm Cylinder aus weichem Eisen, 0·7 *cm* dick und 20, respective 10 *cm* lang, die ich etwa mit 1 und 2 bezeichnen will.

Nun habe ich folgende Versuche gemacht:

Magnet Nr. 2.

Moment	= 513·5	Scth.,
Cyl. 2 an Magnet parallel angelegt und parallel abgezogen	= 465·9	»
dasselbe viermal wiederholt	= 395	»
» 20mal mit Cyl. 1	= 331·4	»
» 100 » » » 1	= 283·5	»

Magnet Nr. 8.

Moment	= 99·6	Scth.,
Streichen mit der Messerklinge vom Nordpol zum Südpol	= 98·5	»

Streichen mit Cyl. 1 einmal............. = 94·5 Scth.,
» » » 1 zehnmal............ = 84·6 »

Magnet Nr. 6.

Moment............................ = 212·0 Scth.,
Cyl. 1 parallel abgezogen einmal .... = 200·7 »
» 1 » » 20mal......... = 140·2 »
» 1 » » 40 » .... = 133·8 »

Aus diesen Daten geht zur Genüge hervor, wie gefährlich es ist, einen Magnet mit weichem Eisen oder Stahl in Berührung zu bringen. Man wird daher gut thun, Magnete, bei denen man ein constantes Moment zu haben wünscht, einzeln etwa in Glas- oder Messingröhren aufzubewahren, wenn dies sonst die Umstände erlauben.

Fasst man die hier gefundenen Resultate zusammen, so ergeben sie für die untersuchte Stahlsorte eine grosse Haltbarkeit des magnetischen Moments, einen hohen specifischen Magnetismus und einen kleinen Inductionscoëfficienten. Was insbesondere die Haltbarkeit des magnetischen Moments anbelangt, so liess sich innerhalb der Beobachtungszeit (ausgenommen die ersten Tage nach der Magnetisirung) keine dauernde Abnahme des Moments constatiren. Allerdings differirten die zu verschiedenen Zeiten gemachten Bestimmungen bei der Gruppe 1, 9, 11 in maximo um etwa 1% und bei der Gruppe 2, 5, 7, 8 und 14 in maximo um etwa 0·5%, doch liegen die betreffenden maximalen Differenzen in einer Weise über die ganze Beobachtungszeit vertheilt, dass man sie wohl nur vorübergehenden Schwankungen des Moments (bedingt zum Theile durch den Temperatureinfluss), dann aber auch den Änderungen der Magnetometerconstanten zuschreiben muss. In dieser Beziehung ist ein Vergleich der hier gefundenen Zahlen mit den von H. du Bois[1] angeführten Beobachtungen Hibbert's über seine Feldetalons interessant. Auch Hibbert

---

[1] Magnetische Kreise u. s. w. S. 325.

findet bei seinen Etalons zu verschiedenen Zeiten maximale Differenzen von 0·5—1·0%. Die mitangeführten Temperaturangaben lehren jedoch, dass die Temperaturschwankungen allein nicht eine genügende Erklärung der Differenzen geben. Es wäre wünschenswerth zu constatiren, wie viel von den beobachteten Differenzen thatsächlich in vorübergehenden Schwankungen der Momente liegt und wodurch diese bedingt sind.

Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Gastheorie

von

Dr. **Hans Benndorf.**

Zu dem Schönsten der Maxwell'schen Gastheorie gehört sicherlich die Art, in der die hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet werden. Von einer allgemeinen Functionalgleichung ausgehend, gewinnt Maxwell durch Specialisirung der Function die gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen, indem er nur Glieder von der höchsten Grössenordnung beibehält. Nimmt man aber noch Glieder der nächsten Ordnung mit auf, so ergeben sich ganz von selbst die Reibungs- und Wärmeleitungsgleichungen. Es erscheint nun im höchsten Grade interessant, die von Maxwell bereits angedeutete Näherungsrechnung auf weitere Glieder zu erstrecken; die Möglichkeit, dass sie auf neue Thatsachen führen könnte allein lässt dies wünschenswerth erscheinen, wenngleich man bei der Willkür der zu Grunde liegenden Hypothesen eine genaue Übereinstimmung der Theorie mit der experimentellen Forschung nicht erwarten darf.

Die vorliegende Abhandlung ist eine Vorarbeit für eine Fortsetzung der Maxwell'schen Rechnungen, die ich auf Anregung Herrn Hofrath Boltzmann's unternommen habe und veröffentliche, weil sie ein abgeschlossenes Ganze bildet, das, wenn auch in der Durchführung langwierig und uninteressant, im Resultat einiges Neue, mathematisch und physikalisch Interessante enthält.

Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Hofrath Boltzmann auch an dieser Stelle meinen herzlichsten

Dank für die vielseitige Anregung und Förderung, deren ich mich von seiner Seite zu erfreuen hatte, auszusprechen.

Um mich in Folgendem möglichst kurz fassen zu können, verweise ich bezüglich aller Beweise und Ableitungen gleich hier auf Boltzmann's Gastheorie und werde die in diesem Buche gewählte Bezeichnungsweise streng beibehalten.

Die der Rechnung zu Grunde gelegten Voraussetzungen betreffend die Constitution des Gases sind folgende: Das Gas ist einatomig, die Moleküle sind Massenpunkte, die sich gegenseitig mit einer Kraft abstossen, die umgekehrt proportional der 5. Potenz der Entfernung ist; auf dieses Gas wirken äussere Kräfte X, Y, Z, die weder Functionen der Geschwindigkeit der Molekeln sind, noch die Zeit explicite enthalten.

Wir wollen ein Volumelement do eines solchen Gases betrachten; $f(\xi, \eta, \zeta)$ sei die Anzahl der Moleküle, welche die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ besitzen. Jedem Molekül lässt sich offenbar durch seine Geschwindigkeitscomponenten ein bestimmter Werth einer beliebigen Function 3 Variabeln $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ eindeutig zuordnen; bildet man die Summe aller dieser Werthe von φ für das ganze Volumelement, so ist nach Boltzmann's Bezeichnung

$$\sum_{\omega,\, do} \varphi = do \int \varphi f \, d\omega,$$

wo $d\omega = d\xi d\eta d\zeta$ und die dreifache Integration von 0 bis ∞ zu erstrecken ist. $\sum_{\omega,\, do} \varphi$ wird sich im Allgemeinen mit der Zeit ändern, und zwar in Folge dreier Ursachen:

1. Durch das Wandern der Moleküle, indem welche aus dem Volumelemente austreten und andere eintreten.

2. Durch die Geschwindigkeitsänderungen, welche die äusseren Kräfte hervorrufen.

3. Durch die Stösse der Molekeln untereinander.

Für diese Veränderung der Grösse $\Sigma_{\omega,\, do}\varphi$ mit der Zeit ergibt sich die Differentialgleichung, aus der Maxwell durch Specialisirung der Function φ die hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet hat.

Dieselbe lautet:[1]

$$m\frac{d\Sigma_{\omega,\,do}\varphi}{dt} = \frac{\partial(\rho\overline{\varphi})}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho\overline{\xi\varphi})}{\partial x} - \frac{\partial(\rho\overline{\eta\varphi})}{\partial y} - \frac{\partial(\rho\overline{\zeta\varphi})}{\partial z} +$$

$$+\rho\left| X\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\xi} + Y\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\eta} + Z\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial\zeta}\right| + mB_5(\varphi),$$

wobei m die Masse eines Moleküles, ρ die Dichte des Gases und $B_5(\varphi)$ ein achtfaches Integral bedeutet, welches die Veränderung von $\Sigma_{\omega,\,do}\varphi$ durch die Zusammenstösse der Molekeln allein darstellt und auf das ich weiter unten zurückkomme, da die Auswerthung desselben für Functionen 4. Grades den Gegenstand der vorliegenden Arbeit ausmacht. Die mit Querstrichen versehenen Grössen sind Mittelwerthe, die in üblicher Weise zu bilden sind.

Die obige Gleichung hat Boltzmann unter der Voraussetzung, dass φ eine ganze Function ist, für die Rechnung dadurch wesentlich vereinfacht, dass er für die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ, $u+\mathfrak{x}$, $v+\mathfrak{y}$, $w+\mathfrak{z}$ einführt, wo u, v, w die Componenten der sichtbaren Bewegung des Gases sind, während $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Geschwindigkeitscomponenten der Moleküle relativ gegen die sichtbare Bewegung bedeuten.

Setzt man $\varphi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = \mathfrak{f}$ und führt die Transformation durch, so erhält man eine neue Differentialgleichung,[2] deren linke Seite der Ausdruck $mB_5(\mathfrak{f})$ bildet.

Die Auswerthung dieses Integrales $B_5(\mathfrak{f})$ für homogene ganze Functionen 4. Grades von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ist nothwendig, um die Maxwell'sche Annäherungsrechnung weiter durchführen zu können. Für Functionen 2. und 3. Grades ist dies bereits geschehen und für die Ableitung der Reibungs- und Wärmeleitungsgleichungen verwendet.

Da sich die Auswerthung des Integrales $B_5(\mathfrak{f})$ einfacher gestaltet, wenn $\mathfrak{f}$ eine körperliche Kugelfunction (deren Definition siehe Boltzmann, Gastheorie, S. 170) der Variabeln $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ist und jede ganze homogene Function 4. Grades

---

[1] Boltzmann, Gastheorie, S. 145.

[2] l. c. S. 151.

dreier Variabeln sich darstellen lässt

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) = a_1 \Pi_4 + a_2 \Pi_2 (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2) + a_3 (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2,$$

wo a_1, a_2, a_3 constante Coëfficienten und Π_4, Π_2 die allgemeine körperliche Kugelfunction 4., respective 2. Grades bedeuten, ergibt es sich von selbst, statt $B_5(\mathfrak{f})$ direct zu berechnen,

$$B_5(\Pi_4), \qquad B_5[\Pi_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)] \quad \text{und} \quad B_5[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2]$$

einzeln auszuwerthen.

In Folgendem sollen nach einer kurzen Auseinandersetzung der Bedeutung des Ausdruckes $B_5(\mathfrak{f})$ der Reihe nach die obigen drei Ausdrücke berechnet werden.

Bedeutung von $B_5(\mathfrak{f})$.[1]

Wie schon oben erwähnt, ist $B_5(\mathfrak{f})$ die Veränderung von $\Sigma_{\omega, d\omega}\,\mathfrak{f}$ mit der Zeit, die durch die Zusammenstösse der Molekeln untereinander bedingt ist. Es ist daher nothwendig, auf die Mechanik der Zusammenstösse einzugehen.

Wir greifen zwei Moleküle M und M_1 heraus; beide hätten die Masse m. Es seien die Componenten der Geschwindigkeit relativ gegen die Gesammtbewegung des Gases $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, vor und $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ nach dem Stoss bei einem Molekül, die des anderen seien entsprechend $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{x}_1', \mathfrak{y}_1', \mathfrak{z}_1'$. Die abstossende Kraft zwischen beiden sei $\frac{K_1}{r^5}$; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{y}_1,\mathfrak{z}_1) = \mathfrak{f}_1, \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}',\mathfrak{y}',\mathfrak{z}') = \mathfrak{f}', \qquad \mathfrak{f}(\mathfrak{x}_1',\mathfrak{y}_1',\mathfrak{z}_1') = \mathfrak{f}_1';$$

f sei die Anzahl der Moleküle, die die gleiche Geschwindigkeit haben wie M, f_1 die Anzahl mit der Geschwindigkeit von M_1.

Wir denken uns nun das Molekül M ruhend und betrachten die Relativbewegung von M_1 gegen M. Die relative Geschwindigkeit von M_1 gegen M sei $g = g'$ vor und nach dem Stoss, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}'$ die entsprechenden Componenten; es werden dann die Richtungen von g und g' Asymptoten der Bahncurve des Moleküles M_1 sein, die den Winkel $\pi - 2\vartheta$ einschliessen

[1] Boltzmann, l. c. §. 17.

mögen. Den Winkel, den die Bahnebene mit einer durch g und die Abscissenaxe gelegten Ebene bildet, sei ε; schliesslich bezeichne b den kleinsten Abstand, an dem das Molekül M_1 an M vorüberfliegen würde, falls keine Kräfte zwischen ihnen thätig wären. In dieser Bezeichnungsweise lautet der Ausdruck für $B_5(\mathfrak{f})$:

$$B_5(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2}\iiint_0^\infty \int_0^{2\pi} (\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1) f f_1 g b \, d\omega \, d\omega_1 \, db \, d\varepsilon,$$

wenn $d\omega = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}\, d\mathfrak{z}$ und $d\omega_1 = d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{y}_1 d\mathfrak{z}_1$ ist.

Die erste Integration von 0 bis 2π ist über ε zu erstrecken, wobei alle Grössen mit Ausnahme von $\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{f}_1'$ constant sind. Aus rein rechnungstechnischen Gründen werden wir aber bei der Ausführung auch $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ unter dem Integralzeichen lassen.

Die zweite Integration erstreckt sich über b von 0 bis ∞, d. h. über alle möglichen Bahnformen, wobei noch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ constant bleiben.

Die beiden letzten Integralzeichen schliesslich bedeuten eine sechsfache Integration von 0 bis ∞ über die Variabeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$.

Die Durchführung der Integration erleichtern und ermöglichen die wunderbaren Kunstgriffe Maxwell's; dank eines solchen kann die Integration nach ε durchgeführt werden, ohne dass man die Abhängigkeit des $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}_1'$ von ε zu kennen braucht, ein zweites ermöglicht, sich von der Berechnung der Functionen f und f_1 ganz unabhängig zu machen.

Wir wollen nun zur wirklichen Durchführung der Integration schreiten.

1. Berechnung von $B_5(\Pi_4)$.

Es sei Π_4 die allgemeinste körperliche Kugelfunction dreier Variabeln; sie lässt sich, wenn man mit $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ willkürliche Constanten bezeichnet, schreiben:

$$\begin{aligned}\Pi_4 = {} & A_1\mathfrak{x}^4 + B_1\mathfrak{y}^4 + C_1\mathfrak{z}^4 + A_2\mathfrak{x}^3\mathfrak{y} + B_2\mathfrak{y}^3\mathfrak{z} + C_2\mathfrak{z}^3\mathfrak{x} + \\ & + A_3\mathfrak{x}^3\mathfrak{z} + B_3\mathfrak{y}^3\mathfrak{x} + C_3\mathfrak{z}^3\mathfrak{y} - 3(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 - \\ & - 3(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2 - 3(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2 - \\ & - 3(B_2+C_3)\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z} - 3(C_2+A_3)\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x} - 3(A_2+B_3)\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}.\end{aligned}$$

Es muss nun zuerst $\int_0^{2\pi} (\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1)\,d\varepsilon$ gebildet werden. Der Ausdruck $\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1 = W'$ vereinfacht sich, wenn wir für die verschiedenen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ andere Variable einführen, und zwar die Componenten der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunktes, die ja durch den Stoss nicht verändert werden. Es seien $\frac{\mathfrak{u}}{2}$, $\frac{\mathfrak{v}}{2}$, $\frac{\mathfrak{w}}{2}$ diese Componenten und $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$, $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}', \mathfrak{r}'$ die Componenten der relativen Geschwindigkeit des Moleküls M_1 gegen M vor und nach dem Stoss.

Es ist dann

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x}+\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{x}-\mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{x}'-\mathfrak{x}_1',$$
$$\mathfrak{v} = \mathfrak{y}+\mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{y}-\mathfrak{y}_1, \quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{y}'-\mathfrak{y}_1',$$
$$\mathfrak{w} = \mathfrak{z}+\mathfrak{z}_1, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{z}-\mathfrak{z}_1, \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{z}'-\mathfrak{z}_1',$$

woraus

$$2\mathfrak{x} = \mathfrak{u}+\mathfrak{p}, \quad 2\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{u}-\mathfrak{p}, \quad 2\mathfrak{x}' = \mathfrak{u}+\mathfrak{p}', \quad 2\mathfrak{x}_1' = \mathfrak{u}-\mathfrak{p}'$$
$$2\mathfrak{y} = \mathfrak{v}+\mathfrak{q}, \quad 2\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{v}-\mathfrak{q}, \quad 2\mathfrak{y}' = \mathfrak{v}+\mathfrak{q}', \quad 2\mathfrak{y}_1' = \mathfrak{v}-\mathfrak{q}'$$
$$2\mathfrak{z} = \mathfrak{w}+\mathfrak{r}, \quad 2\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{w}-\mathfrak{r}, \quad 2\mathfrak{z}' = \mathfrak{w}+\mathfrak{r}', \quad 2\mathfrak{z}_1' = \mathfrak{w}-\mathfrak{r}'$$

folgt.

Führt man diese Werthe in W' ein, so ist

$$16\,W = 6\mathfrak{u}^2(\mathrm{I}'-\mathrm{I})+6\mathfrak{v}^2(\mathrm{II}'-\mathrm{II})+6\mathfrak{w}^2(\mathrm{III}'-\mathrm{III})+$$
$$+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}(\mathrm{IV}'-\mathrm{IV})+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathrm{V}'-\mathrm{V})+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}(\mathrm{VI}'-\mathrm{VI})+2(\mathrm{VII}'-\mathrm{VII}),$$

wobei

$$\mathrm{I} = 2A_1\mathfrak{p}^2-(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{q}^2-(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{r}^2+A_2\mathfrak{p}\mathfrak{q}-$$
$$-(B_2+C_3)\mathfrak{q}\mathfrak{r}+A_3\mathfrak{r}\mathfrak{p}.$$
$$\mathrm{II} = 2B_1\mathfrak{q}^2-(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{r}^2-(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{p}^2+B_2\mathfrak{q}\mathfrak{r}-$$
$$-(C_2+A_3)\mathfrak{r}\mathfrak{p}+B_3\mathfrak{p}\mathfrak{q},$$
$$\mathrm{III} = 2C_1\mathfrak{r}^2-(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{p}^2-(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{q}^2+C_2\mathfrak{r}\mathfrak{p}-$$
$$-(A_2+B_3)\mathfrak{p}\mathfrak{q}+C_3\mathfrak{q}\mathfrak{r},$$
$$\mathrm{IV} = 3A_2\mathfrak{p}^2+3B_3\mathfrak{q}^2-3(A_2+B_3)\mathfrak{r}^2-12(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{p}\mathfrak{q}-$$
$$-6(C_2+A_3)\mathfrak{q}\mathfrak{r}-6(B_2+C_3)\mathfrak{r}\mathfrak{p},$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= 3B_2\mathfrak{q}^2+3C_3\mathfrak{r}^2-3(B_2+C_3)\mathfrak{p}^2-12(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{q}\mathfrak{r}-\\
&\qquad -6(A_2+B_3)\mathfrak{r}\mathfrak{p}-6(C_2+A_3)\mathfrak{p}\mathfrak{q},\\
\mathrm{VI} &= 3C_2\mathfrak{r}^2+3A_3\mathfrak{p}^2-3(C_2+A_3)\mathfrak{q}^2-12(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{r}\mathfrak{p}-\\
&\qquad -6(B_2+C_3)\mathfrak{p}\mathfrak{q}-6(A_2+B_3)\mathfrak{q}\mathfrak{r},\\
\mathrm{VII} &= A_1\mathfrak{p}^4+B_1\mathfrak{q}^4+C_1\mathfrak{r}^4+A_2\mathfrak{p}^3\mathfrak{q}+B_2\mathfrak{q}^3\mathfrak{r}+C_2\mathfrak{r}^3\mathfrak{p}+A_3\mathfrak{p}^3\mathfrak{r}+\\
&\qquad +B_3\mathfrak{q}^3\mathfrak{p}+C_3\mathfrak{r}^3\mathfrak{q}-3(A_1+B_1-C_1)\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2-\\
&\qquad -3(-A_1+B_1+C_1)\mathfrak{q}^2\mathfrak{r}^2-3(A_1-B_1+C_1)\mathfrak{r}^2\mathfrak{p}^2-\\
&\qquad -3(B_2+C_3)\mathfrak{p}^2\mathfrak{r}\mathfrak{q}-3(C_2+A_3)\mathfrak{q}^2\mathfrak{p}\mathfrak{r}-3(A_2+B_3)\mathfrak{r}^2\mathfrak{q}\mathfrak{p}
\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{I}',\quad \mathrm{II}',\quad \mathrm{III}',\quad \mathrm{IV}',\quad \mathrm{V}',\quad \mathrm{VI}',\quad \mathrm{VII}'$$

die analogen Ausdrücke mit den gestrichelten Buchstaben sind.

Zur Ausführung der Integration nach ε bedient man sich mit Vortheil eines Maxwell'schen Kunstgriffes, der auf folgender Eigenschaft von Kugelfunctionen beruht.[1]

Denken wir uns von einem Punkte 0 aus die Geschwindigkeiten g und g' der Grösse und Richtung nach aufgetragen und nennen wir die Endpunkte dieser Strecken G und G', so liegen sie auf einer Kugelfläche vom Radius $g = g'$ und die beiden Geraden schliessen den Winkel $\pi-2\vartheta$ ein. Die sphärischen Coordinaten von G und G' seien λ, ν und λ', ν', so dass

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= g\cos\lambda, & \mathfrak{p}' &= g\cos\lambda',\\
\mathfrak{q} &= g\sin\lambda\cos\nu, & \mathfrak{q}' &= g\sin\lambda'\cos\nu', \qquad\qquad 1)\\
\mathfrak{r} &= g\sin\lambda\sin\nu, & \mathfrak{r}' &= g\sin\lambda'\sin\nu'
\end{aligned}$$

ist; eine durch 0 parallel mit der X-Axe gelegte Gerade durchsteche die Kugelfläche im Punkte X, dann ist der Winkel, den die Ebenen GOX und GOG' miteinander bilden, der Winkel ε. Bezeichnet $p^{(n)}(\varphi, \psi)$ eine Kugelflächenfunction n^{ten} Grades der Variabeln φ und ψ, und bildet nun das Integral $\int_0^{2\pi} p^{(n)}(\lambda', \nu')\, d\varepsilon$, indem man den Punkt G' im Kreise um den Punkt G herumführt, so ist nach Maxwell

$$\int_0^{2\pi} p^{(n)}(\lambda'\nu')\, d\varepsilon = 2\pi P^{(n)}_{[\cos(\pi-2\vartheta)]}\, p^{(n)}(\lambda, \nu)$$

[1] Über die Ableitung siehe Boltzmann, l. c. S. 171.

wobei $P^{(n)}_{[\cos(\pi-2\vartheta)]}$ die zonale Kugelfunction n^{ten} Grades (Coëfficient von x^n in der Entwicklung von

$$\left((1-2\cos(\pi-2\vartheta)x+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

bezeichnet.

Die Anwendung dieses Satzes auf unsere Integrationen leuchtet ein. Die Ausdrücke I′, II′ etc. sind körperliche Kugelfunctionen 2., respective 4. Grades der Variabeln $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, die in Kugelflächenfunctionen durch die Substitutionen 1) übergeführt werden. Wir erhalten dann

$$\int_0^{2\pi} 16\, W d\varepsilon = 2\pi\{[P^{(2)}(\cos(\pi-2\vartheta))-1][6\mathfrak{u}^2\mathrm{I}+6\mathfrak{v}^2\mathrm{II}+ \\ +6\mathfrak{w}^2\mathrm{III}+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV}+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathrm{V}+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathrm{VI}]+[P^4(\cos(\pi-2\vartheta))-1][2\mathrm{VII}]\}.$$

Nun ist

$$P^{(2)}(\cos(\pi-2\vartheta)) = \frac{3}{2}\cos^2 2\vartheta - \frac{1}{2},$$

$$P^{(4)}(\cos(\pi-2\vartheta)) = \frac{35}{8}\cos^4 2\vartheta - \frac{15}{4}\cos^2 2\vartheta + \frac{3}{8},$$

so dass

$$\int_0^{2\pi} 2\, W d\varepsilon = -3\pi\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta[3\mathfrak{u}^2\mathrm{I}+3\mathfrak{v}^2\mathrm{II}+3\mathfrak{w}^2\mathrm{III}+\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV}+ \\ +\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathrm{V}+\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathrm{VI}]+\pi[35\sin^4\vartheta\cos^4\vartheta-10\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta]\mathrm{VII}$$

wird.

Nun können wir zur Integration noch b schreiben. Da nur ϑ von b abhängig ist, sind die beiden Ausdrücke

$$\int_0^\infty \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, b\,db \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \sin^4\vartheta\cos^4\vartheta\, b\,db$$

zu bilden.

Die Abhängigkeit des b von ϑ ist eine sehr complicirte, lässt sich jedoch einfach aus den Bewegungsgleichungen für das Molekül M_1 berechnen.[1] Diese Integrale lassen sich für

[1] Siehe Boltzmann, l. c. §. 21.

etwaige Bedürfnisse der Praxis durch mechanische Quadratur immer auswerthen. So berechnete Maxwell

$$\pi\int_0^\infty \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, b\,db = \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\,.\,C_1 =$$

$$= \frac{1}{2g}\sqrt{\frac{K_1}{2m}}\,.\,1\cdot 3682 = D_1\,.\,\frac{1}{g};$$

analog können wir setzen

$$\pi\int_0^\infty \sin^4\vartheta\cos^4\vartheta\, b\,db = D_2\frac{1}{g},$$

so dass

$$\pi\int_0^\infty \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, g\,b\,db = D_1$$

und

$$\pi\int_0^\infty \sin^4\vartheta\cos^4\vartheta\, g\,b\,db = D_2$$

wird. Es ist dann

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi} 2\,W g\,b\,db\,d\varepsilon = -3D_1[3\mathfrak{u}^2\mathrm{I}+3\mathfrak{v}^2\mathrm{II}+3\mathfrak{w}^2\mathrm{III}+\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV}+ \\ +\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathrm{V}+\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathrm{VI}]+[35D_2-10D_1]\mathrm{VII}. \qquad 2)$$

Um nun die übrigbleibenden Integrationen nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ ausführen zu können, müssen wir in Gleichung 2) auf der rechten Seite für die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ wieder die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ einführen. Thut man dies, so erhält man lauter Glieder von der Form $L\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y}^\beta\mathfrak{z}^\gamma\mathfrak{x}_1^\delta\mathfrak{y}_1^\varepsilon\mathfrak{z}_1^\zeta$, wo L eine Constante ist. Bei der dreifachen Integration nach den mit dem Index 1 versehenen Buchstaben sind die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ constant; die Integrale werden daher die Form haben:

$$L\mathfrak{x}^\alpha\mathfrak{y}^\beta\mathfrak{z}^\gamma\iiint_0^\infty \mathfrak{x}_1^\delta\mathfrak{y}_1^\varepsilon\mathfrak{z}_1^\zeta f_1\,d\mathfrak{x}_1\,d\mathfrak{y}_1\,d\mathfrak{z}_1. \qquad 3)$$

Um sich von der Bestimmung der Function f_1, welche die Geschwindigkeitsvertheilung bestimmt, frei zu machen, schlägt Maxwell folgenden Weg ein:

Der Mittelwerth $\overline{\chi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})}$ einer Function χ der Variabeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ für alle zu einer bestimmten Zeit im Volumelement do sich befindenden Moleküle ist

$$\bar{\chi} = \frac{\int\int\int \chi \cdot f d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}}{\int\int\int f d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z}};$$

da nun

$$m do \int\int\int f d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} = \rho do,$$

wo ρ die Dichte des Gases, so ist

$$\iiint \chi f d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} = \frac{\rho}{m} \cdot \bar{\chi}$$

und da die Bezeichnung der Variabeln ja irrelevant, analog

$$\iiint \chi_1 f_1 d\mathfrak{x}_1 d\mathfrak{y}_1 d\mathfrak{z}_1 = \frac{\rho}{m} \bar{\chi}_1 = \frac{\rho}{m} \bar{\chi},$$

wenn $\chi_1 = \chi(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1)$ ist.

Wir erhalten so aus dem Ausdruck 3) nach Ausführung der Integration

$$\frac{\rho}{m} L \cdot \mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta \mathfrak{z}^\gamma \cdot \overline{\mathfrak{x}^\delta \mathfrak{y}^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta}.$$

Nach analoger Durchführung der letzten Integrationen in Bezug auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$:

$$\frac{\rho}{m} L \overline{\mathfrak{x}^\delta \mathfrak{y}^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta} \iiint \mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta \mathfrak{z}^\gamma f d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} d\mathfrak{z} = \frac{\rho^2}{m^2} L \overline{\mathfrak{x}^\delta \mathfrak{y}^\varepsilon \mathfrak{z}^\zeta} \cdot \overline{\mathfrak{x}^\alpha \mathfrak{y}^\beta \mathfrak{z}^\gamma}.$$

Beim Einsetzen der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ in den Ausdruck 2) können wir gleich eine Vereinfachung eintreten lassen, indem wir alle Glieder, in denen entweder $\alpha+\beta+\gamma = 1$ oder $\delta+\varepsilon+\zeta = 1$ ist, fortlassen, da sie im Resultate doch wegfallen würden, weil $\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{z}} = \bar{\mathfrak{x}}_1 = \bar{\mathfrak{y}}_1 = \bar{\mathfrak{z}}_1 = 0$ ist.

Führt man nun die $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{z}_1$ ein, so ist

$$\begin{aligned}
3u^2 l = 3[&2A_1(\mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2)- \\
&-(A_1+B_1-C_1)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2-4\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1)- \\
&-(A_1-B_1+C_1)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2-4\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1)+ \\
&+A_2(\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1-\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1^2-\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}^2)- \\
&-(B_2+C_3)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}\mathfrak{y})+ \\
&\qquad\qquad +A_3(\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1^2-\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}^2)
\end{aligned}$$

und daher nach Obigem

$$\left.\begin{aligned}\iint 3\mathfrak{u}^2 \mathrm{I}\, f f_1\, d\omega\, d\omega_1 &= 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\,[2A_1(\overline{\mathfrak{x}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^{\,2})-\\ &-(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^{\,2})-(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^{\,2})+\\ &+A_2(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})-(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})+A_3(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})],\end{aligned}\right\}\quad 4)$$

woraus sich durch cyklische Permutation ergibt

$$\left.\begin{aligned}\iint 3\mathfrak{v}^2 \mathrm{II}\, f f_1\, d\omega\, d\omega_1 &= 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\,[2B_1(\overline{\mathfrak{y}^4}-\overline{\mathfrak{y}^2}^{\,2})-\\ &-(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^{\,2})-(A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}^{\,2})+\\ &+B_2(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})-(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})+B_3(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})]\end{aligned}\right\}\quad 5)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\iint 3\mathfrak{w}^2 \mathrm{III}\, f f_1\, d\omega\, d\omega_1 &= 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\,[2C_1(\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{z}^2}^{\,2})-\\ &-(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^{\,2})-(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}^{\,2})+\\ &+C_2(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})-(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})+C_3(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})].\end{aligned}\right\}\quad 6)$$

Man erhält ferner

$$\begin{aligned}\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathrm{IV} = 3[&A_2(\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1-\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y})+B_3(\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^3\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y})-\\ &-(A_2+B_3)(\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}-2\,\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z})-\\ &-4(A_1+B_1-C_1)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2)-2(C_2+A_3)(\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}\mathfrak{z}+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{z})-\\ &-2(B_2+C_3)(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z})]\end{aligned}$$

und daher

$$\left.\begin{aligned}\iint \mathfrak{u}\mathfrak{v}\,\mathrm{IV}\, f f_1\, d\omega\, d\omega_1 &= 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\,[A_2(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})+B_3(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})-\\ &-(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})-4(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2})-\\ &-2(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-2(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})],\end{aligned}\right\}\quad 7)$$

woraus sich wieder durch cyklische Permutation ergibt

$$\begin{aligned}\iint \mathfrak{w}\mathfrak{w}\,\mathrm{V}\, ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\Big[& B_2(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})+\\ & + C_3(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})-(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})-\\ & -4(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2})-2(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})-\\ & -2(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})\Big]\end{aligned} \tag{8}$$

und

$$\begin{aligned}\iint \mathfrak{w}\mathfrak{u}\,\mathrm{VI}\, ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = 6\,\frac{\rho^2}{m^2}\Big[& C_2(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})+A_3(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-\\ & -(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})-4(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2})-\\ & -2(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})-2(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})\Big];\end{aligned} \tag{9}$$

schliesslich ist

$$\begin{aligned}\iint \mathrm{VII}\, ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\Big[& A_1(\overline{\mathfrak{x}^4}+3\overline{\mathfrak{x}^2}^{\,2})+B_1(\overline{\mathfrak{y}^4}+3\overline{\mathfrak{y}^2}^{\,2})+C_1(\overline{\mathfrak{z}^4}+3\overline{\mathfrak{z}^2}^{\,2})\\ & +A_2(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+3\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})+B_2(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+3\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})+C_2(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+3\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})+\\ & +A_3(\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}+3\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})+B_3(\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}+3\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})+C_3(\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}+3\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})-\\ & -3(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^{\,2})-\\ & -3(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^{\,2})-\\ & -3(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^{\,2})-\\ & -3(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-3(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})-\\ & -3(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})\Big].\end{aligned} \tag{10}$$

Nun war

$$B_5(\mathrm{II}_4) = \frac{1}{2}\iiint_0^\infty\int_0^{2\pi} W ff_1\, g b\, d\omega\, d\omega_1\, db\, d\varepsilon$$

und man erhält aus 2), 4), 5), 6), 7), 8), 9), 10):

$$
\left.\begin{aligned}
B_5(\Pi_4) = \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{m^2}\{[35D_2-28D_1][A_1\overline{\mathfrak{x}^4}+B_1\overline{\mathfrak{y}^4}+C_1\overline{\mathfrak{z}^4}+A_2\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+B_2\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+\\
+C_2\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+A_3\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}+B_3\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}+C_3\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}-3(A_1+B_1-C_1)\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}-\\
-3(-A_1+B_1+C_1)\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}-3(A_1-B_1+C_1)\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-3(B_2+C_3)\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\\
-3(C_2+A_3)\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-3(A_2+B_3)\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}]+[35D_2-4D_1][3A_1\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\\
+3B_1\overline{\mathfrak{y}^2}^2+3C_1\overline{\mathfrak{z}^2}^2+3A_2\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+3B_2\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+3C_2\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+3A_3\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}+\\
+3B_3\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}+3C_3\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}-3(A_1+B_1-C_1)(\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2)-\\
-3(-A_1+B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2)-3(A_1-B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2)-\\
-3(B_2+C_3)(\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})-3(C_2+A_3)(\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})-\\
-3(A_2+B_3)(\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})]\}\,.
\end{aligned}\right\} \quad 11)
$$

2. Berechnung von $B_5[\Pi_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)]$.

Bei der Berechnung dieses Integrals ist im Allgemeinen analog vorzugehen, wie früher; Π_2 sei die allgemeinste Kugelfunction 2. Grades, die bekanntlich fünf willkürliche Constanten enthält. Setzen wir

$$\Pi_2 = A_1\mathfrak{x}^2+B_1\mathfrak{y}^2+C_1\mathfrak{z}^2+A_2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+B_2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+C_2\mathfrak{z}\mathfrak{x},$$

so besteht, damit dieser Ausdruck eine Kugelfunction wird, nur die Relation

$$A_1+B_1+C_1 = 0,$$

womit die Anzahl der Constanten sich auf fünf reducirt. Bezeichnen wir wieder

$$\mathfrak{f}'+\mathfrak{f}_1'-\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_1 = W$$

und führen statt der verschiedenen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Variabeln

$$\mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w},\ \mathfrak{p},\ \mathfrak{q},\ \mathfrak{r},\ \mathfrak{p}',\ \mathfrak{q}',\ \mathfrak{r}'$$

ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
16\,W' = {} & (\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)[12A_1\mathfrak{u}^2+2(A_1+B_1)\mathfrak{v}^2+2(C_1+A_1)\mathfrak{w}^2+ \\
& \qquad +6A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+6C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+2B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}]+ \\
& +(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)[12B_1\mathfrak{v}^2+2(B_1+C_1)\mathfrak{w}^2+2(A_1+B_1)\mathfrak{u}^2+ \\
& \qquad +6B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+6A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+2C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}]+ \\
& +(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)[12C_1\mathfrak{w}^2+2(C_1+A_1)\mathfrak{u}^2+2(B_1+C_1)\mathfrak{v}^2+ \\
& \qquad +6C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+6B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+2A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}]+ \\
& +(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})[8(A_1+B_1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}+2A_2(3\mathfrak{u}^2+3\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)+ \\
& \qquad +4B_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+4C_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}]+ \\
& +(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})[8(B_1+C_1)\mathfrak{v}\mathfrak{w}+2B_2(3\mathfrak{v}^2+3\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2)+ \\
& \qquad +4C_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+4A_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}]+ \\
& +(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p})[8(C_1+A_1)\mathfrak{w}\mathfrak{u}+2C_2(3\mathfrak{w}^2+3\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2)+ \\
& \qquad +4A_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+4B_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}]+ \\
& +2A_1(\mathfrak{p}'^4-\mathfrak{p}^4)+2(A_1+B_1)(\mathfrak{p}'^2\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2)+2A_2(\mathfrak{p}'^3\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}^3\mathfrak{q})+ \\
& \qquad +2A_2(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'^3-\mathfrak{p}\mathfrak{q}^3)+2A_2(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}^2)+ \\
& +2B_1(\mathfrak{q}'^4-\mathfrak{q}^4)+2(B_1+C_1)(\mathfrak{q}'^2\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{q}^2\mathfrak{r}^2)+2B_2(\mathfrak{q}'^3\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}^3\mathfrak{r})+ \\
& \qquad +2B_2(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'^3-\mathfrak{q}\mathfrak{r}^3)+2B_2(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{p}^2)+ \\
& +2C_1(\mathfrak{r}'^4-\mathfrak{r}^4)+2(C_1+A_1)(\mathfrak{r}'^2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{r}^2\mathfrak{p}^2)+2C_2(\mathfrak{r}'^3\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}^3\mathfrak{p})+ \\
& \qquad +2C_2(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'^3-\mathfrak{r}\mathfrak{p}^3)+2C_2(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{r}\mathfrak{p}\mathfrak{q}^2).
\end{aligned}
$$

Berücksichtigt man, dass

$$\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2+\mathfrak{r}'^2 = \mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2,$$

so ergibt sich, indem man aus den ersten drei Gliedern

$$2A_1\mathfrak{u}^2+2B_1\mathfrak{v}^2+2C_1\mathfrak{w}^2+6A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+6B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+6C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}$$

heraushebt und die Glieder, welche in Bezug auf $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ von der 4. Dimension sind, auf solche 2. Dimension reducirt, die einfachere Gleichung

$$
\begin{aligned}
16\,W' = {} & (\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)\,\mathrm{I}+(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)\,\mathrm{II}+(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)\,\mathrm{III}+(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})\,\mathrm{IV}+ \\
& +(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})\,\mathrm{V}+(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p})\,\mathrm{VI},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

wobei I, II, III, IV, V, VI folgende Bedeutung haben:

$$\mathrm{I} = 2A_1(5\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+g^2)-4B_2\mathfrak{v}\mathfrak{w},$$
$$\mathrm{II} = 2B_1(5\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+g^2)-4C_2\mathfrak{w}\mathfrak{u},$$
$$\mathrm{III} = 2C_1(5\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+g^2)-4A_2\mathfrak{u}\mathfrak{v},$$
$$\mathrm{IV} = 2A_2(3\mathfrak{u}^2+3\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+g^2)+8(A_1+B_1)\mathfrak{u}\mathfrak{v}+4B_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}+4C_2\mathfrak{v}\mathfrak{w},$$
$$\mathrm{V} = 2B_2(3\mathfrak{v}^2+3\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+g^2)+8(B_1+C_1)\mathfrak{v}\mathfrak{w}+4C_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}+4A_2\mathfrak{w}\mathfrak{u}.$$
$$\mathrm{VI} = 2C_2(3\mathfrak{w}^2+3\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+g^2)+8(C_1+A_1)\mathfrak{w}\mathfrak{u}+4A_2\mathfrak{v}\mathfrak{w}+4B_2\mathfrak{u}\mathfrak{v}.$$

Um nun in Gleichung 12) die Integration nach ε in der früheren Weise ausführen zu können, müssen die Coëfficienten von I, II und III erst in Kugelfunctionen verwandelt werden. Dies geschieht am einfachsten, wenn wir setzen

$$\mathfrak{p}'^2 = \frac{2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{r}'^2+g^2}{3} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}^2 = \frac{2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2+g^2}{3}$$

und analoge Ausdrücke für $\mathfrak{q}'^2$, $\mathfrak{q}^2$ und $\mathfrak{r}'^2$, $\mathfrak{r}^2$. Nach Anwendung des Maxwell'schen Satzes für Kugelfunctionen, erhalten wir als erstes Integrationsresultat:

$$\int_0^{2\pi} 16\,W d\varepsilon = -4\pi \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta \,[(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2)\mathrm{I}+$$
$$+(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)\mathrm{II}+(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)\mathrm{III}+3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\mathrm{IV}+3\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,\mathrm{V}+3\mathfrak{r}\mathfrak{p}\,\mathrm{VI}].$$

Setzen wir wieder

$$\pi\int_0^{\infty} \sin^2\vartheta \cos^2\vartheta g b\, db = D_1,$$

so ist

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} 2\,W g b\, db\, d\varepsilon = -\frac{D_1}{2}\,[(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2)\mathrm{I}+$$
$$+(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)\mathrm{II}+(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)\mathrm{III}+3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\mathrm{IV}+3\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,\mathrm{V}+3\mathfrak{r}\mathfrak{p}\,\mathrm{VI}].$$

Um nun die beiden letzten Integrationen noch auszuführen setzen wir wieder die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ ein. Es ist zunächst

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} 2\,W g b\, db\, d\varepsilon = -D_1\Big[3\mathfrak{p}^2\frac{\mathrm{I}}{2}+3\mathfrak{q}^2\frac{\mathrm{II}}{2}+3\mathfrak{r}^2\frac{\mathrm{III}}{2}-$$
$$-g^2\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{2}+3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\frac{\mathrm{IV}}{2}+3\mathfrak{q}\mathfrak{r}\frac{\mathrm{V}}{2}+3\mathfrak{r}\mathfrak{p}\frac{\mathrm{VI}}{2}\Big]. \qquad 13)$$

Es ergibt sich

$$3\mathfrak{p}^2 \frac{\mathrm{I}}{2} = A_1(18\mathfrak{x}^4 + 18\mathfrak{x}_1^4 - 12\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2 + 6\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 + 6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2 + 6\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2 + \\ + 6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2 + 6\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2 + 6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2 + 6\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2 + 6\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2) - \\ - 6B_2(\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z} + \mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z} - 2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 - 2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1),$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} &\iint 3\mathfrak{p}^2 \frac{\mathrm{I}}{2} ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = \\ &= \frac{2\rho^2}{m^2}[6A_1(3\overline{\mathfrak{x}^4} - \overline{\mathfrak{x}^2}^2 + \overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2} + \overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2} + \overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2} + \overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}) - \\ &\qquad - 6B_2(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}} + \overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} - 2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}})] \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

und durch cyklische Permutation ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\iint 3\mathfrak{q}^2 \frac{\mathrm{II}}{2} ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = \\ &= \frac{2\rho^2}{m^2}[6B_1(3\overline{\mathfrak{y}^4} - \overline{\mathfrak{y}^2}^2 + \overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2} + \overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2} + \overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2} + \overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}) - \\ &\qquad - 6C_2(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}} + \overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}} - 2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})]. \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

$$\left.\begin{aligned} &\iint 3\mathfrak{r}^2 \frac{\mathrm{III}}{2} ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = \\ &= \frac{2\rho^2}{m^2}[6C_1(3\overline{\mathfrak{z}^4} - \overline{\mathfrak{z}^2}^2 + \overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2} + \overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2} + \overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2} + \overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}) - \\ &\qquad - 6A_2(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}} + \overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} - 2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})]. \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Ferner ist unter Berücksichtigung, dass $A_1 + B_1 + C_1 = 0$

$$-\mathfrak{g}^2 \frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{2} = -4A_1|\mathfrak{x}^4 + \mathfrak{x}_1^4 - 2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2 + \\ + \mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2 - 4\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2 - 4\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1| - \\ - 4B_1|\mathfrak{y}^4 + \mathfrak{y}_1^4 - 2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}^2 - 4\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1 + \\ + \mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}^2 - 4\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1| - \\ - 4C_1|\mathfrak{z}^4 + \mathfrak{z}_1^4 - 2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}^2 - 4\mathfrak{z}\mathfrak{x}\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1 + \\ + \mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{z}^2\mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}^2 - 4\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1 +$$

$$+2B_2\,|\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}+\mathfrak{y}_1^3\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^3\mathfrak{y}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+$$
$$+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}\mathfrak{y}-$$
$$-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\,|+$$

$$+2C_2\,|\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}+\mathfrak{z}_1^3\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{z}_1+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+$$
$$+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{y}\mathfrak{x}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-2\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}\mathfrak{z}-$$
$$-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\,|+$$

$$+2A_2\,|\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^3\mathfrak{x}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+$$
$$+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{z}\mathfrak{y}\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}_1-$$
$$-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1-2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,|$$

und nach der Integration

$$-\iint g^2\,\frac{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1=$$
$$=\frac{2\rho^2}{m^2}\Big[-4A_1\big(\overline{\mathfrak{x}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2\big)-$$
$$-4B_1\big(\overline{\mathfrak{y}^4}-\overline{\mathfrak{y}^2}^2+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}^2\big)-$$
$$-4C_1\big(\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{z}^2}^2+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}^2}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}^2\big)+$$
$$+2B_2\big(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}\big)+$$
$$+2C_2\big(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}\big)+$$
$$+2A_2\big(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\big)\Big]. \qquad 17)$$

Schliesslich ist

$$3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\frac{\mathrm{IV}}{2}=6A_2\,|2\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}+2\mathfrak{x}_1^3\mathfrak{y}_1+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}^3+2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1^3+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+\mathfrak{z}_1^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\,|+$$
$$+12(A_1+B_1)\,|\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2\,|+$$
$$+6B_2\,|\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1-\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\,|+6C_2\,|\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}+\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1\mathfrak{x}_1-\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\,|$$

und daher

$$\iint 3\mathfrak{p}\mathfrak{q}\,\frac{\mathrm{IV}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1=\frac{2\rho^2}{m^2}\big[6A_2\big(2\overline{\mathfrak{x}^3\mathfrak{y}}+2\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}^3}+\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\big)+ \qquad 18)$$
$$+(12A_1+B_1)\big(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}\big)+6B_2\big(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\big)+6C_2\big(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{x}\mathfrak{z}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}\big)\big].$$

Analog ergibt sich durch cyklische Permutation

$$\iint 3\,\mathfrak{q}\mathfrak{r}\,\frac{\mathrm{V}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\,[\,6B_2(2\,\overline{\mathfrak{y}^3\mathfrak{z}}+2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}^3}+\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}})+ \tag{19}$$

$$+12(B_1+C_1)(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2})+6\,C_2(\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})+6\,A_2(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{y}\mathfrak{x}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}})].$$

$$\iint 3\,\mathfrak{r}\mathfrak{p}\,\frac{\mathrm{VI}}{2}\,ff_1\,d\omega\,d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\,[6\,C_2(2\,\overline{\mathfrak{z}^3\mathfrak{x}}+2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}^3}+\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}})+ \tag{20}$$

$$+12(C_1+A_1)(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2})+6\,A_2(\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}})+6\,B_2(\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}\mathfrak{y}}-\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}})\,].$$

Setzt man nun die Ausdrücke 14) bis 20) in die Gleichung 13) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&B_5[\Pi_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)] = \frac{1}{2}\iiint_0^\infty\int_0^{2\pi} W'ff_1\,g b\,d\omega\,d\omega_1\,db\,d\varepsilon = \\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{m^2}\,D_1[14(\overline{A_1\mathfrak{x}^2+B_1\mathfrak{y}^2+C_1\mathfrak{z}^2+A_2\mathfrak{x}\mathfrak{y}+B_2\mathfrak{y}\mathfrak{z}+C_2\mathfrak{z}\mathfrak{x})(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)}\,- \\
&-2\,A_1\,\overline{\mathfrak{x}^2}^2-10(A_1+B_1)\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}-2\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-10A_2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+ \\
&\qquad\qquad+8\,A_2\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}+8(A_1+B_1)\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2- \\
&-2\,B_1\,\overline{\mathfrak{y}^2}^2-10(B_1+C_1)\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}-2\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-10B_2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}\,\overline{\mathfrak{x}^2}+ \\
&\qquad\qquad+8\,B_2\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}+8\,(B_1+C_1)\,\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2- \\
&-2\,C_1\,\overline{\mathfrak{z}^2}^2-10(C_1+A_1)\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-2\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}-2\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{x}^2}-10\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+ \\
&\qquad\qquad+8\,C_2\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{y}}\,\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}+8(C_1+A_1)\,\overline{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}^2\,],
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

wobei zu beachten ist, dass $A_1+B_1+C_1=0$ sein muss.

3. Berechnung von $B_5[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2]$.

Führen wir hier, sowie früher, die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ein, so ist:

$$\begin{aligned}
16\,W' = {} & 4(\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)(3\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)+16\,\mathfrak{u}\mathfrak{v}(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})+ \\
& +4(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)(3\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2)+16\,\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})+ \\
& +4(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)(3\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2)+16\,\mathfrak{w}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p})+ \\
& +2(\mathfrak{p}'^4-\mathfrak{p}^4)+2(\mathfrak{q}'^4-\mathfrak{q}^4)+2(\mathfrak{r}'^4-\mathfrak{r}^4)+4(\mathfrak{p}'^2\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}^2)+ \\
& +4(\mathfrak{q}'^2\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{q}^2\mathfrak{r}^2)+4(\mathfrak{r}'^2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2).\mathfrak{r}^2
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\mathfrak{p}'^2+\mathfrak{q}'^2+\mathfrak{r}'^2=\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2$ vereinfacht sich dieser Ausdruck wesentlich und nimmt die Form an:

$$2W=\mathfrak{u}^2(\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{p}^2)+\mathfrak{v}^2(\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{q}^2)+\mathfrak{w}^2(\mathfrak{r}'^2-\mathfrak{r}^2)+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}(\mathfrak{p}'\mathfrak{q}'-\mathfrak{p}\mathfrak{q})+$$
$$+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{q}'\mathfrak{r}'-\mathfrak{q}\mathfrak{r})+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}(\mathfrak{r}'\mathfrak{p}'-\mathfrak{r}\mathfrak{p}).$$

Da die Coëfficienten von $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{w}^2$ keine Kugelfunctionen sind, so setzen wir wieder

$$\mathfrak{p}'^2=\frac{2\mathfrak{p}'^2-\mathfrak{q}'^2-\mathfrak{r}'^2+g^2}{3},\qquad \mathfrak{p}^2=\frac{2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2+g^2}{3}$$

und analog $\mathfrak{q}^2$, $\mathfrak{r}^2$; wird dann die Integration nach ε durchgeführt, so ist:

$$\int_0^{2\pi}2\,W d\varepsilon=-12\pi\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\Big[\frac{\mathfrak{u}^2}{3}(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2)+$$
$$+\frac{\mathfrak{v}^2}{3}(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)+\frac{\mathfrak{w}^2}{3}(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)+2\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+2\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+2\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathfrak{r}\mathfrak{p}\Big].$$

Setzen wir dann

$$D_1=\pi\int_0^\infty\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\,g b\,db,$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}2\,Wgb\,db\,d\varepsilon&=-4\,D_1[\mathfrak{u}^2(2\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2+\mathfrak{r}^2)+\\&+\mathfrak{v}^2(2\mathfrak{q}^2-\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2)+\mathfrak{w}^2(2\mathfrak{r}^2-\mathfrak{p}^2-\mathfrak{q}^2)+6\mathfrak{u}\mathfrak{v}\mathfrak{p}\mathfrak{q}+\\&+6\mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{q}\mathfrak{r}+6\mathfrak{w}\mathfrak{u}\mathfrak{r}\mathfrak{p}]=-D_1[12(\mathfrak{u}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}\mathfrak{q}+\mathfrak{w}\mathfrak{r})^2-\\&-4g^2(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)].\end{aligned}\right\}\quad 22)$$

Führen wir dann wieder $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ ein, so wird

$$(\mathfrak{u}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}\mathfrak{q}+\mathfrak{w}\mathfrak{r})^2=\mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4+\mathfrak{y}^4+\mathfrak{y}_1^4+\mathfrak{z}^4+\mathfrak{z}_1^4-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2+2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2+$$
$$+2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2-2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2-$$
$$-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1^2+2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1^2-2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1^2-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1^2$$

und

$$\iint (\mathfrak{u}\mathfrak{p}+\mathfrak{v}\mathfrak{q}+\mathfrak{w}\mathfrak{r}) ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m^2}\big(\overline{\mathfrak{x}^4}+\overline{\mathfrak{y}^4}+\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2-\overline{\mathfrak{y}^2}^2- \\ -\overline{\mathfrak{z}^2}^2+2\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+2\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{z}^2\mathfrak{x}^2}-2\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-2\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-2\overline{\mathfrak{z}^2}\,\overline{\mathfrak{x}^2}\big). \tag{23}$$

Ebenso ist

$$g^2(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2) = \mathfrak{x}^4+\mathfrak{x}_1^4+\mathfrak{y}^4+\mathfrak{y}_1^4+\mathfrak{z}^4+\mathfrak{z}_1^4-2\mathfrak{x}^2\mathfrak{x}_1^2-2\mathfrak{y}^2\mathfrak{y}_1^2-2\mathfrak{z}^2\mathfrak{z}_1^2+ \\ +2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2+2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}_1^2+2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{y}^2+2\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}_1^2-8\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1+ \\ +2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}_1^2+2\mathfrak{x}_1^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}_1^2-8\mathfrak{x}\mathfrak{z}\mathfrak{x}_1\mathfrak{z}_1+ \\ +2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}_1^2+2\mathfrak{y}_1^2\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}_1^2-8\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1$$

und daher

$$\iint g^2(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2) ff_1\, d\omega\, d\omega_1 = \frac{2\rho^2}{m}\big[\overline{\mathfrak{x}^4}+\overline{\mathfrak{y}^4}+\overline{\mathfrak{z}^4}-\overline{\mathfrak{x}^2}^2-\overline{\mathfrak{y}^2}^2- \\ -\overline{\mathfrak{z}^2}^2+2\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}+2\overline{\mathfrak{x}^2\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{y}^2\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}+ \\ +2\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}+2\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-4\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2-4\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2-4\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2\big]. \tag{24}$$

So erhalten wir schliesslich aus 23) und 24)

$$B_5[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2] = -\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{m^2}\,8\,.\,D_1\big\{\overline{(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2}- \\ -\big(\overline{\mathfrak{x}^2}^2+\overline{\mathfrak{y}^2}^2+\overline{\mathfrak{z}^2}^2+2\,(2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{y}^2}-\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}^2)+ \\ +2\,(2\,\overline{\mathfrak{x}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}^2)+2\,(2\,\overline{\mathfrak{y}^2}\,\overline{\mathfrak{z}^2}-\overline{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}^2)\big)\big\}\,. \tag{25}$$

Es wären somit die Ausdrücke $B_5(\mathrm{II}_4)$, $B_5[\mathrm{II}_2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)]$ und $B_5[(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)^2]$ berechnet und damit die Aufgabe gelöst, $B_5(G_4)$, wenn G_4 eine ganze homogene Function 4. Grades ist, zu bestimmen.

Es dürfte nicht allzu schwierig sein, die Gesetzmässigkeit der Coëfficienten in den Ausdrücken 11), 21) und 25) aufzufinden; da diese ganzen Rechnungen jedoch nur Mittel zum Zwecke sind, habe ich mich dieser Mühe nicht unterzogen, die sich wohl nur lohnen dürfte, wenn man sich dadurch bei Berechnung des B_5 von Functionen höherer Ordnung Vereinfachungen schaffen kann.

Dagegen erscheint es interessant, dass die hier gewonnenen Resultate im Widerspruche stehen mit einer Anmerkung Maxwell's in seiner Abhandlung »On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature«. Er sagt dort: »I have recently applied the method of spherical harmonics, as described in the notes to sections (1) and (5), to carrying the approximations two orders higher. I expected that this would have involved the calculation of two new quantities, namely, the rates of decay of spherical harmonics of the fourth and sixth orders, but I found that, to the order of approximation required, all harmonics of the fourth and sixth orders may be neglected, so that the rate of decay of harmonics of the second order, the time-modulus of which is $\frac{\mu}{p}$, determines the rate of decay of all functions of less than 6 dimensions«.

Aus unseren Rechnungen dagegen ergibt sich, dass für Functionen 4. Ordnung eine bestimmte Relexationszeit[1] (time-modulus of relaxation) gar nicht existirt, da in den für B_5 erhaltenen Ausdrücken ausser dem Mittelwerth der betreffenden Function noch andere Glieder vorkommen.

Es ist wahrscheinlich, dass Maxwell diese Rechnungen nicht in extenso durchgeführt hat und seinen obigen Ausspruch nur auf einen vorläufigen Überschlag gründete.

---

[1] Über die Bedeutung und Berechnung siehe Boltzmann, l. c. S. 165.

Über Rückstandsbildung und Oscillationen bei verschiedenen Condensatoren

von

Theodor Wulf S. J.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Innsbruck.

(Mit 2 Tafeln und 2 Textfiguren.)

Bei der grossen Bedeutung, welche die Vorgänge im Dielektricum der Condensatoren für Theorie und Praxis haben, dürften einige Untersuchungen, die darüber im Laufe dieses Jahres angestellt wurden, nicht ohne Interesse sein.

Dieselben beziehen sich zunächst auf die Erscheinung des Rückstandes, seine Ausbildung und seine Entladung, sodann auf die genauere Gestalt der Wellen bei oscillatorischen Condensatorentladungen, endlich auf den Energieverlust im Dielektricum, den man bei solchen Schwingungen wahrgenommen hat.

Die Anregung zu diesen Arbeiten verdanke ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. I. Klemenčič, der mir nicht nur seinen ausgezeichneten Hiecke'schen Fallapparat zur Verfügung stellte, sondern mich auch bei der Ausführung dieser Untersuchungen durch Rath und That bereitwilligst unterstützte, wofür ich ihm zu grösstem Danke verpflichtet bin.

I. Die Versuchsobjecte.

Es wurden im Ganzen vier Condensatoren untersucht, zwei, welche die Erscheinung des Rückstandes zeigen, und zwei, die rückstandsfrei sein sollten.

1. Ein Condensator aus Paraffinpapier von Keyser & Schmidt in Berlin. Er hatte nach Angabe der Fabrik

5 Mikrofarad, die einzeln gebraucht werden konnten. Der Isolationswiderstand wurde bestimmt aus der Elektricitätsmenge, welche zwischen den Belegen überging bei einer constanten Potentialdifferenz. Derselbe nahm mit erhöhtem Ladungspotential bedeutend ab und war dann dauernd verringert. Mit 1 Clark'schen Normalelement = 1·435 Volt geprüft, war der Widerstand $14 \cdot 10^6$ Ω, mit 12 Normalelementen = 17·2 Volt nur mehr $8 \cdot 10^6$ Ω. Darauf wurden mit dem Condensator Schwingungsbeobachtungen vorgenommen, wobei er einer Spannung bis zu 150 Volt ausgesetzt wurde. Hernach zeigte er, mit denselben 12 Normalelementen geladen, nur mehr $4 \cdot 10^6$ Ω.[1] Die Rückstandsbildung war so stark, dass die gewöhnliche Prüfung auf Isolation durch Bestimmung des Ladungsverlustes während einer längeren Zeit hier nicht stattfinden konnte, da fast die ganze Ladung in Rückstand überging und nur sehr langsam wieder zum Vorschein kam. In der Folge soll dieser Condensator kurz mit Paraffin Pap. Cond. II bezeichnet werden.

2. Erstaunt über die schlechten Eigenschaften dieses Condensators wünschte ich zu wissen, ob es denn nicht möglich sei, bessere Condensatoren aus Paraffinpapier herzustellen. Es wurde klares, weisses Paraffin in einer flachen Wanne flüssig gemacht und dann gewöhnliches reines Schreibpapier durch die flüssige Masse gezogen. Nach einiger Übung erhielt man auf beiden Seiten eine sehr gleichmässige glatte Paraffinschicht. Aus etwa 120 solcher Bogen von gewöhnlichem Folioformat und Stanniolblättern wurde ein Condensator aufgebaut, der sich dann dem ersteren weitaus überlegen zeigte. Die Capacität betrug anfangs 1·02 Mikrofarad bei circa 1 Secunde Ladungsdauer, nahm jedoch im Laufe des Jahres, wie die Massen noch zusammenrückten, bis 1·24 MF. zu. Rückstandsbildung war natürlich vorhanden, betrug jedoch nur $^1/_4$ derjenigen des anderen Condensators. Das Isolationsvermögen war ebenfalls ein ausgezeichnetes. Anfangs wurde gemessen

---

[1] Es ist also bei derartigen Arbeiten mit Condensatoren durchaus unzulässig, den Isolationswiderstand vielleicht mit einigen Elementen zu bestimmen und dann bei 1000 und mehr Volt als richtig anzusehen. In dieser Arbeit wurde immer die Vorsicht gebraucht, dass der Widerstand bei einer Spannung bestimmt wurde, die über derjenigen der Maxima bei den Oscillationen lag.

bei 10 Volt.....5000·10⁶ Ω,
» 60 » .....4500·10⁶ Ω.

Schon bei diesem Condensator, ganz besonders aber bei den zwei folgenden, zeigte sich eine ungemein grosse Empfindlichkeit für die Feuchtigkeit der Luft, wodurch dann die Rückstandsbildung scheinbar[1] vermehrt und die Isolation verringert wurde. So hatte dieser Condensator nach einigen Wochen nur mehr $1600 \cdot 10^6\ \Omega$ Widerstand, gemessen bei 17·2 Volt. Es wurden deshalb alle Condensatoren in einem möglichst luftdicht schliessenden Kasten, in welchem sich flache Schalen mit H_2SO_4 conc. befanden, aufbewahrt und nur auf kurze Zeit zum Gebrauche hervorgeholt. In diesem Kasten nahm das Isolationsvermögen, bei denselben 17·2 Volt gemessen, in vier Wochen wieder bis $2100 \cdot 10^6\ \Omega$ zu. In Zukunft wird dieser Condensator einfach mit Paraff. Pap. Cond. I bezeichnet werden.

3. Ein Glimmercondensator. Derselbe war ganz neu von Edelmann in München geliefert, hatte eine Capacität von $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0002$ MF. Die Bestimmung wurde mit dem ballistischen Galvanometer vorgenommen nach der Formel

$$C = \alpha \frac{G T_0}{\pi W} e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\pi}{\lambda}}.$$

Die Capacität erwies sich anfangs als ziemlich unabhängig von der Ladungsdauer; als der Condensator jedoch während eines anhaltenden feuchten Wetters ohne besonderen Schutz gelassen war, zeigte er Rückstandsbildung, und die Capacität nahm mit der Ladungsdauer zu. Er wurde jetzt vier Wochen im Trockenraum abgeschlossen und zeigte sich darauf fast rückstandsfrei. Das Isolationsvermögen betrug nach verschiedenen Messungen stets über $10.000 \cdot 10^6\ \Omega$. Er wurde dann auch als Normalcondensator benützt zur Bestimmung der Capacität der übrigen.

---

[1] Die scheinbare Vermehrung der Rückstandsbildung dürfte vielleicht auf eine elektrolytische Polarisation der feuchten Schichten durch den Ladestrom zurückzuführen sein, worüber erst eine weitere Untersuchung Aufschluss geben könnte.

4. Ein Condensator aus reinem Paraffin. Die Beschaffung dieses Condensators hatte grosse Schwierigkeit, da die Beobachtung mit dem Hiecke'schen Fallapparat wenigstens etwa 0·3 Mikrofarad Capacität erfordert. So grosse Paraffincondensatoren sind im Handel nicht zu haben und bisher wohl überhaupt noch nicht hergestellt worden. Der Grund liegt offenbar in der ausserordentlichen Schwierigkeit, welche es hat, eine so grosse Anzahl hinreichend dünner Blätter dieses sehr brüchigen Materials herzustellen.

Es wurde nun zuerst versucht, die Stanniolblätter selbst in heisses Paraffin zu tauchen. Allein bei dem grossen Wärmeleitungsvermögen des Metalls blieb fast nichts haften. Dazu kam noch, dass die Ausdehnungscoëfficienten von Stanniol und Paraffin sehr ungleich sind, weshalb die Blätter über und über mit Runzeln und Falten sich bedeckten. Endlich zeigte es sich als das beste, heisses Paraffin mit einem Pinsel auf die Stanniolblätter aufzutragen, während dieselben auf einem möglichst kalten Stein glatt auflagen, und dann bis zum völligen Auskühlen durch sanftes Pressen am Werfen zu verhindern. Alsdann wurde Blatt für Blatt auf seine Isolation geprüft und so allmälig der Condensator aufgebaut. Das Ganze wurde dann in einer Copirpresse stark gepresst, um die Luft zu entfernen. Da aber gleichwohl noch kleine Runzeln und Unebenheiten vorhanden waren, so bestand also das Dielektricum dieses Condensators aus reinem Paraffin und Luft. Die Capacität wurde drei Wochen nach der Anfertigung zu 0·465 Mikrofarad gemessen, stieg aber allmälig bis zu 0·473 MF. Das Isolationsvermögen war anfangs $4000 \cdot 10^6\ \Omega$, sowohl mit 1, als auch mit 12 Cl. N. El. gemessen. Der Condensator war einstweilen noch nicht geschützt, weshalb sich die Feuchtigkeitsverhältnisse in ganz auffallender Weise bemerkbar machten. So zeigte er einmal nur $800 \cdot 10^6\ \Omega$ und dann wieder $1400 \cdot 10^6\ \Omega$.

II. Die Apparate.

Was zunächst den Fallapparat betrifft, so muss auf die Abhandlung des Erfinders selbst verwiesen werden.[1] Das

---

[1] R. Hiecke, dies. Sitzungsber., 96. Bd., II. Abth., 1887, S. 134.

Wesen des Apparates liegt darin, dass ein an einem gespannten Messingdraht AA (Fig. 1) hinabgleitendes Gewicht zwei Contacthebelchen a_1, a_2 in sehr kleinen, aber doch genau messbaren Zeitintervallen nacheinander öffnet. Von den Hebelchen ist das eine a_1 mittelst einer Mikrometerschraube in verticaler Richtung verschiebbar, wodurch man das Zeitintervall beliebig variiren kann. Die Zeit, welche das Gewicht braucht, um den Weg eines Schraubenganges zurückzulegen, ist

$$T = 0\cdot 000166 \text{ Secunden.}$$

An der Schraubenspindel ist eine Trommel mit 100 Theilstrichen angebracht, so dass also ein Trommeltheilstrich mit $1\cdot 66\cdot 10^{-6}$ Secunden äquivalent ist. Diese Zeit wurde bestimmt durch die Entladung eines Condensators von bekannter Capacität C durch einen grossen Widerstand R nach der Formel

$$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}},$$

folglich

$$t = CR(lQ_0 - lQ).$$

Das Galvanometer war ein Wiedemann'sches Schlittengalvanometer. Die Rollen hatten zusammen 20.000 Windungen aus feinem Cu-Draht mit einem Gesammtwiderstande von 31.870 Ω. Die Dauer der einfachen Schwingung war immer gegen $7\cdot 5$ Secunden. Ein Condensator von 1 MF. zu 1 Volt geladen gab einen Ausschlag von 77 Scalentheilen, so dass also ein Ausschlag von 1 Scalentheil eine Elektricitätsmenge von $13\cdot 10^{-18}$ Coulomb anzeigt. Wo in Zukunft nichts Anderes bemerkt ist, wird diese Empfindlichkeit vorausgesetzt.

Zur Ladung wurden Accumulatoren von $2\cdot 1$ Volt verwendet, die sich bei häufig wiederholten Vergleichen mit einer Batterie von Clark'schen Normalelementen als sehr constant erwiesen.

Die Rollen. Damit bei der Entladung der Condensatoren Oscillationen von hinreichend grosser Schwingungsdauer entstehen, werden Rollen mit grosser Selbstinduction in den Entladungsweg eingeschaltet. Diese Rollen müssen vor Allem einen möglichst kleinen Widerstand haben, damit der

Energieverbrauch in den Drähten möglichst gering sei. Es wurden hauptsächlich drei Rollen gebraucht (mit L, M und R bezeichnet), die alle drei eigens für diese Versuche angefertigt wurden. Da Metallkerne einen Energieverlust durch Foucault'sche Ströme erzeugt haben würden, so wurden sie auf Holzhülsen gewickelt, die vorher in Paraffin gut ausgekocht waren. Zwei Drahtwindungen verliefen bifilar, die vier Enden führten zu je einer Klemmschraube. Diese Methode der Wickelung gewährte den Vortheil, dass die Rollen »Auf Selbstinduction« und »Inductionslos« und dabei die beiden Windungen in Serie oder parallel geschaltet werden konnten; was jedoch das Wichtigste war, sie erlaubte die zwei Hälften vollständig von einander zu trennen und auf ihre gegenseitige Isolation zu prüfen; hatte jedoch den Nachtheil, dass bei den Oscillationen Windungen mit grosser Potentialdifferenz unmittelbar neben einander lagen und so die Rolle eine verhältnissmässig grosse Capacität besass.

Die Constanten der Rollen waren folgende:

Rolle L aus Cu-Draht, doppelt mit Seide übersponnen und in Paraffin getränkt.

Widerstand 10·9 Ω. Coëfficient der Selbstinduction 244·5 Klm. (Mittel aus zwei Bestimmungen mit der Wheatstone'schen Brücke). Die Isolation war, mit 1 N. El. gemessen, $57 \cdot 10^6$ Ω, bei 60 Volt 10^6 Ω.

Rolle M aus doppelt mit Wolle übersponnenem Cu-Draht. Widerstand Ω = 10·4. Isolation der Windungen bei 1 N. El. $12 \cdot 10^6$ Ω., bei 10 Volt $8 \cdot 10^6$ Ω.

Da es schien, dass beide Rollen mit der Zeit schon eine ziemliche Menge Feuchtigkeit angezogen hatten und nicht mehr hinreichend isolirten (es war R gegen 600·000 Ω) auch eine grössere Rückstandsladung hatten, so wurde für die letzten Beobachtungen noch eine dritte Rolle gewickelt.

Rolle R. Der doppelt mit Wolle umsponnene Cu-Draht wurde durch heisses Paraffin gezogen und dann gleich aufgewickelt, so dass alle Fugen sich mit Paraffin ausfüllten. Der Isolationswiderstand betrug, bei 12 N. El. gemessen, $14 \cdot 10^6$ Ω, der Widerstand des Drahtes 8·14 Ω.

III. Die Rückstandsbildung.

Die Ausbildung und Entladung des Rückstandes sind zwar oft Gegenstand physikalischer Untersuchungen gewesen, doch erlaubten die bisherigen Methoden nicht, die Rückstandsbildung namentlich in den ersten, sehr kleinen Zeiten nach der Ladung zu verfolgen, wo die Eigenart der Ladungscurve gerade am

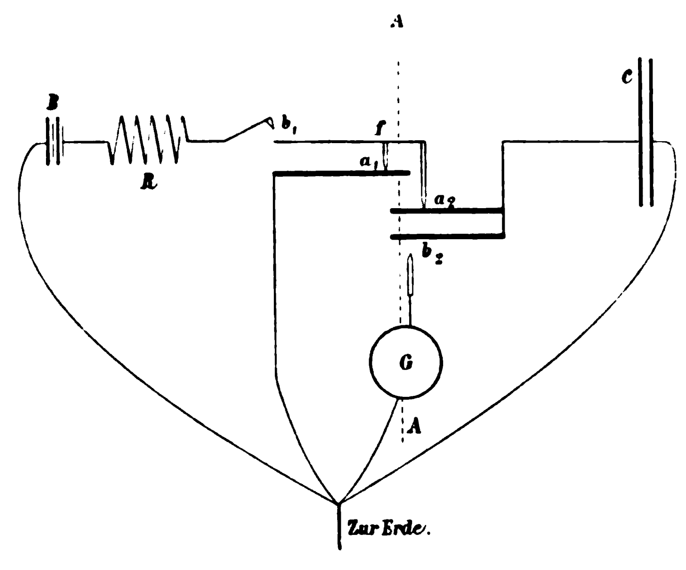


Fig. 1.

deutlichsten hervortritt. Fig. 1 zeigt die Schaltung des Fallapparates für die Beobachtung der Ausbildung des Rückstandes. a_1 und a_2 sind die beiden Öffnungscontacte. B ist die ladende Batterie, C der Condensator, G das Galvanometer, b_1 und b_2 sind zwei Hilfsvorrichtungen, die erste, um den Strom zu schliessen, die zweite, um den Condensator durch das Galvanometer zu entladen.

Zu Beginn der Ladung sind a_1 und a_2 geschlossen, b_1 und b_2 offen.

Durch einen Hilfsstrom wird der Eisenfaden, an welchem das Fallgewicht hängt, abgebrannt und zugleich der Strom bei b_1 geschlossen, der jetzt durch fa_1 zur Erde abfliesst.

Bei f zweigt sich durch den Contact a_2 eine Leitung zum Condensator ab. Es muss deshalb ein Widerstand R vorgeschaltet werden, damit das Potential bei f schon sehr klein ist. Gewöhnlich wurde $R = 10\ \Omega$ genommen, was sich als völlig ausreichend erwies.

Durch das Fallgewicht wird nun bei a_1 unterbrochen und der ganze Strom durch fa_2 in den Condensator geleitet. Gleich darauf aber wird auch a_2 geöffnet, wodurch der Condensator von der Batterie wieder getrennt wird. Die Ladung bleibt jetzt im Condensator, bis das Gewicht den Contact b_2 herabdrückt und die Condensatorladung durch das ballistische Galvanometer zur Erde abfliessen lässt.

Durch Verschieben des Contactes a_1 kann die Zeit zwischen dem Öffnen von a_1 und a_2 von Null an allmälig vergrössert werden. So lange aber auf eine zu kurze Zeit eingestellt war, so dass durch a_2 im Augenblick des Öffnens noch ein bedeutender Strom floss, sprangen Funken über, und die erhaltenen Ausschläge gingen ganz regellos durcheinander, wenn aber die Ladung nahezu vollendet war, so wurden die Ausschläge sehr constant.

In ähnlicher Weise wurde sodann die Entladung untersucht. Der Condensator wurde eine bestimmte Zeit geladen, dann wurde die Entladung durch einen inductionslosen Widerstand eingeleitet, aber nach einer sehr kurzen, gemessenen Zeit wieder unterbrochen. Der Ladungsrest gibt dann, im Galvanometer gemessen, ein genaues Bild der vorhergehenden Entladung.

Die Schaltung des Apparates ist in Fig. 2 skizzirt.

Sobald der Contact b_1 durch den Hilfsstrom geschlossen wird, fliesst der Strom durch $a_1 f$ und den inductionslosen Widerstand R zur Erde ab; zugleich ladet sich der Condensator durch den Contact a_2 zu dem bei f herrschenden Potential. Wenn $R = 10\ \Omega$ genommen wurde, so war dasselbe von der Klemmspannung der Batterie schon nicht mehr merklich verschieden.

Wird jetzt a_1 geöffnet und dadurch die Batterie isolirt, so beginnt der Condensator sich durch $a_2 fR$ zu entladen, bis dass eine kurze, gemessene Zeit darauf durch Öffnen von a_2

der Rest der Ladung im Condensator isolirt wird. Derselbe wird dann, nachdem b_2 geschlossen ist, im Galvanometer gemessen. Die Zeit, welche zwischen dem Öffnen von a_2 und dem Schliessen von b_2 lag, war constant $= 0 \cdot 01$ Secunden.

Auch hier traten Funken auf, wenn beim Öffnen von a_2 noch ein starker Strom aus dem Condensator kam, und erst, wenn die Entladung an Intensität nachliess, erfolgte eine regelmässige Ablenkung des Galvanometers.

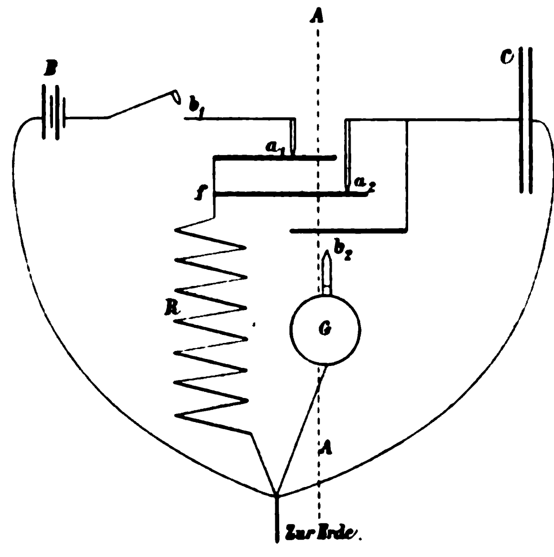


Fig. 2.

Bei den stark Rückstand bildenden Condensatoren hatten diese Beobachtungen besondere Schwierigkeiten. Wenn nämlich die Ladungsdauer allmälig grösser genommen wurde, so wuchs auch die Dauer der Entladung an und war gegenüber der Schwingungsdauer des Galvanometers durchaus nicht mehr klein zu nennen, übertraf dieselbe im Gegentheil zuletzt um ein beträchtliches. Es musste deshalb in die Galvanometerleitung noch eine eigene Vorrichtung zum leichten Unterbrechen und Schliessen des Stromes eingefügt werden. Sobald dann nach Herstellung des Contactes b_2 das Galvanometer sich zu bewegen angefangen, wurde die weitere Entladung unterbrochen, bis das Galvanometer (nach etwa 30 Secunden) sich wieder beruhigt

hatte. Darauf wurde abermals auf kurze Zeit entladen und so fortgefahren, bis die Ausschläge sehr klein wurden. Die Summe der so erhaltenen Ausschläge ist dann das Mass für die Ladung. Eine Vernachlässigung dieses Umstandes hätte bei längerer Ladungsdauer einen Fehler bis zu 50% bewirkt. Meist wurden bei jeder Einstellung des Apparates zwei Beobachtungen gemacht mit gewechselten Batteriepolen. Für die ersten sehr kurzen Zeiten jedoch wurden die Beobachtungen noch mehr gehäuft.

Resultate der Rückstandsbeobachtungen.

Paraffinpapier Condensator I.

Die Ladungsbatterie war 1 Accumulator zu 2·1 Volt, $R = 10\,\Omega$. 1 MF. mit diesem Element geladen, gab einen Ausschlag von 157 Scalentheilen.

t bedeutet die Dauer der Ladung in Secunden,

α die während *t* Secunden aufgenommene Ladung in Scalentheilen.

Tabelle I.

t	α	t	α
0·00005	155	0·003	161·7
0·00008	156	0·5 [1]	185·0
0·00015	156·3	1·0	189·0
0·00040	158	10·0	194·0
0·00060	159·2	15·0	194·7
0·00130	160·0	30·0	195·0

Die Entladung durch denselben Widerstand $R = 10\,\Omega$. Die Ladung geschah 1 Secunde mit demselben Accumulator = 2·1 Volt. α ist in Scalentheilen jener Ladungsrest, der noch vorhanden, nachdem der Condensator *t* Secunden lang entladen war.

[1] Diese und die folgenden Ladungsdauern wurden dadurch hergestellt, dass a_1 von Anfang an offen blieb. Die Ladung begann beim Schliessen des Hilfscontactes b_1. Nach *t* Secunden wurde dann das Fallgewicht abgebrannt.

Tabelle II.

t	α	t	α
0·0	189	0·00040	30·7
0·00007	34	0·001	29
0·00010	33	0·003	26
0·00020	31·3		

Die Zahlen zeigen, dass der Condensator in derselben Zeit genau so viel Ladung aufnimmt, als er abgibt; z. B. in 0·0004 Secunden wurden abgegeben nach

Tabelle II . . . . 189—30·7 = 158·3,
aufgenommen nach Tabelle I 158
in 0·001 Secunden abgegeben . . . . 189—29 = 160
aufgenommen nahezu 160

Paraffinpapier Condensator II.

Ladung mit 1 Accum. = 2·1 Volt 1. durch 10 Ω Widerstand, 2. durch 50 Ω Widerstand.

Tabelle III.

Ladungsdauer in Secunden	Ausschlag α bei 10 Ω	Ausschlag α bei 50 Ω	Ladungsdauer in Secunden	Ausschlag bei 10 oder 50 Ω
0·000033	—	60	0·0043	143
0·000066	121·0	98	0·0058	150
0·000100	125·0	116	0·0116	153·3
0·000200	126·5	125	0·4	255
0·000320	**127·5**	**127·5**	0·5	280
0·000500	130·0	130·0	1	334
0·00100	132·5	132·5	5	406
0·00160	135·5	135·5	15	516
0·0021	138	138	60	618

Es wurde sodann eine Ladungsbeobachtung mit 4 Accum. = 8·5 Volt vorgenommen. Die Ausschläge waren von Anfang an das Vierfache, weshalb die Mittheilung der Zahlen hier füglich unterbleiben kann.

Der vorgeschaltete Widerstand hatte nur im Anfang einen Einfluss auf den Ladungsvorgang, auf die Entwicklung des Rückstandes nicht mehr.

Entladung desselben Condensators durch 10Ω Widerstand. 1. nachdem derselbe 0·5 Secunden, 2. nachdem er 1 Secunde geladen war. α bezeichnet den Ladungsrest nach t Secunden Entladung.

Tabelle IV.

t	Ausschlag α bei der Ladungsdauer	
	0·5 Secunden	1 Secunde
0·0	280	334
0·0002	160·5	203
0·0007	159	201
0·0020	157	196
0·0046	149	189
0·01	142	182
1	24	—
2	10	—

Die Angaben über diesen Condensator mögen ein beiläufiges Bild geben von der Entwicklung des Rückstandes, wie sie in den meistens gebrauchten Condensatoren aus Paraffinpapier vor sich geht. So viel sich aus den Angaben über die Änderung der Capacität entnehmen lässt, würden die entsprechenden Zahlen der von Steinmetz,[1] Eisler[2] und Sahulka[3] gebrauchten Condensatoren auch der Grössenordnung nach mit den obigen übereinstimmen.

Auf besondere Genauigkeit können jedoch diese letzten Angaben aus mehreren Gründen keinen Anspruch machen. Vor Allem war es besonders bei den letzten grösseren Ladungsdauern nicht möglich, mit der folgenden Beobachtung immer

[1] Elektrotechn. Zeitschr. 1892, Heft 4 und 5.

[2] Zeitschr. für Elektrotechnik, Wien, 1895, Heft 12.

[3] Diese Sitzungsber. 102. Bd., II. a, 1893, S. 773.

so lange zu warten, bis die vorhergehende Ladung ganz verschwunden war, so dass sich leicht etwas aus einer Beobachtung in die folgende verschleppte. Sodann war die Rückstandsbildung beständigen kleinen Änderungen unterworfen, so dass von einer genauen Bestimmung, z. B. der zur Maximalladung nothwendigen Zeit keine Rede sein kann.

Condensator aus reinem Paraffin 0·473 MF.

Ladung mit 1 Accum. = 2·1 Volt durch einen Widerstand $R = 10\,\Omega$. t Ladungsdauer in Secunden. α Ausschlag.

t	α	t	α
0·00004	71	0·00015	72·5
0·00005	73·3	0·00018	73
0·000066	72·5	0·5	74
0·00008	72	1	73
0·00012	72·5	15	74

Ob hier überhaupt eine Abhängigkeit der Capacität von der Ladungsdauer vorhanden, ist nicht mit Sicherheit anzugeben. Vermuthlich sind die Zuleitungsdrähte doch nicht ohne alle Selbstinduction, so dass die Zahl 73·3 bei 0·00005 Secunden Ladungsdauer das Maximum einer schwachen Oscillation ist. Jedenfalls ist dann die Rückstandsbildung für 15 Secunden unter 2%.

Bekanntlich geschieht die Ladung eines rückstandsfreien Condensators nach der Formel

$$Q = V_0 C\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

Ist $e^{-\frac{t}{CR}} = 10^{-3}$, so ist die Ladung praktisch als vollendet anzusehen. Alsdann ist

$$t = 3CR \log \text{nat}\, 10.$$

In unserem Falle ist

$$C = 0\cdot473 . 10^{-15} \text{ abs. E.}$$
$$R = 10^{10} \text{ abs. E.}$$
$$3 \log \text{nat}\, 10 \text{ nahezu} = 7.$$

Daraus folgt

$$t = 0 \cdot 000033 \text{ Secunden.}$$

Wurde der Condensator mit 4 Accum. = 8·5 Volt geladen, so war die Ladung nach derselben Zeit beendigt.

Entladung desselben Condensators, geladen 1 Secunde zu 2·1 Volt.

α bezeichnet den Ladungsrest, der nach einer Entladung von t Secunden, durch 10 Ω Widerstand, noch im Condensator vorhanden war.

t	α
0·0	73
0·000017	18
0·000033	3·5
0·00005	0
.	0
.	.
.	.
.	.

Die Entladung ist also in derselben Zeit beendigt wie die Ladung.[1] Um zu prüfen, ob nicht bei längerer Ladungsdauer doch zur Entladung eine längere Zeit erforderlich sei, wurde jetzt die Ladungsdauer nacheinander zu 5, 10, 30 Secunden genommen, aber nie konnte nach 0·00005 Secunden Entladung noch ein Ausschlag wahrgenommen werden.

Solch' vorzügliche Eigenschaften hatte der Condensator jedoch nur, wenn er eben aus dem Trockenraum kam; war er einige Zeit gegen Feuchtigkeit nicht geschützt, so zeigte er gleich die schon erwähnte Art von Rückstandsbildung, die zu der

[1] Diese Beobachtungen stehen wohl nur scheinbar im Widerspruch mit denjenigen der Herren Prof. Kleiner (Wiedemann's Annalen, Bd. 50, S. 138) und Düggelin (Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellsch., Zürich, 1895, Heft 2), die für Condensatoren aus reinem Paraffin nicht unter 0·5 Secunden fanden, obwohl die Capacität sehr klein war im Vergleich zu diesem Condensator. Denn einmal haben die Herren offenbar keinen Apparat gebraucht, um die kleinen Zeiten genau zu bestimmen, dann aber dürften die gebrauchten Wasserelemente bis 400 Stück hintereinander geschaltet, einen so grossen inneren Widerstand und so starke Polarisation besitzen, dass diese Verzögerung der Ladung hauptsächlich der Ladungsbatterie zuzuschreiben ist.

freien Ladung der Belege noch hinzukam und in 20 Secunden schon 23% der früheren Ladung betrug. Folgende Zahlen geben die beobachteten Ausschläge für den trockenen und feuchten Condensator nach *t* Secunden Ladungsdauer:

t	0·00005	0·0005	0·5	1	5	10	20
Trocken....	73·3	73	74	—	73	74	—
Feucht.....	73·5	75	77	78·7	85·5	89	90·2

Glimmercondensator 1 MF.

Für denselben rechnet sich die Ladungsdauer bei 10 Ω zu 0·00007 Secunden. Beobachtet wurde:

t	α	*t*	α
0·000066	156·5	0·000210	155·7
0·000100	157	1	156·9
0·00013	157·2	10	157
0·00018	155·7	30	156·5

Auch hier stimmt die beobachtete Ladungsdauer hinreichend mit der berechneten. Die etwas grossen Zahlen gleich zu Anfang deuten auch hier auf eine schwache Selbstinduction der Zuleitungsdrähte hin.

Wurde der Condensator zu 2·1 Volt geladen und wie die früheren entladen, so war ebenfalls nach 0·0001 Secunden keine Spur der Ladung mehr zu bemerken.

Die Resultate der Rückstandsbeobachtungen sind in Tafel I übersichtlich dargestellt. Die Zeit umfasst in Fig. 3 die 30 ersten Secunden, während welcher Paraff. Pap. C. I gerade vollständig geladen ist. Um die verschiedenen Condensatoren unmittelbar vergleichbar zu machen, sind die aufgenommenen Ladungsmengen in Procenten der Maximalladungen aufgetragen. Die Dimensionen dieser Figur lassen jedoch den Vorgang für die ersten sehr kleinen Zeiten nicht erkennen. Deshalb wurden in Fig. 4 die Curven in der Weise wiederholt, dass die Ordinaten in demselben Massstabe, die Abscissen in einem 18000mal grösseren aufgetragen wurden. Im Ganzen stellt Fig. 4 das

erste 30.000. Streifchen von Fig. 3 dar. In derselben Weise ist der Vorgang der Entladung in Fig. 5 und 6 dargestellt.

IV. Die Oscillationen.

1. Für die Entladung eines Condensators von der Capacität C durch einen Schliessungskreis mit dem Widerstand R und der Selbstinduction S haben Kirchhoff und Lord Kelvin die Differentialgleichung hergeleitet:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{S}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CS}=0. \qquad 1)$$

Dazu kommen in unserem Falle für $t=0$ noch die Anfangsbedingungen[1]

$$Q=Q_0 \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{dt}=-\frac{Q_0}{CR},$$

wo Q_0 die zur Zeit $t=0$ im Condensator vorhandene Elektricitätsmenge bedeutet.

Daraus ergibt sich für den Fall einer oscillatorischen Entladung die Auflösung

$$Q=Q_0 e^{-\frac{\lambda t}{T}}\left[\cos\frac{\pi t}{T}+\frac{1}{\pi}\left(\lambda-\frac{T}{CR}\right)\sin\frac{\pi t}{T}\right]. \qquad 2)$$

Dabei bedeutet T die Schwingungsdauer, und es ist

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{CS}-\frac{R^2}{4S^2}}}. \qquad 3)$$

$$\lambda \text{ ist das logarithmische Decrement } =\frac{RT}{2S}. \qquad 4)$$

In unserem Falle ist das zweite Glied im Ausdruck für T sehr klein und deshalb einfach zu setzen

$$T=\pi\sqrt{CS}, \qquad 5)$$

alsdann ist auch

$$\lambda=\frac{RT}{2S}=\frac{\pi^2}{2}\frac{RC}{T}. \qquad 6)$$

In dieser letzteren Form kann man aus der Gleichung 6 λ berechnen, ohne dass man den Selbstinductionscoëfficienten

[1] Hiecke, l. c. Vergl. auch Klemenčič, über den Energieverbrauch bei der Magnetisirung. Diese Sitzungsber., Bd. 104, 1895, S. 728.

zu kennen braucht, wenn man nur weiss, welche Capacität der Condensator während der Schwingungen hat.

Zur Beobachtung dieser oscillatorischen Entladung hat man nur die Rolle R (Fig. 2) auf Selbstinduction zu schalten, alsdann geben die im Galvanometer beobachteten Ladungsreste ein genaues Bild von der im Augenblick des Öffnens von a_2 vorhandenen Schwingungsphase, und indem man das bewegliche Contacthebelchen allmälig verschiebt, kann man die Schwingungsdauer und Dämpfung aus einer grösseren Zahl aufeinanderfolgender Schwingungen sehr genau bestimmen.

Beispielsweise seien hier die Schwingungen von drei Condensatoren mitgetheilt, die alle bei einer Ladungsdauer von 0·5 Secunden annähernd dieselbe Capacität = 1 MF. besassen. Alle drei wurden mit einer Abzweigung eines Accumulators zu 0·08 Volt geladen; der Widerstand des Oscillationskreises war 10·9 Ω, die Selbstinduction 244·5 *km*. Nach der Theorie hätten also drei congruente Curven sich ergeben müssen. Die Beobachtung ergab folgende Zahlen, die in Fig. 7 (Taf. II) nach einem gemeinschaftlichen Massstab eingetragen sind. Es wurden von je einer halben Welle meist 12 Punkte bestimmt; jeder Punkt ergab sich als Mittel aus zwei Beobachtungen bei commutirter Anfangsladung. Die Tabelle V enthält nur die Hauptpunkte, die Maxima und die Nullpunkte. Die Empfindlichkeit des Galvanometers ist so, dass 1 MF. zu 1 Volt geladen 65 Scalentheile Ausschlag gibt.

Tabelle V.

Glimmer-Cond.		Paraff. Pap. Cond. I		Paraff. Pap. Cond. II	
Trommelstellung	Ausschlag	Trommelstellung	Ausschlag	Trommelstellung	Ausschlag
11·60	+ 5·5	11·60	+ 5·5	11·60	4·5
11·76	0·0	11·76	0·0	12·00	0·0
13·25	—75·0	13·25	—73·3	12·86	—46·0
14·80	0·0	14·69	0·0	13·80	0·0
16·25	+67·0	16·15	+65·0	14·80	+44·8
17·80	0·0	17·60	0·0	15·80	0·0
19·25	—59·3	19·05	—56·5	16·65	—36·5
20·75	0·0	20·56	0·0	17·65	0·0
22·10	+52·8	22·00	+50·8	18·50	+36·5
23·70	0·0	23·45	0·0	19·55	0·0

Die Rechnung ergab für alle drei Condensatoren: Die Schwingungsdauer $T = 0\cdot0004913$ Secunden. Das log. Decrement $\lambda_{Brigg} = 0\cdot0475$ oder das Dämpfungsverhältniss $k = 10^{\lambda} = 1\cdot116$.

Für den Glimmercondensator gab die Beobachtung $T = 0\cdot0004915$.[1] Die Dämpfung war $k = 1\cdot125$, $\lambda_{Brigg} = 0\cdot0512$.

Wie man sieht, stimmt die berechnete Schwingungsdauer sehr gut mit der beobachteten überein,[2] die Dämpfung dagegen nicht. Doch ist die Abweichung so gering, dass man sie in der Figur kaum ausdrücken könnte. Es wurde deshalb die ideale Curve nicht gezeichnet und mag Curve I selber für die ideale gelten.

Weniger gut ist die Übereinstimmung bei den Rückstand bildenden Condensatoren. Was zunächst die Schwingungsdauer betrifft, so erscheint dieselbe kleiner, als der Capacität für statische Ladung entspricht. Es ergab sich für den Paraff. Pap. Cond. I $T = 0\cdot0004817$, für Paraff. Pap. Cond. II ist $T = 0\cdot0003025$.

Rechnet man aus dieser Schwingungsdauer die Capacität nach der Formel $T = \pi\sqrt{SC}$, so ergibt sich für den ersten Condensator $C = 0\cdot96$ MF., während die Maximalladung zur Zeit dieser Beobachtung $1\cdot20$ MF. anzeigte. Der Condensator folgte also den Schwingungen mit nur 80% seiner vollen Capacität.

Vergleicht man das mit der früheren Beobachtung über die Dauer der Ladung und Entladung (Tabelle I), so findet man für die Maximalladung einen Ausschlag von 195 Scalentheilen, in $0\cdot0002$ Secunden aber (der Dauer einer Viertelschwingung) lud sich der Condensator nur zu $156\cdot5$ Scalentheilen, d. i. zu $80\cdot2$% der Maximalladung.

Für den Paraff. Pap. Cond. II. ergibt sich aus der Schwingungsdauer $C = 0\cdot38$ MF., während bei voller Ladung $C = 1\cdot9$ MF.

---

[1] Der Zeitwerth einer Trommelumdrehung ist hier $0\cdot0001644$ zu nehmen. Die Aufstellung des Apparates war nämlich eine etwas andere.

[2] Da die Schwingungsdauer immer sehr gut übereinstimmt, so kann man den Fallapparat auch ähnlich wie den v. Helmholtz'schen Pendelunterbrecher zur Bestimmung des Selbstinductionscoëfficienten des Schliessungskreises benützen, vorausgesetzt, dass man die Capacität des Condensators und die Zeitconstante des Fallapparates kenne. Cf. Gleichung 5).

war, so dass nur 20% an der Schwingung theilnahmen. Die Beobachtung mit statischer Ladung ergab den Maximalausschlag 618 (Tabelle III), für $T = 0 \cdot 00015$ Secunden dagegen 126, d. i. 20·5%.

Somit findet die scheinbare Verminderung der Capacität bei Wechselstrom in der Art und Weise, wie der Rückstand sich bildet und entladet, ihre naheliegende und natürliche Erklärung.

Wenn also J. Sahulka,[1] nachdem er nur Condensatoren aus Paraffinpapier untersucht, als Resultat seiner Untersuchung hinstellt, dass die Condensatoren mit festem Dielektricum ohne Ausnahme im Wechselstrom eine Verminderung der Capacität erfahren und nur Luftcondensatoren davon ausgenommen sind, so wäre es nach meinen Untersuchungen richtiger, zu sagen, dass rückstandsfreie Condensatoren überhaupt[2] eine constante Capacität besitzen, während Rückstandsbildner auch im Wechselstrom dieselbe Ladungsmenge aufnehmen, wie sie bei Gleichstrom in derselben Zeit aufnehmen würden.

2. In den oben mitgetheilten Beobachtungen dauerte die Ladung bis zum Beginne der Oscillation circa 1 Secunde. Diese Zeit reicht hin, um einen bedeutenden Rückstand zu bilden, der also, da er an der Schwingung nicht mit theilnimmt, während derselben im Condensator sitzt. Es wurde nun zunächst die Frage untersucht, ob derselbe nicht eine deformirende Wirkung auf die Schwingungen ausübte. Und es ergab sich, dass die Curven auch bei dem zweiten starken Rückstand bildenden Condensator dennoch regelmässig gedämpfte Sinusschwingungen blieben und dass die Welle mit der Rückstandsladung sich einfach superponirte. Dadurch erscheinen dann die der Anfangsladung entgegengesetzten 1, 3, 5... Maxima zu klein, während die 2, 4, 6... Maxima vergrössert werden. Diese scheinbare Verschiebung der Nulllinie zeigt sich umso deutlicher, je kleiner die Schwingungsamplitude im Verhältniss zur Rückstandsladung ist. So war in einem speciellen Falle

[1] L. c.

[2] Auch beim Condensator aus reinem Paraffin ergab sich vollkommene Übereinstimmung. Bei statischer Ladung war gefunden worden $C = 0 \cdot 473$ MF.; aus der Schwingungsdauer ergab sich $C = 0 \cdot 4733$ MF.

das 81. Maximum durch den Ausschlag Null charakterisirt. Von da an war die Amplitude kleiner als der Rückstand, und die folgenden Schwingungen verliefen durchaus an derselben Seite der Ruhelage. Es konnten noch etwa 20 Wellen beobachtet werden, dann ging die Entladung in die gewöhnliche gleichmässige Rückstandsentladung über. Fig. 8 zeigt diese Superposition, jedoch mit übertriebener Dämpfung $k = 1 \cdot 5$.

Wollte man bei diesen Condensatoren aus den beobachteten Maximis unmittelbar das Dämpfungsverhältniss bestimmen, so würde man sehr ungleiche Werthe erhalten. Man muss die Maxima von der Nulllinie der Oscillationen aus rechnen und deshalb zu den beobachteten Werthen eine solche Zahl x addiren (respective beim 2., 4.... Maximum subtrahiren), dass die Dämpfung constant wird, also

$$\frac{m_1 + x}{m_2 - x} = \frac{m_2 - x}{m_3 + x},$$

wenn $m_1 m_2 m_3$ drei beliebige aufeinanderfolgende Maxima sind. Das x ist jedoch nicht durchaus constant, sondern nimmt langsam ab, in dem Masse, als der Rückstand während der Oscillationen sich mit entladet.

V. Die Energieverluste bei den Oscillationen.

Sind V_1 und V_2 die Potentiale zweier aufeinanderfolgender Maxima; $\frac{1}{2} C V_1^2$ und $\frac{1}{2} C V_2^2$ die zugehörigen Energiemengen, so ist

$$W = \frac{1}{2} C (V_1^2 - V_2^2) = \frac{1}{2} C V_1^2 \left(1 - \frac{V_2^2}{V_1^2}\right) \tag{7}$$

der Energieverbrauch für eine Schwingung. Es ist nun $\frac{V_1}{V_2} = k$, wenn k das berechnete Dämpfungsverhältniss ist. Folglich ist der berechnete Energieverbrauch

$$W = \frac{1}{2} C V_1^2 \left(1 - \frac{1}{k^2}\right). \tag{8}$$

$1 - \frac{1}{k^2}$ bezeichnet jenen Bruchtheil der Gesammtenergie, welcher während einer Schwingung verbraucht wird.

Nun ergibt aber die Beobachtung im Allgemeinen ein Dämpfungsverhältniss k_1, welches grösser ist als das berechnete, und dementsprechend den grösseren Energieverbrauch

$$W_1 = \frac{1}{2} CV_1^2\left(1-\frac{1}{k_1^2}\right).$$

Daraus folgt dann ein Energieverlust

$$W_1 - W = \frac{1}{2} CV_1^2\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k_1^2}\right). \tag{9}$$

für eine Schwingung.

Die Frage nach der Ursache dieses Verlustes ist in der verschiedensten Weise beantwortet worden, ohne dass es jedoch geglückt wäre, einen durchschlagenden Beweis für eine bestimmte Ansicht zu bringen.

Eine Quelle von Verlusten ist nun immer die mangelhafte Isolation, ja es tauchte sogar die Meinung auf, als sei dies, wenn nicht die einzige, so doch die Hauptursache. Obwohl nun Herr Dr. Benischke, dem diese Annahme mit Rücksicht auf einen Aufsatz[1] gewöhnlich zugeschrieben wird, seine frühere Ansicht schon hat fallen lassen,[2] so hält doch Herr Düggelin[3] die Sache noch nicht für endgiltig erledigt und glaubt, dass man absolute Messungen abwarten müsse. Da ich nun in der Lage bin, solche vorlegen zu können, so will ich auf diesen Punkt etwas näher eingehen.

Ist der Isolationswiderstand R, das Anfangspotential V, so ist der Energieverlust für die ungedämpfte Schwingung bekanntlich

$$W = \left(\frac{V}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{T}{R}.$$

Dadurch werde das Potential von V auf V' herabgedrückt, und es ist

$$W = \frac{V^2T}{2R} = \frac{1}{2} C(V^2 - V'^2) = \frac{1}{2} CV^2\left(1-\frac{V'^2}{V^2}\right),$$

[1] G. Benischke, Zur Frage der Wärmetönung durch dielektrische Polarisation. Diese Sitzungsber., CII, II. a. 1893, S. 1345.

[2] Cf. Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 1895, Heft 16.

[3] L. c.

folglich

$$\frac{T}{CR} = 1 - \frac{V'^2}{V^2}.$$

Setzen wir $\frac{V}{V'} = \varkappa$, so folgt

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{T}{CR}}} = 1 + \frac{T}{2CR},$$

da das zweite Glied sehr klein ist.

Sind die Schwingungen wie im vorliegenden Fall gedämpft, so ist der wahre Werth von $\varkappa$ noch etwas kleiner.

Für Paraff. Pap. Cond. I war $T = 0{\cdot}0005$ Secunden. $C = 10^{-15}$ abs. E. R im ungünstigsten Falle $= 1600 \cdot 10^6\,\Omega = 16 \cdot 10^{17}$ abs. E., woraus dann folgen würde $\varkappa = 1{\cdot}00000015$, d. h. das Potential sinkt während einer Schwingung um 0·000015 Procent.

Bei Paraff. Pap. Cond. II war $T = 0{\cdot}0003$, R wenigstens $= 4 \cdot 10^{15}$ abs. E., C bei dieser Schwingungsdauer circa $2 \cdot 10^{-16}$ abs. E., folglich $\varkappa = 1{\cdot}0004$, was ein Sinken des Potentials um 0·04% bedeuten würde, d. h. eine Grösse, die schon weit unterhalb der Grössenordnung der Beobachtungsfehler liegt. Die Verluste jedoch, um die es sich hier handelt, sind deutlich wahrnehmbar und betragen gerade bei diesem Cond. II bis zu 10% für eine Schwingung. Sie übertreffen also die aus dem Leitungsvermögen berechneten mehr als hundertmal.

Auch ist wohl hinreichend bewiesen durch die Arbeiten von Steinmetz, Eisler und Düggelin, dass bei Verwendung von Gleichstrom ein solcher Mehrverlust nicht stattfindet.

Indem man also die Ursache dieser Verluste wohl mit Recht in dem Ladungswechsel suchte, glaubten manche Physiker zur Erklärung derselben eine eigene Hypothese von der »dielektrischen Hysteresis« aufstellen zu sollen. Es ist jedoch in dem schnellen Ladungswechsel vorerst noch eine andere Quelle für Energieverluste gelegen, sobald der Condensator einen Rückstand bildet. Eine einfache Überlegung, die weiter keiner Voraussetzung bedarf, als dass die Rückstandsbildung wirklich so vor sich gehe, wie es oben beobachtet worden ist, wird uns davon überzeugen. Ange-

nommen der Condensator werde positiv geladen. Eine Ladungsdauer von 0·5, respective 1 Secunde reicht hin, um bei den Condensatoren aus Paraffinpapier einen Rückstand entstehen zu lassen. Beim Beginn der Oscillation fliesst zunächst die Ladung der Belege ab und vom Rückstande so viel, als in dieser Zeit eben abfliessen kann. Wenn nun gleich darauf die Belege negativ geladen sind, so wird die Entladung des Rückstandes bei der grösseren Potentialdifferenz umso mehr fortdauern. Die nothwendige Folge ist, dass dieser Theil des positiven Rückstandes einen gleich grossen der negativen Welle neutralisirt, wobei dann die entsprechende elektrische Energie in Wärme umgewandelt wird. Dass die Rückstandsentladung einen Energieverlust nach sich zieht, ist leicht einzusehen, ob er hinreicht, um in allen Fällen den Mehrverlust zu erklären, das bedarf der näheren Untersuchung. Der einfachste und vollkommenste Beweis läge offenbar darin, dass man den Rückstandsverlust berechnete und untersuchte, ob er quantitativ mit dem beobachteten übereinstimmte. Allein das erlaubt der gegenwärtige Stand der Untersuchungen noch nicht. Doch glaube ich einige Folgerungen, die sich aus der obigen Erklärung ziehen lassen, bestätigt gefunden zu haben.

1. Ist der Mehrverlust im Wechselstrom wirklich nur eine Folge der Entladung und Neubildung des Rückstandes, so darf bei einem rückstandsfreien Condensator kein solcher Energieverlust sich zeigen. Zunächst stimmt mit dieser Folgerung überein, dass Benischke[1] für reines Paraffin und Kleiner[2] und Düggelin[3] für Paraffin und Colophonium keine Erwärmung constatiren konnten. Die Versuche mit dem Glimmercondensator gaben nun anfangs kein befriedigendes Resultat. In dem oben (Tab. V) mitgetheilten Falle z. B. war das Potential des ersten Maximums 1·154 Volt und die Energie 6·65 Erg. Für das zweite Maximum ergab die Berechnung: 1·038 Volt mit 5·36 Erg., also eine Verminderung um 1·29 Erg.

[1] L. c.
[2] L. c.
[3] L. c.

Die Beobachtung zeigte nur noch 1·029 Volt mit 5·25 Erg., also den Energieverbrauch 1·40 Erg., mithin einen Mehrverlust von 0·11 Erg., d. i. 1·65% der anfangs vorhandenen Energie.

Da mir diese Beobachtung von grosser Wichtigkeit zu sein schien, so wurde sie unter verschiedenen Variationen oft wiederholt. Eine Versuchsreihe z. B. wurde dreimal angestellt, wobei jedes Maximum mehrmals beobachtet wurde. Es ergab sich nur ein Beweis für die Genauigkeit der Methode. Die Dämpfungsverhältnisse waren nämlich 1·093, 1·093, 1·094. Somit blieb nur noch die eine Möglichkeit, dass dieser Verlust gar nicht im Condensator, sondern in den Rollen stattfand. Die zwei Rollenwindungen wurden voneinander isolirt und wie die zwei Belege eines Condensators behandelt. Zuerst wurde nach der gewöhnlichen Methode mit dem ballistischen Galvanometer die Capacität bestimmt und bei einer Ladungsdauer von 0·5 Secunden 0·3 Mikrofarad, bei 1 Secunde 0·41 MF. gefunden. Sodann handelte es sich darum, ob diese Ladung frei beweglich oder Rückstandsladung war. Die Rolle wurde 1 Secunde geladen, dann t Secunden durch einen Widerstand von 17·29 Ω entladen und dann der Rest im Galvanometer bestimmt. Es wurde gefunden:

Für t = ...	0·0	0·0005	0·001	0·002	1	5	10
Der Ladungsrest	60·6	57·2	55·7	54·1	11	3·3	1·6

Aus diesen Zahlen geht deutlich hervor, dass die ganze Ladung eine Art Rückstand[1] war. Es musste daher die bisherige Schaltung, bei welcher Windungen mit grosser Potentialdifferenz unmittelbar nebeneinander lagen, aufgegeben werden. Die zwei Wickelungen wurden nun parallel geschaltet, was noch den Vortheil brachte, dass der Widerstand auf den vierten Theil seines früheren Werthes sank. Da aber auch die Selbstinduction um denselben Betrag abnahm, so wurden die zwei Rollen L und M in dieser Weise hintereinander geschaltet.

[1] Es konnte deshalb diese Ladung auch nicht an den Oscillationen theilnehmen, da der Theil, welcher während der kurzen Zeit zur Entladung gekommen, verschwindend klein geworden wäre, besonders wenn man bedenkt, dass die Capacität bei der Schaltung auf Selbstinduction doch keine so extrem grosse ist.

Jetzt lagen nur Windungen mit sehr nahe gleichem Potential nebeneinander.

Der Gesammtwiderstand des Oscillationsweges war jetzt 6·23 Ω, die Schwingungsdauer $T = 0·000350$ Secunden, die Capacität 1 MF. Daraus rechnet sich nach Gleichung 6)

$$\lambda_{Brigg} = 0·03815 \qquad k = 1·0920.$$

Das erste Maximum hatte 0·84 Volt mit 3·53 Erg. Der Energieverbrauch für die erste Schwingung war 0·570 Erg.

Die Beobachtung ergab $k = 1·0926$, $\lambda_{Brigg} = 0·03846$, der Energieverbrauch für die erste Schwingung 0·573 Erg.

Eine solche Übereinstimmung beweist natürlich, dass weder in den Rollen, noch im Condensator ein Energieverlust stattfand und namentlich zeigt sie, dass auch der Wechsel der elektrischen Ladung an sich noch keinen Energieverlust verursacht.

Ein ähnliches Resultat hätte auch der Condensator aus reinem Paraffin geben sollen. Allein wegen des schon oben erwähnten Umstandes, dass der Condensator, sobald er längere Zeit an der freien Luft sich befand, eine Art Rückstandsbildung zeigte, stellten sich immer kleine Verluste ein.

Bei der Schwingungsdauer $T = 0·000272$ Secunden, Potential des ersten Maximums 2·67 Volt, Widerstand in den Rollen 7·44 Ω, zeigte

$$\text{die Beobachtung } \lambda_{Brigg} = 0·03020 \qquad k = 1·0720$$
$$\text{die Berechnung } \lambda_{Brigg} = 0·02805 \qquad k = 1·0667$$

Die Anfangsenergie war 16·86 Erg., der Verbrauch während der ersten Schwingung nach der Rechnung 2·04 Erg., nach der Beobachtung 2·20 Erg., mithin der Verlust 0·16 Erg., d. i. 1%.

Zuletzt wurden Condensator und Rollen wieder 5 Tage abgesperrt, nachdem die Einstellungen des Fallapparates für die Maxima genau fixirt waren, dann wurde auf das erste und gleich darauf auf das fünfte Maximum eingestellt, so dass die ganze Beobachtung in einigen Minuten beendigt war. Es ergaben sich die Mittelwerthe

$$m_1 = 83 \qquad m_5 = 64·2,$$

folglich

$$k^4 = 1\cdot2930 \qquad k = 1\cdot066 \qquad \lambda_{\text{Brigg}} = 0\cdot0279.$$

Die Übereinstimmung ist also eine ausgezeichnete zu nennen. Leider fehlten Zeit und Mittel, um diese Bestimmung durch weitere Untersuchungen noch zuverlässiger zu machen.

2. Eine andere Folgerung aus der oben versuchten Erklärung des Arbeitsverlustes ist diese: Bei verschiedenen Condensatoren, die alle Rückstand bilden, müssen unter sonst gleichen Umständen die Quadratwurzeln aus den Verlusten sich verhalten wie die Rückstände.

Da mit der Capacität und Selbstinduction auch die Schwingungsdauer gegeben ist, so ist es sehr schwer, bei verschiedenen Condensatoren dieselbe Schwingungsdauer zu erhalten, besonders wenn auch noch alle übrigen Apparate dieselben sein sollen. Ich musste mich deshalb mit einer angenäherten Übereinstimmung begnügen, indem ich von Paraff. Pap. Cond. II so viel Capacität einschaltete, dass der Unterschied möglichst klein wurde. Es waren dazu 2 MF. erforderlich, genau jener Theil des Condensators, der oben auf seine Rückstandsbildung untersucht war.

Die Schwingungsdauer war dann $T = 0\cdot000448$,

die Dämpfung berechnet $k = 1\cdot116$, beobachtet $k_1 = 1\cdot156$, folglich war der Verlust

$$W_1' - W' = \frac{1}{2}\, CV^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k_1^2}\right) = \frac{1}{2}\, CV^2 \times (0\cdot233)^2.$$

Bei Paraff. Pap. Cond. I war $T = 0\cdot000486$, $k = 1\cdot122$, $k_1 = 1\cdot130$,

folglich der Verlust

$$W_1' - W' = \frac{1}{2}\, CV^2 (0\cdot0424)^2.$$

Also verhalten sich die Verluste wie $(0\cdot233)^2 : (0\cdot0424)^2$ und die Quadratwurzeln derselben wie $5\cdot5 : 1$.

Nach Tabelle III nahm der Paraff. Pap. Cond. II in 0·5 Secunden (so lange dauerte bei den Oscillationen die Ladung) 280 Scalentheile Ladung auf, darunter 121 Scalentheile freie

Ladung, d. h. solche, die sich durch den Widerstand 10 Ω in der kurzen Zeit entladen konnte, und 159 Scalentheile Rückstand.

Paraff. Pap. Cond. I nahm 185 Scalentheile Gesammtladung auf mit 155 Scalentheilen auf den Belegen und 30 Scalentheilen Rückstand. Das Verhältniss der Rückstände ist also 159 : 30 = = 5·3 : 1.

Während bei den bisherigen Versuchen das Potential absichtlich so niedrig gehalten wurde, als es die Empfindlichkeit des Galvanometers nur erlaubte, erübrigt noch, die Abhängigkeit des Verlustes vom Ladungspotential zu untersuchen. Schreibt man Gleichung 9)

$$\frac{W_1 - W}{V^2} = \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k_1^2} \right),$$

so ist die linke Seite constant bei verschiedenen Werthen von V, falls der Verlust an Energie dem Quadrate des Potentials proportional ist. Alsdann muss auch rechts eine Constante stehen, d. h. es muss k_1, die beobachtete Dämpfung, constant sein. Nimmt dagegen der Verlust mit einer geringeren Potenz, z. B. der ersten, zu, so ist

$$\frac{W_1 - W}{V} = \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k_1^2} \right) V = \text{Const.}$$

Alsdann muss k_1 mit wachsendem V abnehmen.

Es versteht sich, dass namentlich bei den rückstandsbildenden Condensatoren nur solche Beobachtungen beweisen, die unmittelbar hintereinander gemacht wurden. Das Potential ist immer dasjenige des mittleren der fünf aufeinanderfolgenden Maxima, aus denen die Dämpfung bestimmt wurde.

Glimmercondensator, Rolle L, $T = 0.000492$ Secunden.

Potential	0·5	3	40	100 Volt
Dämpfung	1·1300	1·1310	1·1304	1·1300

Paraff. Pap. Cond. I, Rolle L, $T = 0·000486$ Secunden.

Potential	0·5	40	100 Volt
Dämpfung	1·135	1·137	1·139

Paraff. Pap. Cond. II, Rolle *L*.

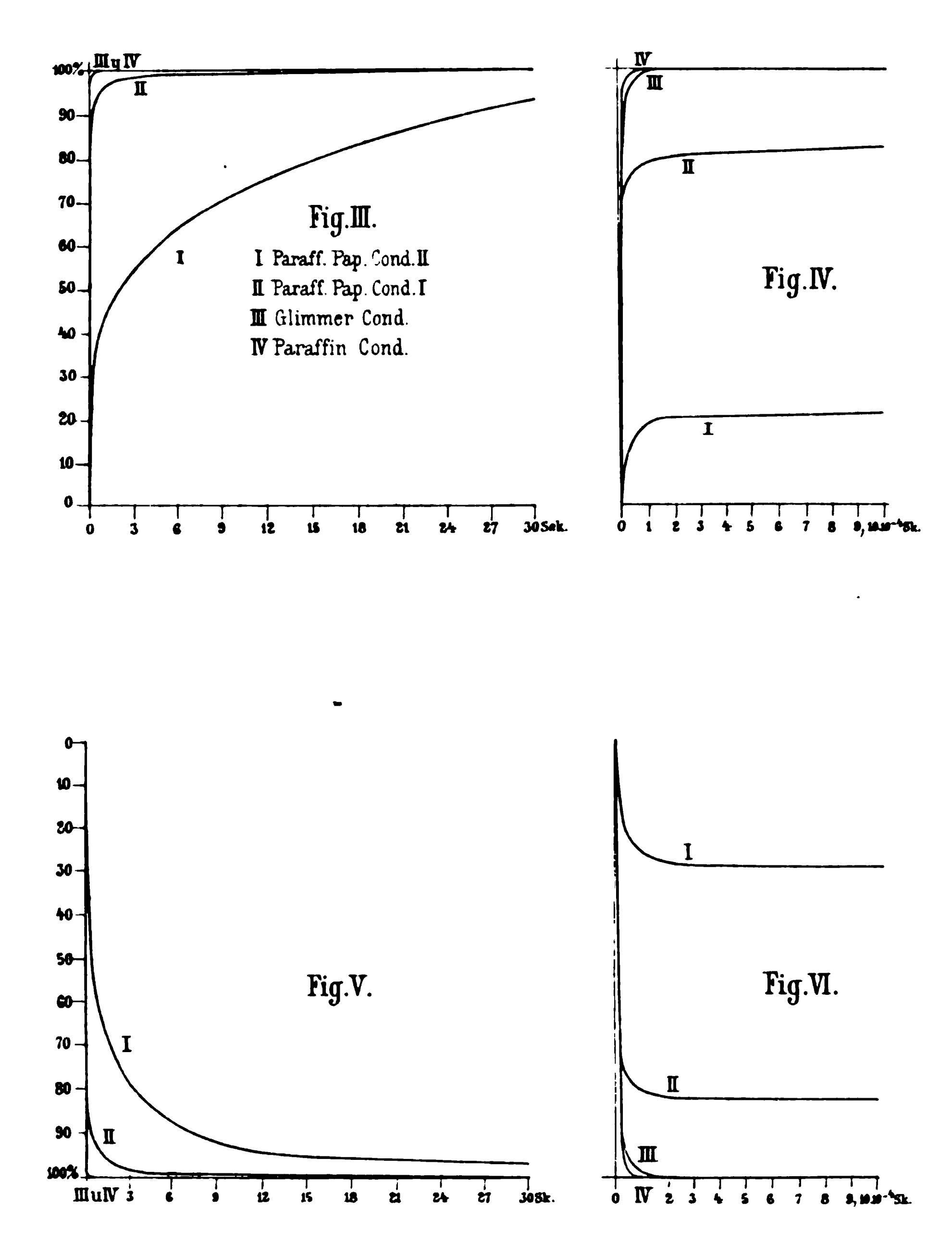
Potential	0·1	25	60	Volt
Dämpfung	1·1250	1·1240	1·1245	

Es ist also k_1 constant, und die Verluste nehmen, wenigstens für den Bereich dieser Beobachtungen, mit dem Quadrate der Spannung zu, wie schon wiederholt constatirt wurde.

Mit geringen Abänderungen dürfte die oben versuchte Erklärung des Arbeitsverlustes sich auch auf eigentliche Wechselströme anwenden lassen.[1]

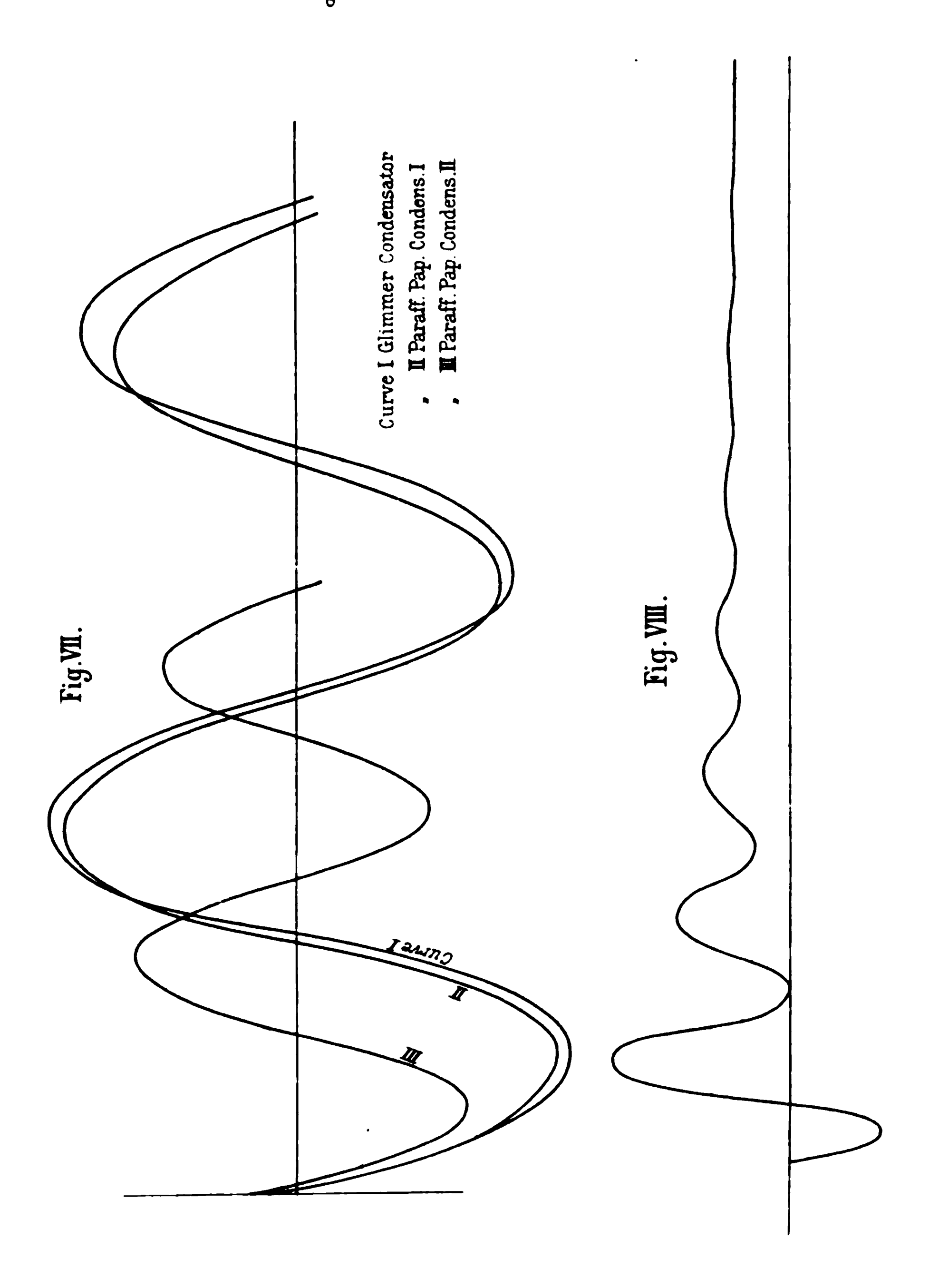
Zwar genügen die angeführten Beobachtungen durchaus nicht, um zu zeigen, dass der Mehrverlust an Energie bei Wechselströmen in allen Fällen eine Folge der Rückstandsbildung sei. Jedenfalls aber wird man zugeben, dass sich diese Erklärung aus den beobachteten Verhältnissen im Dielektricum ganz natürlich ergibt, während die Hypothese einer dielektrischen Hysteresis viel mehr in einem gewissen Vorurtheil, ein Analogon zu den interessanten Entdeckungen Warburg's finden zu müssen, als in einer genauen Beobachtung der Vorgänge im Dielektricum ihren Ursprung haben dürfte. Zum einwurfsfreien Nachweis einer dielektrischen Hysteresis wäre erforderlich, dass entweder dieser Mehrverlust im Wechselstrom auch bei einem rückstandsfreien Condensator constatirt würde, oder, wenn man schon Rückstandsbildner gebraucht, so müssten von den erhaltenen Verlusten neben allen anderen auch diejenigen vorher in Abzug gebracht werden, welche durch die Rückstandsbildung immer nothwendig sich ergeben müssen. Beweise der zweiten Art liegen begreiflicherweise bis jetzt nicht vor; die Beobachtungen an rückstandsfreien Condensatoren aber haben bisher gegen Energieverluste entschieden. Die Annahme einer dielektrischen Hysteresis ist also bis jetzt durch die Erfahrung nicht bestätigt worden.

[1] Schon Herr Dr. Benischke führt in einem Aufsatz (Zeitschr. für Elektrotechnik, Wien 1895, Heft 16) den Arbeitsverlust auf die Rückstandsbildung zurück, doch ist seine Erklärung eine etwas andere als sie hier gegeben wurde.



Autor del. Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien





Autor del. Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.



Über die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charles'schen Gesetz und der Dissociation derselben

von

Ludwig Boltzmann,
w. M. k. Akad.

Ich gehe von dem folgenden Satze aus, den ich in mehreren meiner Abhandlungen bewiesen habe (vergl. Report on the present state of our knowlegde of thermodynamics, by G. H. Bryan, Brit. Ass. of Oxford 1894, p. 64).

Eine beliebige Anzahl materieller Punkte soll sich im Wärmegleichgewichte befinden. Die Wahrscheinlichkeit, dass n derselben sich in einer solchen Lage befinden, dass sich das erste im Raumelemente do_1, das zweite in do_2 etc. befindet, ist proportional

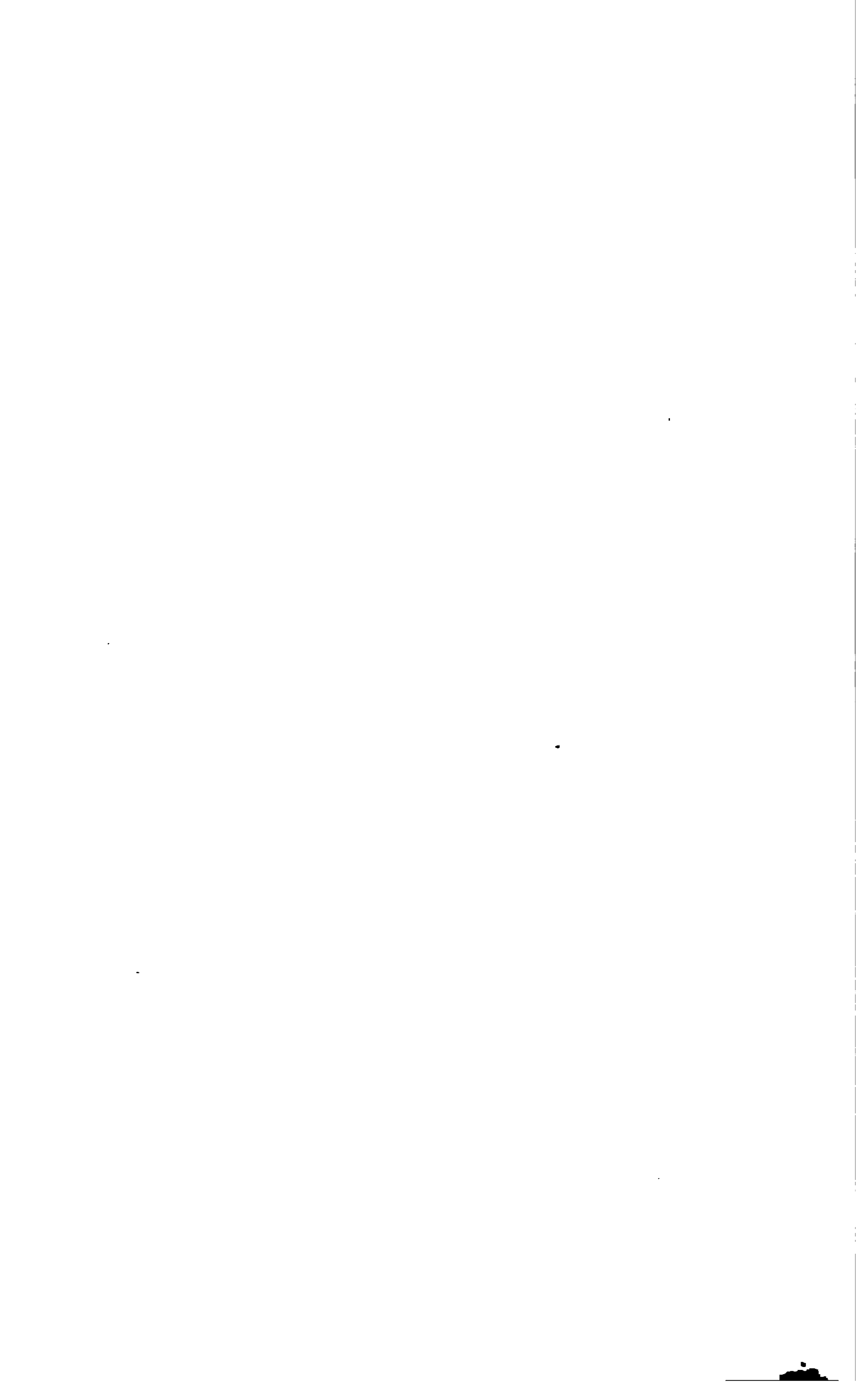
$$e^{-2h\chi} do_1 do_2 do_3 \ldots, \tag{1}$$

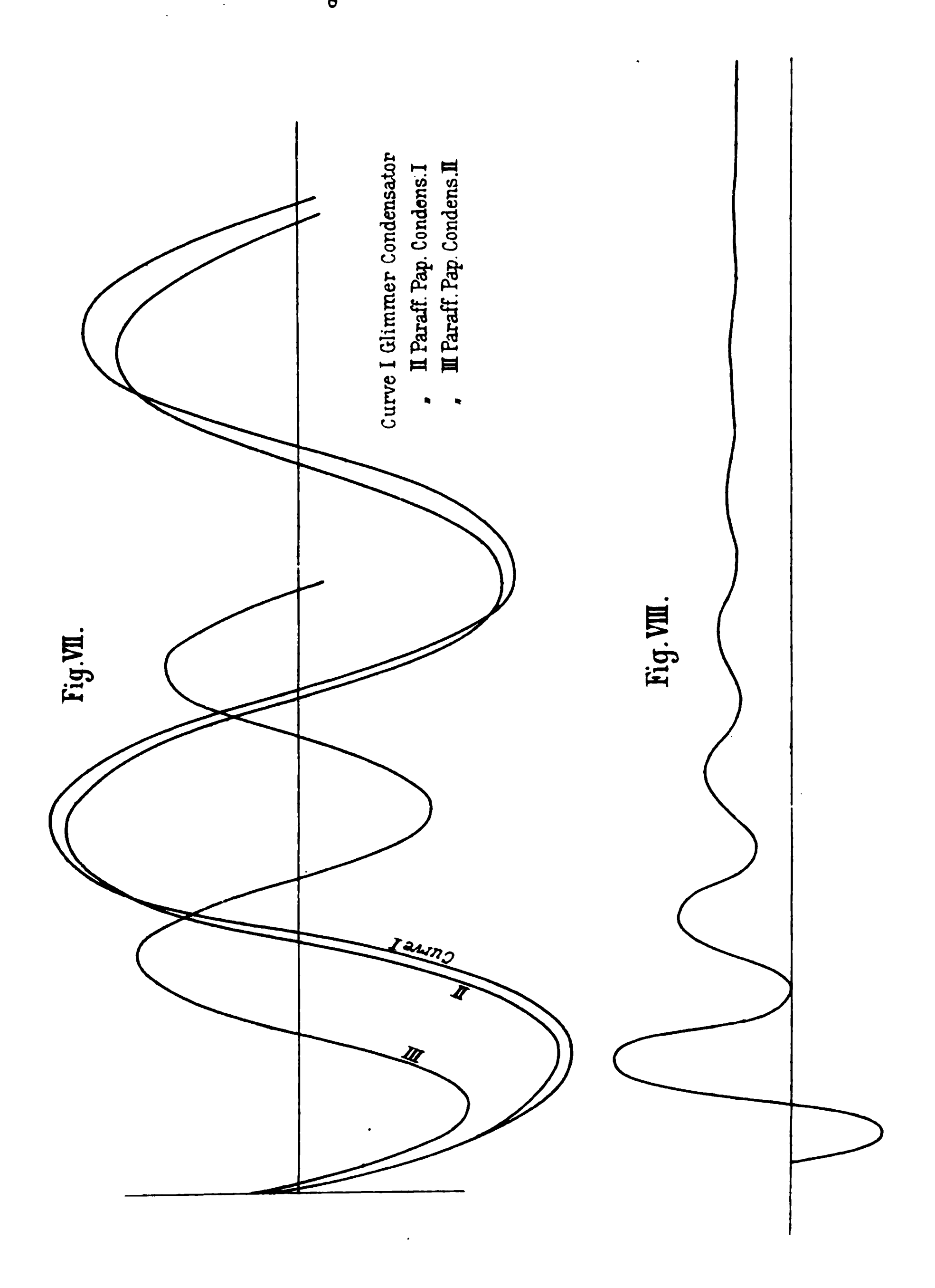
d. h. sie verhält sich zur Wahrscheinlichkeit, dass sich das erste in do'_1, das zweite in do'_2 etc. befindet, wie der obige Ausdruck zu

$$e^{-2h\chi'} do'_1 do'_2 do'_3 \ldots$$

Dabei ist χ der Werth der Kraftfunction in der ersten, χ' der in der zweiten Lage, d. h. die Arbeit, welche erforderlich ist, um die materiellen Punkte aus einer Lage, wo sie keine Wirkung mehr aufeinander ausüben, in die betreffende Lage zu bringen. h ist eine die Temperatur bestimmende Constante, und zwar ist

$$\frac{3}{4h} = \frac{m}{2} \overline{c^2}$$





Autor del.

Lith. Anst. v. Th. Bannwarth, Wien.

gleich der mittleren lebendigen Kraft irgend eines der materiellen Punkte.

1. Abweichungen vom Boyle-Charles'schen Gesetze.

Wir denken uns nun die Gasmoleküle als materielle Punkte, welche in der Entfernung r die abstossende Kraft $f(r)$ aufeinander ausüben und suchen die Abweichungen vom Boyle-Charles'schen Gesetze auf, welche dadurch bedingt sind, dass die Entfernung r, in welcher jede bemerkbare Wechselwirkung aufhört, nicht völlig verschwindet gegen die mittlere Weglänge. Man hat bekanntlich gemäss der Virialgleichung

$$3pv = \Sigma m\overline{c^2} + \Sigma \overline{rf(r)}. \tag{2}$$

Die Querstriche deuten Zeitmittel an. Sie können daher wegfallen, wenn der Zustand stationär ist. p ist der Druck auf die Flächeneinheit, v das gesammte Gasvolumen. Enthält dasselbe n Gasmoleküle, so ist deren gesammte lebendige Kraft

$$\frac{1}{2}\Sigma m\overline{c^2} = \frac{1}{2} nm\overline{c^2},$$

und es folgt

$$3pv = nm\overline{c^2} + \Sigma rf(r). \tag{3}$$

Die letzte Summe, welche über alle Molekülpaare zu erstrecken ist, welche sich in Wechselwirkung befinden, ist noch zu berechnen. Wir denken uns da die Lagen aller n Moleküle mit Ausnahme eines einzigen gegebenen. Wenn dieses einzige sich relativ gegen irgend eines der gegebenen Moleküle in einer Entfernung befinden soll, welche zwischen r und $r+dr$ liegt, so steht ihm dazu in erster Annäherung der Raum $4\pi(n-1)r^2dr$ zur Verfügung, wofür auch $4\pi nr^2dr$ geschrieben werden kann. Soll es mit keinem anderen Molekül in Wechselwirkung stehen, so steht ihm ein Raum zur Verfügung, welcher in erster Annäherung gleich dem ganzen Volumen v des Gases ist. Nach Formel 1) verhält sich also die Wahrscheinlichkeit der ersteren Eventualität zu der der letzteren wie

$$4\pi nr^2dre^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr} : v. \tag{3a}$$

Dies muss für jedes Molekül gelten; es muss also auch die gesammte Anzahl der Moleküle, welche von irgend einem anderen eine Entfernung haben, die zwischen r und $r+dr$ liegt, zur Anzahl der Moleküle, welche mit keinem anderen in Wechselwirkung stehen, im obigen Verhältnisse stehen. Letztere Anzahl kann gleich n gesetzt werden, da überhaupt in jedem Zeitmomente nur sehr wenige Moleküle in Wechselwirkung stehen. Erstere Anzahl ist aber das Doppelte von der Anzahl dn der Molekülpaare, welche eine Entfernung haben, die zwischen r und $r+dr$ liegt. Es folgt also

$$2dn : n = 4\pi n r^2 dr e^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr} : v.$$

$$dn = \frac{2\pi n^2}{v} r^2 dr e^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr} . \qquad 3b)$$

Da alle diese Molekülpaare in das Virial das Glied $rf(r)$ liefern, so ist

$$\Sigma rf(r) = \int rf(r)\,dn = \frac{2\pi n^2}{v}\int_0^\infty r^3 f(r)\,dr e^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr} . \qquad 4)$$

Wenn die Moleküle sich wie elastische Kugeln verhalten, so beginnt die Abstossung erst in einer Entfernung σ, welche gleich dem doppelten Radius derselben ist und wird schon in einer wenig kleineren Entfernung $\sigma-\delta$ unendlich. Dann kann man setzen:

$$\Sigma rf(r) = \frac{2\pi n^2 \sigma^3}{v}\int_{\sigma-\delta}^{\sigma} f(r)\,dr e^{-2h\int_r^\sigma f(r)\,dr} .$$

Setzt man $\int_r^\sigma f(r)\,dr = x$, so folgt

$$\Sigma rf(r) = \frac{2\pi n^2 \sigma^3}{v}\int_0^\infty e^{-2hx}\,dx,$$

da für $r = \sigma$, $x = 0$, für $r = \sigma-\delta$ aber $x = \infty$ ist. Daher wird

$$\Sigma rf(r) = \frac{\pi n^2 \sigma^3}{vh} = \frac{2\pi n^2 \sigma^3}{3v} m\overline{c^2}$$

$$3pv = nm\overline{c^2}\left(1 + \frac{2\pi n \sigma^3}{3v}\right).$$

$\frac{nm}{v}$ ist die Dichte des Gases. Ist ferner T die absolute Temperatur, R die Gasconstante, so hat man

$$\frac{1}{3}\overline{c^2} = RT, \tag{5}$$

daher

$$\frac{p}{\rho} = RT\left(1 + \frac{2\pi n\sigma^3}{3v}\right) \tag{6}$$

in Übereinstimmung mit dem von H. A. Lorentz gefundenen Werthe.

Die Formel 4) gestattet auch die Durchführung der Rechnung für ein beliebiges anderes Wirkungsgesetz. Um hiefür nur ein Beispiel zu geben, sei $f(r) = \frac{K}{r^5}$. Dann wird

$$\int_r^\infty f(r)\,dr = \frac{K}{4r^4}.$$

$$\Sigma r f(r) = \frac{2\pi n^2 K}{v}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2} e^{-\frac{hK}{2r^4}} =$$

$$= \frac{2\pi n^2}{v}\sqrt[4]{\frac{2}{h}K^3}\int_0^\infty e^{-x^4}dx = \frac{an^2}{v\sqrt[4]{h}},$$

wobei a eine Constante des Gases ist. An Stelle der van der Waals'schen Gleichung würde man daher erhalten:

$$\frac{p}{\rho} = RT\left(1 + \frac{2an\sqrt{h^3}}{3v}\right).$$

Es wäre also jetzt das zur Einheit hinzutretende Correctionsglied der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der absoluten Temperatur verkehrt proportional. Wir wollen noch mit σ die Distanz bezeichnen, bis zu welcher sich 2 Moleküle nähern würden, wenn das eine festgehalten wird, das andere aber mit solcher Geschwindigkeit darauf zufliegt, dass seine lebendige Kraft gleich der mittleren lebendigen Kraft eines Moleküls ist. Dann hat man:

$$\frac{K}{4\sigma^4} = \frac{m}{2}\overline{c^2} = \frac{3}{4h}$$

$$\Sigma r f(r) = \frac{2\pi n^2 \sigma^3}{vh} \sqrt[4]{54} \int_0^\infty e^{-x^4} dx$$

$$\frac{p}{\rho} = RT\left(1 + \frac{4\pi n \sigma^3}{v} \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \int_0^\infty e^{-x^4} dx\right),$$

welche Formel bis auf den numerischen Coëfficienten mit Formel 6) übereinstimmt. Doch ist jetzt σ nicht constant, sondern der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur verkehrt proportional.

In dem speciellen Falle, dass die Moleküle elastische Kugeln vom Durchmesser σ sind, wollen wir die Annäherungsrechnung noch um einen Grad weiter treiben. Wir nennen eine um das Centrum eines Moleküls mit dem Radius σ geschlagene Kugel dessen Wirkungssphäre. Wir müssen dann bedenken, dass das Centrum des Moleküls, welches wir bei Ableitung des Verhältnisses $3a$) hervorgehoben, sich bloss in dem Raume befinden kann, der nicht von der Wirkungssphäre irgend eines der übrigen Moleküle erfüllt wird, dass wir also in diesem Verhältnisse vom Volumen v das Volumen aller dieser Wirkungssphären, also, wenn wir n für $n-1$ schreiben, die Grösse $\frac{4\pi n\sigma^3}{3}$ abziehen müssen. Aber auch von dem Raume $\Omega = 4\pi n r^2 dr$ müssen wir alle Theile abziehen, welche von der Wirkungssphäre eines anderen der $n-1$ nicht hervorgehobenen Moleküle bedeckt werden. Wenn die Entfernung der Mittelpunkte zweier Moleküle zwischen ρ und $\rho + d\rho$ liegt, so findet eine solche Überdeckung jedesmal statt, wenn $\sigma < \rho < 2\sigma$, und zwar entfällt dann an jedem Molekül vom Raume Ω der Betrag $2\pi r dr\left(r - \frac{\rho}{2}\right)$, im Ganzen entfällt daher an diesem Molekülpaare vom Raume Ω der Betrag $2\pi r dr (2r - \rho)$.

Nun gibt es nach Formel $3b$), worin, da jetzt keine Wechselwirkung stattfindet, die Exponentielle gleich Eins zu setzen ist, $d\nu = \frac{2\pi n^2}{v}\rho^2 d\rho$ Molekülpaare, für welche die Entfernung der

Mittelpunkte zwischen ρ und $\rho+d\rho$ liegt. Es ist also im Ganzen von Ω der Betrag

$$\int 2\pi r dr(2r-\rho)d\nu = \frac{4\pi^2 n^2 r dr}{v}\int_{\sigma}^{2\sigma}(2r-\rho)\rho^2 d\rho = \frac{11\pi^2 n^2 r^5 dr}{3v}$$

abzuziehen.

Da wir jetzt die Moleküle als elastische Kugeln betrachten, so können diejenigen Werthe des r, für welche überhaupt Wirkung stattfindet, nur sehr wenig von σ verschieden sein; es konnte daher unbedenklich $r=\sigma$ gesetzt werden.

Wenn man die Annäherung um einen Grad weiter treibt, tritt daher an Stelle des Verhältnisses $3a$) das folgende:

$$4\pi n r^2 dr e^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr}\cdot\left(1-\frac{11\pi r^3 n}{12v}\right):v\left(1-\frac{4\pi n\sigma^3}{3v}\right),$$

und an Stelle der Gleichung $3b$) tritt die folgende:

$$dn = \frac{2\pi n r^2 dr}{v}e^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr}\cdot\left(1+\frac{5\pi n\sigma^3}{12v}\right).$$

Diese Gleichung kann genau wie Gleichung $3b$) behandelt werden, da sich ihre rechte Seite nur durch den für die Integration ohnedies constanten Factor $1+\frac{5\pi n\sigma^3}{12v}$ von der rechten Seite der letzteren Gleichung unterscheidet. Es folgt also jetzt, wenn man mit van der Waals

$$\frac{2\pi n\sigma^3}{3}=b$$

setzt, so dass also b die Hälfte des von den Wirkungssphären erfüllten Raumes ist,

$$\Sigma r f(r) = bnm\overline{c^2}\left(1+\frac{5b}{8v}\right)$$

$$pv = \frac{1}{3}nm\overline{c^2}\left(1+\frac{b}{v}+\frac{5b^2}{8v^2}\right),$$

was mit dem zuerst von Jäger[1] gefundenen vollkommen übereinstimmt. Dass derselbe Factor $1+\frac{5b}{8v}$ auch zur Anzahl der Zusammenstoffe hinzutritt, wenn man die Glieder berücksichtigt, welche von der Grössenordnung $\frac{b^2}{v^2}$ sind, hat schon Clausius[2] gezeigt.

2. Theorie der Dissociation.

Wir wollen hier nur den einfachsten Fall der Dissociation betrachten. Wir denken uns in einem Gefässe vom Volumen v lauter gleichbeschaffene Atome, deren Anzahl n sei. Die Masse eines Atoms sei m. Dieselben seien unendlich wenig deformirbare elastische Kugeln vom Durchmesser σ. Da wir keine Vorstellung von der wahren Natur der chemischen Anziehungskraft haben, wollen wir uns ein allerdings nur rohes mechanisches Bild von derselben machen, das aber doch, was die Wirkung betrifft, auf die es hier ankommt, in den Grundzügen eine gewisse Verwandtschaft mit der Wirkungsweise der chemischen Kräfte bieten dürfte. Wir denken uns unmittelbar an einem kleinen Theile der Oberfläche jedes Atoms einen kleinen Raum anliegend, welchen wir den empfindlichen Raum nennen wollen. Die von dem Mittelpunkt eines Atoms nach einem für alle Atome gleich gewählten Punkte des empfindlichen Raumes gezogene Gerade nennen wir die Axe des Atoms. Nur wenn die relative Lage zweier Atome eine solche ist, dass die empfindlichen Räume ineinandergreifen, sollen die beiden Atome Anziehungskräfte aufeinander ausüben, welche für gewisse relative Lagen sehr gross sein sollen und nicht nothwendig die Richtung der Verbindungslinie der Centra der beiden Atome zu haben brauchen. Wir wollen diese Anziehungskräfte kurz die chemischen Kräfte nennen. Grösse und Lage der empfindlichen Räume sollen immer so beschaffen sein, dass niemals drei Atome gleichzeitig chemische Kräfte aufeinander ausüben können. Wir wollen um

[1] Diese Sitzungsber., Bd. 105, II. a, S. 15, Jänner 1896.

[2] Wärmetheorie 3, kinet. Gastheorie, S. 69.

den Mittelpunkt eines Atoms zwei Kugeln schlagen, von denen die eine den Radius Eins hat und die Einheitskugel heissen soll; die andere soll den Radius σ haben und die Wirkungssphäre des Atoms heissen. Unmittelbar derselben anliegend, können wir einen Raum ω construiren von der Beschaffenheit, dass ein zweites Atom nur dann eine chemische Kraft auf das erste ausübt, wenn das Centrum des zweiten Atoms innerhalb des Raumes ω liegt. Dieser Raum ω soll der kritische Bezirk des betreffenden Atoms heissen. Sei $d\omega$ ein Volumelement desselben. Wenn der Mittelpunkt eines zweiten Atoms innerhalb $d\omega$ liegt, so werden beide Atome keineswegs immer chemische Kräfte aufeinander ausüben, sondern nur, wenn die vom Mittelpunkte des ersten Atoms in der Richtung der Axe des zweiten Atoms gezogenen Gerade, deren Schnittpunkt mit der Einheitskugel der Punkt Λ heissen mag, die Oberfläche der Einheitskugel innerhalb eines gewissen Flächenstückes λ trifft, welches wir das zu $d\omega$ gehörige kritische Flächenstück nennen wollen. Liegt der Mittelpunkt des zweiten Atoms innerhalb $d\omega$ und der Punkt Λ innerhalb eines Flächenelementes $d\lambda$ des dazugehörigen kritischen Flächenstückes, so ist dadurch seine Lage relativ gegen das erste Atom völlig bestimmt. Die Arbeit, welche nothwendig ist, um es aus dieser Lage in eine solche zu bringen, wo keine Wirkung mehr stattfindet, sei χ. Diese Grösse wird also im Allgemeinen eine Function sowohl der Lage des Volumelementes $d\omega$ innerhalb des kritischen Bezirkes ω, als auch des Flächenelementes $d\lambda$ innerhalb des dazugehörigen kritischen Flächenstückes λ sein. Der einfachste Fall wird jedoch der sein, dass χ immer einen und denselben Werth hat, sobald die beiden Atome überhaupt chemisch gebunden sind. Wir sagen, die Atome sind chemisch gebunden, wenn sie chemische Kräfte aufeinander ausüben, oder mit anderen Worten, wenn das Centrum des einen Atoms innerhalb irgend eines Volumelementes $d\omega$ des kritischen Bezirkes des anderen und der Punkt Λ innerhalb des dazugehörigen Flächenstückes λ liegt.

Wir heben nun von allen n Gasatomen eins hervor. Von den übrigen $n-1$ seien $2n_2$ an ein anderes chemisch gebunden, n_1 dagegen frei, so dass n_2 Doppelatome und n_1 einfache vor-

handen sind. Es ist dann $2n_2 + n_1 = n - 1$ oder, da eins gegenüber n vernachlässigt werden kann,

$$2n_2 + n_1 = n.$$

Unser hervorgehobenes Atom kann mit keinem den $2n_2$ ohnedies schon gebundenen Atomen chemisch verbunden sein, dagegen mit jedem der n_1 einzelstehenden Atome. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Centrum des hervorgehobenen Atoms in dem Volumelemente $d\omega$ des kritischen Bezirkes irgend eines der einzelstehenden Atome und dabei der Punkt A im Flächenelemente $d\lambda$ des dazugehörigen Flächenstückes liegt, heisse dW'. Die Wahrscheinlichkeit, dass das hervorgehobene Atom einzelsteht, heisse E. Vernachlässigen wir den von den Wirkungssphären erfüllten Raum gegen das gesammte Volumen v des Gefässes, so steht dem Mittelpunkte des hervorgehobenen Atoms, damit es einzelstehe, nahezu der ganze Raum v des Gefässes zur Verfügung. Wären daher die chemischen Anziehungskräfte nicht vorhanden, so hätte man

$$dW' : E = \frac{d\omega\, d\lambda}{4\pi} : v.$$

Vermöge der chemischen Anziehungskräfte aber ist nach Formel 1)

$$dW' : E = e^{2h\chi} \frac{d\omega\, d\lambda}{4\pi} : v.$$

Bezeichnet ferner W' die Wahrscheinlichkeit, dass das hervorgehobene Atom mit irgend einem der n_1 Einzelmoleküle in beliebiger Weise chemisch verbunden ist, so ist

$$W' : E = \frac{n_1}{4\pi} \int\int e^{2h\chi} d\omega\, d\lambda : v,$$

wobei die erste Integration über alle Volumelemente des kritischen Bezirkes eines Atoms, die zweite über alle Flächenelemente des zu $d\omega$ gehörigen kritischen Flächenstückes der Einheitskugelfläche zu erstrecken ist. Da aber die obige Proportion nicht bloss von dem hervorgehobenen, sondern auch von jedem beliebigen anderen Atom gelten muss, so muss

$W':E$ auch das Verhältniss der Zahl der chemisch gebundenen zur Zahl der einzelstehenden Atome sein. Es ist also auch

$$2n_2 : n_1 = \frac{n_1}{4\pi} \int\int e^{2h\chi} d\omega d\lambda : v.$$

Sei nun die Gesammtmasse des Gases eins also $nm = 1$ und setzten wir

$$K = \frac{1}{4\pi m} \int\int e^{2h\chi} d\omega d\lambda = \frac{n}{4\pi} \int\int e^{2h\chi} d\omega d\lambda,$$

so wird

$$n_1 + 2n_2 = n, \qquad n_1^2 K = 2n_2 n v, \tag{7}$$

woraus nach Elimination von n_2 folgt:

$$\frac{n_1}{n} = -\frac{v}{2K} + \sqrt{\frac{v^2}{4K^2} + \frac{v}{K}}.$$

Den Quotienten $\frac{n_1}{n}$ nennen wir den Dissociationsgrad und bezeichnen ihn mit q. Wollen wir diese Grösse als Function des Gesammtdruckes p und der absoluten Temperatur T bestimmen, so bezeichnen wir mit $m_2 = 2m$ die Masse eines Doppelatoms, mit $\overline{c_1^2}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat eines einzelnen, mit $\overline{c_2^2}$ das eines Doppelatoms. Dann ist

$$pv = \frac{n_1 m \overline{c_1^2}}{3} + \frac{n_2 m_2 \overline{c_2^2}}{3}.$$

Bezeichnen wir ferner mit M die Masse eines Moleküls des Normalgases (einatomigen Wasserstoffgases), mit R dessen Gasconstante und mit $\overline{C^2}$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat eines Moleküls desselben bei gleicher Temperatur, so ist

$$m\overline{c_1^2} = m_2 \overline{c_2^2} = M\overline{C^2} = 3MRT = \frac{3}{2h}, \tag{8}$$

daher

$$pv = (n_1 + n_2) MRT = \frac{n + n_1}{2} MRT = \frac{1+q}{2\mu} RT,$$

wobei $\mu = \frac{m}{M}$ das Atomgewicht unseres Gases, bezogen auf das des Normalgases (ein Atom Wasserstoff = eins) ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit der Gleichung 7), welche in der Form

$$q^2 = \frac{v}{K}(1-q).$$

geschrieben werden kann, so folgt

$$q^2 = (1-q^2)\frac{RT}{2\mu Kp},$$

daher

$$q = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\mu pK}{RT}}}.$$

Die Grösse K ist Function der Temperatur. Setzt man für h seinen Werth aus der Gleichung 8), so folgt

$$K = \frac{1}{4\pi m}\int\int d\omega\, d\lambda\, e^{\frac{\chi}{MRT}}.$$

Der einfachste Fall ist der, wo χ für jedes innerhalb ω liegende Volumelement und für jede Lage von $d\lambda$ innerhalb des dazugehörigen kritischen Flächenstückes λ constant ist. Bezeichnen wir dann die Grösse $\frac{n}{4\pi}\int\int d\omega\, d\lambda = \frac{n}{4\pi}\int \lambda\, d\omega$ mit Ω, so wird

$$K = \Omega e^{\frac{\chi}{MRT}}.$$

In diesem Falle ist die Dissociationswärme der Masseneinheit Δ unabhängig von der Temperatur und gleich $\frac{n\chi}{2} = \frac{\chi}{2m}$, daher

$$K = \Omega e^{\frac{2\mu\Delta}{RT}}.$$

Ω und $\frac{2\mu\Delta}{R}$ sind Constanten des betreffenden Gases. Wir sind so aus sehr einfachen Annahmen zu den bekannten Grund-

gleichungen der Theorie der Dissociation der Gase gelangt (vergl. diese Sitzungsber., Bd. 88, S. 861, October 1883). Es hat natürlich nicht die mindeste Schwierigkeit, nach denselben Principien den complicirteren Fall der Dissociation beliebiger Molekülgruppen in beliebige andere zu behandeln, worauf ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen will. Ich werde daselbst auch den Fall behandeln, dass der empfindliche Raum gleichförmig über die ganze Oberfläche des Atoms verbreitet ist, bemerke aber hierüber jetzt schon, dass man in diesem Falle nicht die Gesetze der chemischen Dissociation, vielmehr eher die der Verflüssigung des Gases erhält, da sich dann, sobald einmal eine erhebliche Anzahl von Doppelatomen entsteht, sich sogleich auch zahlreiche Aggregate von noch weit mehr Atomen bilden.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(IV. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Ru und Os)

von

Prof. **Franz Exner**, c. M. k. Akad., und **E. Haschek.**

(Mit 1 Tafel.)

X. Ruthenium.

(Siehe Tafel.)

Dieses Metall haben wir im geschmolzenen Zustande von Heräus bezogen; sein Spectrum ist linienreich und die Linien durch Schärfe ausgezeichnet. Als Verunreinigungen konnten wir Pt, Ir, Rh, Pd, Os, Fe und Ca nachweisen, aber alles nur in sehr geringer Menge. Ältere Messungen des ultravioletten Spectrums liegen nicht vor. Die wenigen Zahlen, welche Lockyer[1] zwischen 4000 und 3900 für das Iridium und Ruthenium gemeinschaftlich angibt, gehören nach unseren Messungen ausschliesslich dem Iridium an. Unsere Messungen umfassen 2244 Linien zwischen $\lambda = 4710 \cdot 0$ AE. und $\lambda = 2251 \cdot 7$ AE. Bezüglich der Controle der Genauigkeit unserer Messung waren wir auf die wenigen (9) erschienenen Eisenlinien angewiesen: Die mittlere Abweichung betrug $0 \cdot 05$ AE. Abweichungen grösser als $0 \cdot 1$ AE. kamen nicht vor. Dabei sind die Zahlen von Kayser und Runge als richtig angenommen.

[1] Lockyer, Phil. Trans. (1881).

λ	i	λ	i	λ	i
3505·9	6+	3453·0	6	3395·3	6
02·5	6	52·1	6	94·0	6+
00·9	6	49·1	5	92·6	4
3499·1	1	46·8	5	92·0	6
98·0	5	46·3	6+	89·6	6
96·1	5	45·3	6	89·3	6
94·2	5	40·4	5	88·8	5
93·2	6+ br.	38·5	5	88·0	5
92·0	6+ br.	37·0	1	87·3	6
90·8	6	35·3	5	86·3	6
90·3	6	33·4	4	85·7	6
88·2	6+	32·9	4	85·2	5
87·7	6	32·5	6	82·3	6
85·6	6+	31·0	4	81·6	6
83·7	6	30·6	6	81·0	6
83·3	5	29·6	5	80·3	5
82·5	6	28·5	1	79·6	5
82·0	6	26·2	6	79·4	6
81·4	4	24·5	6	78·2	6
80·2	5	24·3	6	74·7	5
79·5	5	20·2	6	73·5	6
77·6	6+	20·0	6+	73·3	6 Pd
77·2	6+	18·1	6+	71·8	5
75·0	6	17·4	2	70·1	4
73·8	4	16·7	6	69·7	6
73·4	6	16·4	6	69·3	4
72·7	6	15·6	6	68·5	4
72·4	5	14·7	6	64·8	6
70·0	6	14·5	6	64·1	6
69·5	6	12·8	6	62·3	6
68·1	6+	11·6	5	62·1	5
67·3	6+	10·7	5	61·2	6+
65·5	5	09·4	4	60·0	6
63·2	5	09·2	5	59·3	3
62·1	6	03·7	6+	56·3	6
59·6	6+ br.	02·7	6	55·7	6+
58·3	6+ br.	02·0	4	53·6	6
57·3	6	01·4	6+	53·3	6
56·7	6	3399·4	6	52·6	6
55·6	6+ br.	98·9	5	52·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
3350·3	3	3306·2	5	3266·4	5
48·7	6	05·1	5	66·1	6
48·0	6	04·9	6	64·7	4
47·6	6	04·0	6	63·9	6
45·3	6	01·9	6 Pt	63·7	6
43·2	5	01·6	5	62·5	6+ (Os)
42·7	6	01·1	5	61·7	6
41·7	5	00·0	6+	61·1	6
41·3	6	3299·3	6	60·2	4
40·7	6	98·4	5	60·1	5
40·4	6	98·0	5	59·6	6
39·8	5	97·2	6	59·0	5
39·6	4	96·6	5	58·0	6
38·3	6+	96·1	5	57·7	5
37·8	6	94·2	1	57·2	6
36·6	6	92·1	6+	56·3	6
35·7	5	91·8	6+	55·2	6
32·7	6	91·5	6+	54·6	5
32·1	5	91·0	6	54·5	5
31·2	6	89·3	6+	53·2	5
27·6	6+	86·8	6	52·8	6
25·4	5	85·7	6+ br.	51·7	6+ Pd.
25·0	5	84·5	6	51·4	6
24·6	6+	84·3	5	49·9	5
22·2	6+	82·5	5	48·0	6
21·2	6	81·5	6	47·4	6+
18·8	5	81·2	6	46·2	5
17·9	6	80·5	6	45·6	5
17·5	5 d.	77·6	5	44·4	6+
17·0	6	76·6	6+	43·4	5
16·4	4	75·7	6	42·8	6+ Pd.
15·2	3	74·7	5	42·1	6
12·7	6	73·6	6	41·6	6 Ir
11·0	6+	73·1	5	41·2	5
10·2	6+	72·0	6+	39·5	5+
09·2	6	71·2	6+	38·4	5
08·8	6	70·2	6	35·7	5
08·1	6	68·8	4	35·0	6
07·7	6	68·3	5	34·7	6
06·6	6	67·2	6 Os	34·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
3232·7	6	3198·6	5	3164·0	6
31·5	6	98·5	6	63·1	4
29·7	6	97·7	6	60·6	4
28·5	2	96·5	5	59·9	4
28·1	6	95·6	6	58·7	5
27·8	5	95·1	5	57·5	6
26·8	6	94·8	6	57·3	6
26·4	5	93·5	6	57·1	6
24·9	6	92·5	6 d.	55·4	6
24·7	6	92·1	6	53·7	5
24·0	6	91·7	6	52·2	6
23·2	5	89·9	5	51·3	6
21·9	5	89·7	6	50·5	5
21·3	5 d.	89·2	6	49·7	6
20·1	6	88·8	6	49·3	6
19·4	5	88·5	6	48·7	6+ br.
18·9	6	88·3	4	47·4	4
17·7	5	86·0	5	46·0	6
16·5	6	85·3	5	44·2	6
16·0	6	84·9	6	43·6	4
14·3	6+	84·1	6	43·2	4
13·3	6	83·9	6	41·5	5
13·0	6	83·4	5	40·9	5
12·0	6+ (Ir)	82·0	6	40·4	6
11·3	6	81·4	6	39·5	6 Pt?
10·6	6 Pd?	79·2	5	38·0	6
10·1	6	77·0	1	36·5	6
09·6	6	76·2	6	35·6	4
07·7	5	75·2	4	35·1	5
07·3	5	75·0	4	34·7	4
06·7	5	74·1	6 Os?	33·5	6 Ir
05·3	6	72·6	5	32·6	5
04·0	5	70·0	6	32·5	5
04·2	5	68·5	5	29·7	6
03·6	5	67·4	4	29·5	6
03·0	6	66·4	5	28·8	6+
02·5	6	66·0	5	27·7	4
01·5	5	65·0	5	26·5	4
01·3	4	64·7	6	25·7	6
3199·0	6+ (Ir)	64·1	6	24·6	5

λ	i	λ	i	λ	i
3124·1	6	3088·1	6+ br.	3045·6	5
23·8	5	86·6	5	44·5	6
20·7	5	86·0	6	42·7	6 Ir
18·6	6	84·5	6	42·3	5
18·0	5	83·0	6 d.	41·8	6
16·5	6+	81·7	6	40·2	5
15·5	6+	81·3	5	39·9	6
15·0	6+	80·8	5	38·6	5
14·4	6+	80·1	6	38·1	6
13·8	6 Pd	79·1	6	37·9	6
13·3	6	77·0	5	37·6	6
12·5	6	76·8	6+	37·0	6
12·3	6	75·3	5	36·4	2
11·8	6	73·5	5	35·6	5
11·1	6	73·4	5	35·3	6
10·5	6	72·3	5	33 8	5 d.
09·5	6+ br.	71·5	6	33·4	5
08·3	6+	70·6	6	33·0	6+
07·5	4	70·3	6	32·3	6+
06·7	6	68·2	5	31·9	6
05·2	5	67·5	6	31·5	6
03·3	5	66·4	5	31·1	6
02·5	6	64·7	4	30·7	6 Os?
02·2	6	63·3	6	29·2	6
01·7	6	62·0	6+	28·9	6
01·4	6	60·4	5	27·7	5
00·7	4	60·2	5	27·0	6
3099·8	6	59·1	5	26·7	6
99·3	4	58·6	6	23·7	6
97·9	5	57·2	6+	22·8	6
97·6	5	56·7	3	22·5	6
97·2	6	54·8	5	20·7	5
96·5	4	54·6	6	20·5	6
96·0	6	50·3	6+ br.	19·6	5
94·5	5	49·2	4	19·2	6+
93·8	3	48·7	6	18·3	5+ br. (Os)
91·8	6	48·4	6	17·6	5
90·5	6	47·6	5	17·2	4
89·7	5	47·0	6+	15·8	5
89·2	5	46·1	5	15·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
4128·2	5	4058·2	6+	3996·3	4
27·7	5	54·5	4	88·1	4
26·7	6+	52·6	5	85·1	3
25·3	6+	51·8	3	82·1	6
24·2	6	49·8	6	79·6	4
23·4	5	47·4	6+	78·7	4
21·4	5	46·2	5	74·7	6
15·0	6+	43·5	5+ br.	70·0	6
14·5	6	40·7	6	68·6	5 Ca
13·7	5	39·6	5	65·2	4
13·1	3	38·2	6	62·3	6+ br.
10·0	6	37·0	6	57·7	6
08·2	5	32·8	6+	57·5	6
06·3	6	32·6	5	52·9	5
02·6	5	31·4	5	51·4	6
02·1	5	30·6	6+	50·5	5
00·6	5	28·8	6	50·4	5
4098·2	3	27·0	6+	50·3	5
97·5	5	25·1	6	49·6	6
95·3	6+	24·7	6	48·5	6
91·5	5	24·2	4	46·5	6
88·7	6	23·1	6	45·7	4
85·7	4	22·6	3	44·4	6
83·9	6	21·4	5	43·2	6+ br.
83·2	6	19·9	6 Ir	42·3	6
82·7	6	15·8	6+	42·0	6
81·0	2	14·6	6	38·2	5
79·6	6+	14·1	6	33·7	4 Ca
78·2	6	13·8	6	33·1	6
77·1	4	11·6	6+	32·1	4
74·4	6	10·3	6	27·3	6+ br.
73·4	5	08·6	5	26·1	4
71·8	5	07·8	6	24·9	5
71·5	6	07·0	6	23·7	4
68·8	4	06·0	5	22·5	6+
68·0	5	04·7	6+	21·1	5
64·9	5	03·3	6+	16·7	6+ br.
64·5	5	01·8	6	15·1	5
63·3	5	3998·2	6+	14·5	6+
60·7	6+	96·6	5+	12·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
3911·4	6+	3860·0	6 Fe	3819·2	4
09·3	4	59·8	6	18·5	6 Rh
09·0	5	58·8	6	18·1	6
06·9	6+	57·6	3	17·4	4
06·7	6+	57·2	6	16·9	6
06·3	6	56·6	5	16·3	6
02·4	6+	54·9	6	16·0	6 Fe
01·5	5	53·4	6+	15·0	5
3898·9	6+ (Pt)	52·3	5	14·1	6
98·6	6	51·3	6	13·2	6
97·5	6	50·6	4	12·7	4
96·0	6+ br.	49·6	6	12·0	6
95·1	6+ br.	49·1	6	11·3	6
94·5	6	48·2	6	08·7	5
93·0	6	46·7	5	06·7	6
92·4	4	43·2	6	05·5	5
91·6	6	42·8	6	03·4	5
90·4	5	42·6	6	01·4	6
89·6	6	41·1	5	00·3	4 (Ir)
88·0	6	40·9	5	3799·5	2
87·6	6	39·8	4	99·0	2
86·5	6	38·8	5	98·2	4
84·9	5	38·2	5	95·3	6
84·3	5	36·8	6	95·0	5
82·3	5	36·1	6	93·3	6 Rh
81·0	6	35·2	5	90·6	2
80·2	6+ br.	32·3	6 Pd	89·8	6
79·2	5	31·8	4	88·8	6
76·7	6	31·0	6	88·0	6 Fe
76·2	6	30·4	6	86·2	2
73·6	5	29·5	6	84·4	6
71·4	6	28·8	5	83·5	6
71·0	6	28·0	6 Fe	82·8	5
70·8	6	27·5	6	81·3	4
68·0	3	26·3	6	80·1	6
65·6	5	25·1	4	78·9	5
63·8	6+ br.	24·5	6 Fe	78·0	5+
62·8	3	22·2	4	77·7	4
62·0	6	20·5	6 Fe	74·6	6
60·8	5	19·8	6	73·4	6

λ	i		λ	i		λ	i	
3771·3	6+	br.	3727·2	1		3682·5	6+	
70·0	6+		26·3	4		81·8	6+	
69·3	6		25·6	6	Ir	81·0	6+	
67·5	4		25·1	5		78·4	5	
66·0	6		24·2	6		78·2	6+	
64·3	6		22·9	6		77·1	6	
64·0	6	Fe	22·3	6		76·7	6	
62·7	6	d.	19·5	4		76·4	6	
61·7	4		18·5	6		75·7	6	
60·2	4		17·8	5		75·4	6	
60·0	4		17·2	4		72·5	6	
58·5	6		16·4	5		72·3	6	
57·8	6		15·7	5		71·3	6	
57·4	6+		15·0	6+		69·7	3	
56·0	3		13·6	6		68·9	6	
55·2	5		12·5	5		67·1	6	
53·6	4		11·2	6		65·4	6+	
53·0	6		10·5	6		64·1	6	
52·0	6		09·4	6		63·5	4	
50·6	6		08·2	6		61·6	1	
47·1	6		05·5	6		61·0	5	
46·4	6		03·4	6		60·2	5	
45·7	3		03·1	6		59·0	6	
44·6	4		02·5	6		57·7	4	
44·4	4		02·0	6+		57·4	6+	
43·5	6		01·4	6		56·7	6	
43·0	3		01·2	5		54·6	4	
42·8	3		00·5	6		53·9	6	
40·5	6		3698·0	5		53·0	6	
39·6	4		96·7	5		52·5	6	
39·1	5		96·0	6		50·5	4	
38·8	6	Pd	94·1	6		50·0	6	
37·5	5		93·7	6		48·0	6	Fe
35·0	5		92·5	6	Rh	47·5	6	
34·6	5		91·1	6		46·3	5	
34·0	6+		90·2	4	(Pd)	41·3	6	
33·3	6		87·5	6		40·7	5	
31·0	5		86·6	6		38·2	5	
30·6	1		86·1	6		37·6	4	
28·3	1		83·5	6+		37·0	6	

λ	i	λ	i	λ	i
3635·6	5	3590·7	6	3550·7	6
35·1	2	89·4	2	50·4	5
34·1	5	87·3	4	49·8	6
32·6	6	85·5	6	48·6	6
31·9	5	85·3	6	47·1	6
31·7	6+ (Fe)	85·0	6	45·9	5 + br.
28·8	6+ (Ir)	84·3	5	42·7	6
28·1	6+	81·4	6 Fe	41·7	5
27·5	5	79·8	5	41·1	6
26·8	4	78·7	6	40·9	6
25·4	4	77·6	6	40·3	6
23·8	5	77·1	5 d.	39·4	3
20·4	5	75·1	6	38·0	4
19·4	5	74·7	5	36·7	5
18·8	6+ (Fe)	73·8	6 Ir	36·0	5
17·2	6	73·3	6	35·5	5
15·4	6+	72·1	6	32·9	4
14·5	6	71·9	6	31·5	5
13·3	6+	70·7	3	29·4	5
12·6	6	68·6	6	28·7	5
11·6	6+	68·3	6	27·3	6
10·8	6	67·3	5	26·6	6
09·6	6 Pd	66·6	5	26·4	6
09·3	6	65·5	6 Fe	25·7	6+
08·9	5	65·0	6	24·6	5
06·6	6	64·7	5	24·0	5
06·3	6	64·6	5	22·4	6
05·8	5 Ir	63·7	6	22·2	6
03·3	6	63·3	6	20·2	4
02·6	6	62·7	6	19·7	4
01·7	5	62·1	5	19·1	6
00·8	6	61·7	6	16·0	6+ d.
00·0	2	61·2	6	15·2	6+
3599·0	6	60·8	5 Os	14·6	4
97·5	6	60·0	6	13·0	6
96·4	2	59·8	6	11·5	6
95·8	6	57·2	6	10·5	6+
93·2	2	57·0	6	09·3	4
91·7	6	56·8	5	07·3	6+
91·0	6	53·9	5	06·9	6+

λ	i	λ	i	λ	i
3505·9	6+	3453·0	6	3395·3	6
02·5	6	52·1	6	94·0	6+
00·9	6	49·1	5	92·6	4
3499·1	1	46·8	5	92·0	6
98·0	5	46·3	6+	89·6	6
96·1	5	45·3	6	89·3	6
94·2	5	40·4	5	88·8	5
93·2	6+ br.	38·5	5	88·0	5
92·0	6+ br.	37·0	1	87·3	6
90·8	6	35·3	5	86·3	6
90·3	6	33·4	4	85·7	6
88·2	6+	32·9	4	85·2	5
87·7	6	32·5	6	82·3	6
85·6	6+	31·0	4	81·6	6
83·7	6	30·6	6	81·0	6
83·3	5	29·6	5	80·3	5
82·5	6	28·5	1	79·6	5
82·0	6	26·2	6	79·4	6
81·4	4	24·5	6	78·2	6
80·2	5	24·3	6	74·7	5
79·5	5	20·2	6	73·5	6
77·6	6+	20·0	6+	73·3	6 Pd
77·2	6+	18·1	6+	71·8	5
75·0	6	17·4	2	70·1	4
73·8	4	16·7	6	69·7	6
73·4	6	16·4	6	69·3	4
72·7	6	15·6	6	68·5	4
72·4	5	14·7	6	64·8	6
70·0	6	14·5	6	64·1	6
69·5	6	12·8	6	62·3	6
68·1	6+	11·6	5	62·1	5
67·3	6+	10·7	5	61·2	6+
65·5	5	09·4	4	60·0	6
63·2	5	09·2	5	59·3	3
62·1	6	03·7	6+	56·3	6
59·6	6+ br.	02·7	6	55·7	6+
58·3	6+ br.	02·0	4	53·6	6
57·3	6	01·4	6+	53·3	6
56·7	6	3399·4	6	52·6	6
55·6	6+ br.	98·9	5	52·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
3350·3	3	3306·2	5	3266·4	5
48·7	6	05·1	5	66·1	6
48·0	6	04·9	6	64·7	4
47·6	6	04·0	6	63·9	6
45·3	6	01·9	6 Pt	63·7	6
43·2	5	01·6	5	62·5	6+ (Os)
42·7	6	01·1	5	61·7	6
41·7	5	00·0	6+	61·1	6
41·3	6	3299·3	6	60·2	4
40·7	6	98·4	5	60·1	5
40·4	6	98·0	5	59·6	6
39·8	5	97·2	6	59·0	5
39·6	4	96·6	5	58·0	6
38·3	6+	96·1	5	57·7	5
37·8	6	94·2	1	57·2	6
36·6	6	92·1	6+	56·3	6
35·7	5	91·8	6+	55·2	6
32·7	6	91·5	6+	54·6	5
32·1	5	91·0	6	54·5	5
31·2	6	89·3	6+	53·2	5
27·6	6+	86·8	6	52·8	6
25·4	5	85·7	6+ br.	51·7	6+ Pd.
25·0	5	84·5	6	51·4	6
24·6	6+	84·3	5	49·9	5
22·2	6+	82·5	5	48·0	6
21·2	6	81·5	6	47·4	6+
18·8	5	81·2	6	46·2	5
17·9	6	80·5	6	45·6	5
17·5	5 d.	77·6	5	44·4	6+
17·0	6	76·6	6+	43·4	5
16·4	4	75·7	6	42·8	6+ Pd.
15·2	3	74·7	5	42·1	6
12·7	6	73·6	6	41·6	6 Ir
11·0	6+	73·1	5	41·2	5
10·2	6+	72·0	6+	39·5	5+
09·2	6	71·2	6+	38·4	5
08·8	6	70·2	6	35·7	5
08·1	6	68·8	4	35·0	6
07·7	6	68·3	5	34·7	6
06·6	6	67·2	6 Os	34·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
3232·7	6	3198·6	5	3164·0	6
31·5	6	98·5	6	63·1	4
29·7	6	97·7	6	60·6	4
28·5	2	96·5	5	59·9	4
28·1	6	95·6	6	58·7	5
27·8	5	95·1	5	57·5	6
26·8	6	94·8	6	57·3	6
26·4	5	93·5	6	57·1	6
24·9	6	92·5	6 d.	55·4	6
24·7	6	92·1	6	53·7	5
24·0	6	91·7	6	52·2	6
23·2	5	89·9	5	51·3	6
21·9	5	89·7	6	50·5	5
21·3	5 d.	89·2	6	49·7	6
20·1	6	88·8	6	49·3	6
19·4	5	88·5	6	48·7	6+ br.
18·9	6	88·3	4	47·4	4
17·7	5	86·0	5	46·0	6
16·5	6	85·3	5	44·2	6
16·0	6	84·9	6	43·6	4
14·3	6+	84·1	6	43·2	4
13·3	6	83·9	6	41·5	5
13·0	6	83·4	5	40·9	5
12·0	6+ (Ir)	82·0	6	40·4	6
11·3	6	81·4	6	39·5	6 Pt?
10·6	6 Pd?	79·2	5	38·0	6
10·1	6	77·0	1	36·5	6
09·6	6	76·2	6	35·6	4
07·7	5	75·2	4	35·1	5
07·3	5	75·0	4	34·7	4
06·7	5	74·1	6 Os?	33·5	6 Ir
05·3	6	72·6	5	32·6	5
04·0	5	70·0	6	32·5	5
04·2	5	68·5	5	29·7	6
03·6	5	67·4	4	29·5	6
03·0	6	66·4	5	28·8	6+
02·5	6	66·0	5	27·7	4
01·5	5	65·0	5	26·5	4
01·3	4	64·7	6	25·7	6
3199·0	6+ (Ir)	64·1	6	24·6	5

λ	i	λ	i	λ	i
3124·1	6	3088·1	6+ br.	3045·6	5
23·8	5	86·6	5	44·5	6
20·7	5	86·0	6	42·7	6 Ir
18·6	6	84·5	6	42·3	5
18·0	5	83·0	6 d.	41·8	6
16·5	6+	81·7	6	40·2	5
15·5	6+	81·3	5	39·9	6
15·0	6+	80·8	5	38·6	5
14·4	6+	80·1	6	38·1	6
13·8	6 Pd	79·1	6	37·9	6
13·3	6	77·0	5	37·6	6
12·5	6	76·8	6+	37·0	6
12·3	6	75·3	5	36·4	2
11·8	6	73·5	5	35·6	5
11·1	6	73·4	5	35·3	6
10·5	6	72·3	5	33 8	5 d.
09·5	6+ br.	71·5	6	33·4	5
08·3	6+	70·6	6	33·0	6+
07·5	4	70·3	6	32·3	6+
06·7	6	68·2	5	31·9	6
05·2	5	67·5	6	31·5	6
03·3	5	66·4	5	31·1	6
02·5	6	64·7	4	30·7	6 Os?
02·2	6	63·3	6	29·2	6
01·7	6	62·0	6+	28·9	6
01·4	6	60·4	5	27·7	5
00·7	4	60·2	5	27·0	6
3099·8	6	59·1	5	26·7	6
99·3	4	58·6	6	23·7	6
97·9	5	57·2	6+	22·8	6
97·6	5	56·7	3	22·5	6
97·2	6	54·8	5	20·7	5
96·5	4	54·6	6	20·5	6
96·0	6	50·3	6+ br.	19·6	5
94·5	5	49·2	4	19·2	6+
93·8	3	48·7	6	18·3	5+ br. (Os)
91·8	6	48·4	6	17·6	5
90·5	6	47·6	5	17·2	4
89·7	5	47·0	6+	15·8	5
89·2	5	46·1	5	15·3	5

λ	i	λ	i	λ	i
3014·5	6	2984·7	6	2948·7	6
14·3	6	82·0	5	48·2	6
13·3	6	80·8	5	47·7	6
12·0	6+ br.	80·6	6 Pd	47·0	5
10·3	5	79·9	3	45·6	1
09·2	6	79·6	3	45·0	5
08·7	6	78·5	4	43·9	6
08·2	6	77·4	5	42 2	4
07·8	6	77·2	4	41·6	6
07·2	6	76·8	5	41·0	6+
06·6	4	76·5	1	40·3	6
05·8	6	74·7	6	39·8	6
05·1	5	74·4	6	39·0	6+
04·6	6	73·7	5	37·0	6
02·4	5+ br.	73·3	6	35·5	5
01·6	6	73·0	5	33·2	4
01·0	6	72·4	6	32·6	6
00·3	5	70·9	6	31·2	5
2999·6	5	70·6	6	29·6	6
98·7	3	70·5	6	29·1	6
98·2	5	68·8	5	28·5	6
98·0	6	67·9	6	27·6	3
97·6	6	66·3	5	26·5	6
97·4	6	65·6	2	25·5	6
96·6	6	65·2	5	23·9	5
96·2	6	63·4	4	23·1	6
95·8	6	62·0	5+	22·3	5
94·7	5	60·2	5	21·8	6
94·5	6	59·6	6+	20·5	6
93·6	6	55·0	6	19·6	6
93·1	5	54·7	6	18·5	5
92·5	6	54·4	5	17·9	6
92·0	5	54·0	5	17·5	6
91·5	2	52·6	6	16·4	3
90·0	6+	52·2	5	14·3	6
89·4	6+	51·3	6+ br.	14·0	5
88·8	4	50·5	6+ br.	13·5	6
88·0	6+ br.	50·0	6	13·3	6
86·5	5+ br.	49·5	6	13·0	6
85·5	6	49·2	6	10·0	4

λ	i	λ	i	λ	i
2909·5	6	2883·3	6	2860·2	5
09·1	5 Os?	82·4	3	60·0	5
08·0	6+ br.	81·5	6	59·9	5
07·1	6+ br.	81·0	6	59·6	6+
06·6	6	80·6	5	59·1	6+
06·3	6	80·3	5	58·0	5
05·9	6	80·0	5	57·4	6
04·7	6+	79·3	5	56·7	5
03·7	6	78·3	6 Pd	56·3	6
03·3	6	78·1	6+	56·1	6
03·0	6	77·5	6	55·9	6
02·8	6	77·3	6	55·5	6
02·3	4	76·9	6	55·1	6
01·8	5	76·6	6	54·9	5
00·7	5	76·3	6	54·3	5
2899·9	6	75·8	6	53·3	5
99·7	5	75·5	6	52·7	6
98·7	6	75·2	5	52·4	6
98·5	5	74·7	6	50·8	5
98·0	5	73·9	5	50·3	6+
96·7	6	73·5	5	49·7	5
95·9	6+	72·5	6	49·4	5
94·0	6	71·8	5	48·8	5
92·8	5	71·7	5	47·8	6
92·5	6	70·8	5	47·3	6
92·2	6	70·6	6+ br.	46·9	6
91·9	6	69·1	6	46·7	6
91·5	6	68·5	5	46·5	6
90·7	6	67·3	6	45·8	6 Rh
89·9	6+	66·9	5	44·9	5
89·6	6	66·6	5	43·9	6
88·8	6	66·4	5	43·4	6
88·2	6	65·7	5	43·0	6
87·3	6	63·5	5	42·8	6
86·7	5	63·1	5	41·9	3
85·6	6	62·5	6+	41·3	5
85·1	6	62·0	6	40·8	5
84·7	5	61·6	5	39·9	6
84·5	6	61·3	6	39·6	6
83·8	5	61·1	6	39·1	5

λ	i	λ	i	λ	i
2838·9	6	2815·2	6	2789·6	6
38·0	6	14·7	5	88·8	5
36·7	6	13·9	4	88·5	6
36·5	6	13·5	4	88·0	3
36·4	6	13·0	6	87·5	5
35·5	6+	12·9	6	86·5	6
34·2	6	12·2	6	86·0	4
34·0	5	11·8	6	85·3	5
33·3	6 Ir	10·9	3	84·6	5
32·9	6	10·5	6	83·9	5
32·1	5	10·3	5	83·0	6
30·8	6	08·5	6	82·4	5 d.
30·3	6	07·7	5	81·0	5+ d.
30·1	6	07·5	5	80·5	6
29·6	6	07·0	4	80·0	6
29·4	5	06·5	6+ br.	79·6	5
28·1	5	05·1	5	79·2	5
27·8	6	04·0	6	78·6	3
27·7	6	03·7	6	78·2	6
27·3	6	03·4	6	77·8	5
26·9	5	03·1	5	77·6	5
26·7	6	02·4	5	76·5	6
26·4	5	01·6	6	75·9	6+
25·6	5	01·2	6	75·7	4
25·3	5	00·7	6	75·3	6
24·3	6+	00·6	6	75·2	6
23·4	5	2799·7	6	74·7	5
22·9	6	99·4	6	74·4	6
22·7	4	99·0	5	73·2	6
22·3	6	97·9	6	72·9	6
21·6	4	97·3	6	72·6	4
20·8	6+	96·6	6	72·2	6
19·2	6	96·2	6	72·1	6
18·6	5	95·7	6	71·6	6
18·2	6	95·6	5	71·3	5
17·7	5	94·4	5	70·9	6
17·3	5	93·2	6	70·5	6
16·7	6+ br.	92·4	5	69·2	3
15·9	6	91·3	6	67·7	6
15·6	6	90·3	5	67·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
2767·1	6	2749·4	5	2730·7	5
66·7	5	49·2	5	30·5	6
66·1	5	48·7	6	29·5	6
65·7	4	48·3	6+	28·9	6
65·4	4	48·1	4	27·4	6+
65·0	6	47·7	6	27·1	5
69·2	6	47·1	6+	26·6	6
63·6	5	46·8	5	25·6	2
63·3	6	46·2	5	25·0	3
62·9	6	46·0	4	24·2	6
62·4	6	45·3	4	24·0	6
62·2	6	44·7	4	23·6	6
61·7	6	44·1	3	23·3	5
61·5	6+	43·7	4 d.	22·8	5
60·9	5	43·3	6+	22·6	6
60·2	6	42·6	5	21·7	5
59·8	6	42·2	6	21·3	5
59·3	6	41·7	6+	20·4	6
59·0	5	41·5	6	19·8	5
58·5	6	41·4	6+	19·7	5
58·0	6	40·7	5	19·0	6
57·5	6	40·3	5	18·0	5
57·1	6	39·8	6+	17·6	3
56·7	6	39·4	5 d.	16·8	5
56·6	6	39·1	6	16·3	5
56·5	6	38·9	6	15·6	6
56·0	6	38·3	6	15·3	6+ (Rh)
55·9	6	38·0	5	14·3	6+
55·5	6	37·8	5	14·0	6
55·3	5	37·0	4	13·7	5
54·3	6	36·6	5	13·2	5
53·6	5	35·9	5	12·5	2
52·9	4	34·5	2	11·9	6
52·6	4	33·7	6	11·2	6+
52·3	5	33·2	6	10·3	5
51·9	6	32·8	6	10·0	6
51·6	6	32·5	6 Ir?	09·3	5
51·0	6	32·1	6	09·1	6
50·6	6	31·5	6	08·7	5
49·7	5	31·1	6	08·4	6

λ	i	λ	i	λ	i
2708·2	6	2685·8	6	2654·7	6
07·5	6+	85·4	6	54·2	5
07·4	5	84·9	6	53·2	5
06·6	6	84·3	6 Rh	52·7	6
05·6	6+ (Rh)	82·9	6+	52·3	6
04·9	6+	81·5	6	52·0	6
04·7	5	80·7	5	51·7	6 Rh?
04·4	6	80·0	6	51·5	6
04·0	6	79·7	6	50·6	6+
03·7	6	79·0	1	50·4	6
03·0	6	78·3	6	50·2	6
02·8	6	77·5	6	49·7	6
02·2	6	77·0	6	49·0	4
01·5	5	76·4	5	48·1	6
01·2	5	75·7	5	47·5	6
00·8	6	75·2	5	47·0	6
00·3	5	74·4	5	46·1	5
00·0	6	73·7	6 d.	45·3	6
2699·5	6	73·2	5	44·7	5
99·0	6	72·6	5	43·7	6+
98·5	6 Pt?	72·5	5	43·3	5
97·8	6	70·7	5	43·1	5
97·4	5	69·6	5	42·5	6
96·7	6	68·7	6	42·3	6
94·8	6	68·1	5	41·7	5
94·5	6	67·6	4	39·7	5
94·3	6	65·4	6	39·3	6
93·9	6	65·1	6	38·6	6
93·6	6	63·6	6	38·5	6
92·3	1	63·0	5	38·2	6
90·4	6	62·3	5	36·9	6
90·2	6	62·0	4	36·7	5
89·6	6	61·5	4	36·0	5 Pd
89·2	6	60·8	6	35·4	5
88·4	5	59·8	5	34·9	6
87·7	5	59·5	6+	34·0	5
87·3	5	58·4	6	33·7	6
87·1	5	57·3	5	32·9	5
86·5	5	56·5	4	32·5	6
86·1	6	55·1	5	32·4	6

λ	i	λ	i	λ	i
2631·7	6	2612·2	5	2589·0	6 d.
31·5	6	12·0	6	88·1	6
31·3	5	11·6	5	87·0	6+
30·2	5	11·2	6	86·0	6+ (Ir)
29·5	6	10·2	5	85·6	6+
28·9	5	09·6	6	84·4	6+
28·3	6 Pd?	09·2	5	83·2	5
28·0	6	08·5	6	83·1	6
27·5	6	08·0	5	82·7	6
26·5	5	07·0	6	82·1	6
26·1	6	06·4	5+	81·6	6
25·6	6	06·0	6	81·3	6
25·5	5	05·5	6	81 0	6
25·2	6	04·3	5	80·6	6
24·9	6	03·4	6+	80·4	6
24·3	6	03·0	6	79·8	6 d.
23·7	6+ br.	02·4	5	79·3	5
23·1	6	01·6	5	78 8	6
22·9	6	00·7	6	78·4	6
22·4	6+	00·5	6	77·5	6
21·9	6	2599·9	6	77·2	6
21·4	6	99·6	6	76·3	5
21·2	6	99·5	6	75·7	6+ br.
20·8	5	99·0	5	74·8	6
20·2	6	98·6	6	74·3	6
19·8	6	98·1	5	73·6	5
19·5	5	97·7	6	73·3	6
19·2	6	97·3	5	73·0	6
18·0	6	96·0	5	72·7	6+ br.
17·6	6	95·1	6	71·3	5
17·2	5	94·6	6	70·8	6
16·5	6	93·9	6+	70·5	6
15·7	6	93·6	6+	70·0	6
15·2	5	93·3	6+	69·8	6
15·0	5	93·1	6+	69·5	6
14·8	6+ (Pd)	92·3	6	69·1	5
14·2	6+	91·5	5	68·2	6
14·0	6+	91·3	5	67 7	6
13·4	6+ d.	89·9	6	66·8	5
12·6	5	89·6	5	66·5	5

λ	i		λ	i		λ	i	
2566·1	6		2545·1	6+		2513·4	4	
65·8	5		44·4	5		13·0	6	
65·5	6	Pd	43·5	2		12·7	6	
65·1	6		42·3	5+		11·7	6	
64·9	6		41·6	6		11·4	6+	
64·2	5		41·0	6		09·6	6	
63·8	6		40·5	4		09·2	6	
63·5	6		39·9	4		08·8	4	
63·2	6		38·1	6+		08·4	6	
62·8	6		37·6	6		07·1	3	
62·4	6		35·7	5		06·6	5	
61·7	6		35·5	5		06·5	6	
61·4	6		35·1	5		06·1	6	
61·1	6		34·2	5		05·8	6	Pd
61·0	6		33·6	6		05·5	6	
60·5	6		33·3	6		05·1	6	
60·1	6		30·6	5		03·4	6	
59·7	5		30·2	6		03·0	6	
58·7	6		29·7	6		02·5	6	
58·2	6		28·1	4		02·1	5	d.
57·9	6		27·2	6+		01·7	6	
57·3	5		27·1	6		00·3	5	
56·9	5		25·6	5+	(Ir)	2499·9	6	
56·2	5		25·0	5		99·5	6	
55·9	6+		24·6	6		99·2	6	
55·0	6+		23·9	6		98·7	5	Pd
54·5	6		23·3	6		98·6	5	
53·6	6+	br.	22·8	6		98·1	6	
52·9	6		22·5	6		97·0	6	
52·2	4		21·9	6		96·1	6	
51·7	6	Pd	21·0	5		95·8	5	
51·4	6		20·8	6		94·6	5	
50·0	5		19·4	4		94·3	6	
49·6	6		18·6	4		93·8	4	
49·3	5		17·5	4		92·9	6	
49·0	6		16·9	5		92·3	6	
48·1	6		16·2	6+		92·1	6	
47·8	5		15·8	6		91·6	5	
47·0	5		15·5	6		91·4	6	
45·8	6		14·3	6+	(Pd)	91·2	5	

λ	i	λ	i	λ	i
2490·7	6 Rh	2466·4	6+ br.	2439·7	5+
89·5	5	65·7	6	39·3	6
88·7	5 Pd	65·5	6	39·0	6
88·3	6	65·1	6	38·8	6
88·1	6	64·9	5	38·5	6
87·7	6	64·0	6	37·3	6
87·3	6	63·1	6	37·1	6
86·7	6+ (Pd)	62·8	6	36·6	6
86·3	6	62·3	6	36·3	6
86·0	6	61·7	6	35·6	4
84·2	5	61·5	6	35·1	5
83·7	6	60·1	6	34·0	6+
83·3	6	59·6	6	33·2	6+
83·0	5	59·4	6	33·0	6
82·0	6	58·8	6 Rh	32·3	5
81·3	4	57·4	6	31·6	6
81·0	5	56·8	4	30·8	6
80·3	6	56·7	4	30·5	5
79·1	3	55·7	4	29·6	6
78·5	5	54·9	6+	29·4	6
78·2	6	54·4	6	29·1	6
77·4	5	54·0	5	29·0	6
77·1	6	52·6	6+	27·8	5
76·6	6	51·4	5	27·2	6
76·4	6	51·1	5	26·7	6
75·0	5	50·7	6	26·0	6+ br.
74·2	6	50·6	6	25·7	6+ br.
74·0	6	49·6	5+	24·6	6
73·8	6	49·0	6	23·7	6+
73·0	5	48·4	6	23·0	5
72·6	6	47·6	6	22·4	5
71·8	6+ br.	46·9	6	21·4	6
71·3	6	46·7	6	20·9	6
70·7	5	45·0	6+	20·3	6
70·0	5	44·5	6+	20·2	6
68·8	6	44·2	6	20·0	6
68·5	6	43·4	5+ br.	19·1	6
67·7	6	41·6	6	18·6	6
67·5	6	41·4	6	18·3	6
67·3	6	40·9	5	17·1	5

λ	i	λ	i	λ	
2415·8	5	2391·8	6	2353·2	5
15·4	5	91·4	6	51·6	6
14·9	5	90·6	6	51·3	6
14·0	5	90·4	6	50·7	6
13·5	5	90·1	6	46·6	6
12·9	6	88·5	6	46·0	6
12·6	6	88·3	6+	44·7	6
12·1	6	84·3	6	43·6	6
11·7	6	83·7	5	43·1	4
11·5	6	83·0	6	42·7	5
11·2	6	82·3	4	40·8	6
10·8	6	81·5	6	40·2	6
10·3	5	81·2	6	39·4	6
10·0	6	81·0	6	38·9	6
09·7	6	80·8	6	38·1	6
08·7	5	80·1	5	37·0	5
07·6	6	79·9	5	36·1	6
07·1	6	77·6	6+ br.	34·5	6
06·9	6	76·6	5	34·1	5
05·5	6	76·0	4	33·8	5
05·4	6	75·6	6	32·5	6+
05·1	6	75·3	6	31·9	6
04·9	6	75·1	6	31·3	5
04·6	6	74·3	6	29·2	5
03·0	2	72·2	5	28·5	6
01·3	6	70·4	5	28·1	6
00·7	6+ d.	70·2	6	20·0	5
00·3	6	68·7	6+ d.	18·7	6
2398·0	5	68·2	6 Ir	13·6	6
97·2	5	67·5	5	09·3	6
97·0	4	64·6	6	08·8	6
96·0	6+	64·3	6+	08·6	6
95·6	6	63·7	6+	08·1	6+
95·3	6	62·9	6	05·7	5
95·0	6	62·7	6	2298·7	6
94·2	5	62·3	6	97·5	6
93·7	6	60·8	6+	94·6	6
93·3	6	59·3	5	94·2	6
92·7	5	59·0	4	87·2	5
92·1	5	58·2	3	83·2	6

λ	i	λ	i	λ	i
2281·8	5	2278·7	6+	2261·1	6
81·7	6	72·3	6+	51·7	6
79·7	6	68·3	6		
79·4	6+	63·6	6		

XI. Osmium.

Das Osmium, gleichfalls von Heräus bezogen, stand uns nur in Pulverform zur Verfügung; um es als Elektrodenmaterial verwenden zu können, wurde es mit chemisch reinem Zink, dessen Spectrum wir vorher untersucht hatten, legirt. Es hat dies allerdings den Übelstand, dass viele, namentlich schwächere Linien des Osmiums, verdeckt werden können, es stand uns aber eine bessere Methode zur Untersuchung des Spectrums nicht zur Verfügung. An Verunreinigungen fanden wir Fe und Pb deutlich und spurenweise Ba, Ca, Cu, Pt, Rh und Pd. Für die Genauigkeit unserer Messung haben wir hier eine ausgezeichnete Controle nicht nur in den zahlreichen Eisenlinien, sondern auch durch die jüngst erschienene Tafel einiger Wellenlängen der Osmiumlinien von H. A. Rowland und R. R. Tatnall.[1] Die Vergleichung unserer Zahlen mit denen von Kayser und Runge für 67 Eisenlinien, sowie mit denen von Rowland und Tatnall für 132 gemeinsame Osmiumlinien ergibt in beiden Fällen eine mittlere Abweichung von 0·03 AE., wobei Abweichungen grösser als 0·1 nicht vorkommen. Auf eine Reproduction des Osmiumspectrums haben wir verzichtet, da durch die übergelagerten Zinklinien der Charakter desselben doch ganz unzutreffend wiedergegeben würde.

An älteren Messungen im ultravioletten Spectrum liegen nur von Lockyer[2] einige Zahlen zwischen 4000 und 3900 AE.

---

[1] H. A. Rowland und R. R. Tatnall, Astrophys. Journ., 2 (1895).
[2] Lockyer, Phil. Trans. (1881).

vor. Dazu kommen die oben erwähnten Messungen von Rowland und Tatnall. Beide beziehen sich nur auf das Bogenspectrum. Messungen des Funkenspectrums fehlen gänzlich. Die Zahl der von uns gemessenen Linien beträgt 1400 zwischen $\lambda = 4696 \cdot 8$ und $\lambda = 2204 \cdot 5$ AE.

λ	i	λ	i	λ	i
4696·8	6+	4484·3	6	4353·7	6
92·2	6+	80·0	6	38·9	5
70·6	6+	66·2	6+	28·8	3
67·5	6+	62·5	6	26·4	5
64·1	6	59·7	5	25·9	6 Fe
32·0	6	58·5	6	22·9	6
16·9	6	47·5	5	12·4	6
4597·3	6+	45·8	6	11·6	2
95·2	6+	39·8	6	09·1	6
88·1	6	37·3	6	08·1	6 Fe
79·3	6	36·5	5	07·9	6
72·9	6+	36·0	6	05·5	6
66·6	6	32·6	5	00·0	6 d.
57·7	6+	24·7	6+ br.	4298·6	6+
56·9	6	23·7	6	97·6	6+
54·2	1 Ba	20·6	1	96·4	6
51·5	5	05·0	6	94·1	1
50·6	2	04·3	6	93·1	6+
48·8	6	02·8	5 Ba	92·0	6+
46·2	6+	00·7	6+	86·1	5
45·2	6	4397·5	5	84·6	6+ br.
40·1	6	95·1	2	81·5	6
37·8	6	91·3	5	77·4	6
29·9	6	90·0	6+	75·2	6
25·1	6	86·5	6	72·0	6
23·5	6+ br.	85·1	6+	71·0	6
20·5	6	83·7	6 d. (Fe)	69·9	6
20·2	6	77·0	6	69·7	6
19·1	6	70·8	5	65·0	5
11·0	6+ br.	65·8	4	64·6	6
01·1	6	61·2	6+	61·0	1
4490·3	6+	58·3	5+ d.	52·7	6+
88·7	6	56·6	6	51·4	6+
84·9	5	54·6	6	33·6	5

λ	i	λ	i	λ	i
4226·8	5 d. (Ca)	4129·1	6 Rh?	4030·8	6+
19·9	6+	27·5	6	29·7	6+
19·0	6	26·2	6	24·0	6+
15·4	6	25·5	6	22·9	6+
14·0	5	24·8	5	20·6	6+
12·0	1	15·0	6+ br.	19·7	6+ Pb
08·1	6+	12·2	2	18·4	5
05·4	6+	09·3	6+	15·2	6
04·8	6+	08·0	6+	15·1	6
02·2	5 d. (Fe)	06·3	6	12·6	6+ br.
01·5	5	00·5	5	11·0	6
4195·4	6	4098·3	6	05·3	5 (Fe)
94·5	6	92·0	4	04·2	5
93·0	6+	91·0	6	03 6	5
92·5	6	88·6	6	01·4	6+ br.
90·1	5	84·8	6+	3999·2	6
84·4	5	74·9	5	98·2	6+
82·6	6+	73·8	6	88·3	6
80·4	6+	71·7	6	85·6	6
75·8	2	71·2	5	79·5	6+
75·0	6	66·9	1	77·3	4
73·4	6	62·8	6+	75·5	6
72·7	5	62·3	6+ Pb	71·5	6
66·5	6	60·9	6	71·6	6
66·0	6	58·0	1 Pb	69·8	6
65·0	6	55·6	6	68·6	2 Ca
61·1	6	53·9	6	66·6	6
60·5	6	53·4	6	65·1	6
60·2	6	51·6	6	63·8	3
59·0	5	50·7	6	61·2	5
51·0	6	50·3	6	60·6	6
48·4	6	48·3	6	59·0	6+ (Rh)
47·5	6	46·0	6 Fe	58·0	6
38·9	6	42·1	5	53·5	6
38·0	5	39·6	6	53·0	6
35·9	1	38·8	6	49·9	6
35·0	6	37·9	6	49·3	6+
32·3	6+ br.	36·6	6	39·7	6
31·2	6+ br.	35·3	6	38·7	5
29·2	5	33·0	6	36·6	6

λ	i	λ	i	λ	i
3935·7	6+ br.	3859·8	6	3795·2	6
33·8	2 Ca	57·2	5	94·9	6
31·7	6	56·5	6 Fe	94·1	4
30·1	6	54·8	6	90·9	5
28·6	6+	53·6	6	90·2	4
26·9	6	50·1	6 (Fe)	89·2	6
25·2	6	49·0	6	88·0	6+ Fe
23·3	6+ (Pt)	47·4	6	86·1	6
22·2	6	46·6	6+	85·8	6+
21·0	6	43·7	6	84·6	6
10·7	6	41·4	5	84·3	6
10·1	6 Ba	40·4	5	83·8	6
06·2	6+ br.	36·2	5	82·3	2
05·2	6+ br.	34·3	6 Fe	80·7	6
03·2	6+ br.	32·5	6	80·3	6
02·0	6+ br.	32·3	6 Pd?	79·6	6
01·8	5	28·0	6 Fe	77·1	6
01·1	6	27·2	6	76·4	6
00·5	6	26·7	6	76·2	6
3895·3	6	26·5	6	74·7	6
95·0	5	26·0	6 Fe	74·5	6
92·1	6+ br.	24·5	6 Fe	72·0	6
86·9	6	22·1	6+	71·7	6
86·4	6 Fe	21·8	6+	71·1	6+ br.
85·9	6	20·6	6 Fe	68·3	6
83·5	6+	18·7	6	67·3	6 Fe
82·0	5	18·0	6+ br.	66·4	6
80·9	6	16·0	6 Fe	65·7	6+ (Fe)
78·7	6 Fe	14·4	6	64·8	6+
78·1	6 Fe	13·1	6 Fe	64·1	6
77·5	6	12·4	6	63·9	6 Fe
76·9	4	11·1	6	60·9	6
75·7	6+ (Pt)	10·6	6	60·4	6
74·2	6+	09·7	6	57·2	6
73·8	6+	07·8	6	56·8	6
71·1	6	02·7	6	54·6	5
68·8	6	01·7	6	52·7	1
65·6	5 (Fe)	00·6	6	52·1	6
62·7	6+ br.	3799·7	6 Fe	51·9	6
60·0	6 Fe	95·8	6	51·4	6

λ	i		λ	i		λ	i	
3748·4	6	Fe	3693·8	6+		3630·1	6	
46·5	5		92·7	4		21·7	6	
45·9	6	Fe	90·9	6+	(Rh)	21·2	6	
45·6	6	Fe	89·5	6		20·4	6	
41·7	6+		89·1	5		19·5	6	
41·2	6		87·1	6		18·9	6	Fe
40·1	4	Pb	86·2	6		17·1	6	
37·2	6	Fe	84·5	6		16·7	5	
37·1	6		84·2	6		13·4	6	
35·6	6	d.	83·6	1	Pb	12·9	6	
35·0	5	Fe	81·7	6		12·4	6	
33·4	6	Fe	81·1	6+	(Rh)	10·5	6+	
32·9	6+		78·2	6		09·3	6	
31·9	6		75·5	6		09·0	6	
30·9	6		73·3	6+	br.	04·6	4	
28·5	6		72·1	6		03·9	6	
25·4	6		71·6	6	Pb	03·2	6	
22·1	6		71·1	5		02·5	6	
20·3	5		68·4	5		02·0	6	
20·1	5		66·4	5		3598·2	5	
19·6	5		65·1	5		97·6	6	
18·9	6+	(Pd)	61·4	6		93·8	6+	
18·5	6		59·8	6+		93·0	6+	
18·1	6		57·1	5		92·4	6	
16·4	6+		54·6	5		91·6	6	
15·2	6+	br.	53·9	6		91·3	6	
13·9	5		53·3	6	Ir	90·2	6	
11·9	6		50·4	6		87·4	5	
09·3	5	(Fe)	48·9	6		86·5	6	
06·6	5		48·4	6		84·5	5	
05·6	6	Fe	47·9	6	Fe	83·4	6	
04·2	6		42·6	6		83·2	6	
03·4	5		42·3	6		82·9	6	
01·6	6		41·4	6		82·3	6	
01·4	6		40·8	5		82·2	6	
00·4	6		40·4	4		81·3	5	Fe
3698·9	6		39·7	2	Pb	77·8	6	
95·9	6+		38·1	6+	br.	74·9	6	
95·4	6+		32·2	6+		74·2	6	
94·4	6+		31·6	6	Fe	72·9	5	Pb

λ	i	λ	i	λ	i
3572·6	6+	3521·2	6+	3469·7	6+
70·2	6 Fe	20·1	6	68·8	6+
69·9	5	18·7	5	66·1	6
69·2	6+	17·9	6	65·6	5
65·5	6 Fe	17·3	6	64·9	6+
65·3	6	16·6	6	62·3	5
64·2	6+	15·4	6+ br.	61·7	6+
63·4	6+	13·9	6 (Fe)	59·2	5
63·1	6+	13·1	5	58·5	5
62·4	6	11·5	6	57·5	6+ br.
60·9	2	11·2	6	56·2	6+ br.
59·8	3	10·5	6	55·2	5
58·5	6+ (Fe)	06·9	6+	53·1	6+
57·4	6+	05·0	6+	52·5	6
54·9	6 Fe	04·7	4	51·5	6+
54·1	6	03·5	6+	50·5	6+
51·0	6	01·6	6+	49·3	5
50·8	6	01·2	5 Ba	48·2	6
49·6	6 d. (Rh)	3499·6	6	46·1	6
49·0	6+	99·4	6	45·6	5
47·7	6	98·6	5	44·6	6
46·1	6+	98·3	6	44·1	6
45·6	6+	98·0	6	41·2	6 Pd?
44·6	6	97·2	5	40·6	6
43·7	6	95·7	6+ br.	40·4	6+
43·3	6	91·6	6	39·5	6+
42·6	5	90·4	5	35·5	6+
42·0	6	88·9	5	34·0	6+
38·4	6	87·6	5	32·2	6+
37·8	6	87·4	6	30·0	6+
37·2	6	84·1	6+	28·7	6
33·4	6	82·3	5	27·8	6
32·8	5	79·5	5	27·6	6
31·2	6	78·6	5	26·6	6
30·1	5	77·8	6+ br. (Rh)	25·1	6
28·6	3	76·7	6+ d.	24·8	6
26·1	5	75·5	6	23·5	5
25·3	6+ Ba	73·2	6	22·4	6
23·6	4	72·9	6	21·8	6
22·1	6	70·8	5	20·4	6+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
3420·3	6+	3369·7	6	3253·4	6+
18·8	6+ br.	66·3	6+	50·7	5
17·5	6	64·5	6	48·1	6
14·9	6	64·3	6	47·7	4
14·4	6	61·2	5	45·3	5
12·8	6	58·1	5	42·0	6+ br.
08·8	5	36·3	5	41·2	5
06·7	6	27·6	5	38·3	6+
06·3	6	26·6	6+ br.	37·0	6
02·6	5	25·6	6+ br.	36·6	6
01·9	4	24·5	5	36·2	6+
01·3	5	23·5	5	34·8	6
00·6	6	22·2	6+	34·3	6
00·2	6	20·8	6+ br.	32·6	6
3398·7	6	18·8	6+ br.	32·2	1
97·6	6+	16·8	6	31·5	6
97·1	4	15·9	6	30·6	6+
95·8	6	15·7	6	30·0	6+
95·2	6+	14·1	5	29·1	6+
94·6	6	11·1	5	28·8	6
93·0	6	01·7	5	27·9	6 Fe
92·6	6	3297·3	5	27·4	6
88·6	6+	90·5	5	27·0	6
87·9	5	75·5	6	26·5	6
87·0	6+	75·3	5	24·0	6
86·1	6+	74·2	5	22·5	6
86·0	5	72·3	6	21·5	6+
84·7	6	72·0	6	20·4	6
84·1	5	69·4	4	19·3	6
83·8	6+	68·1	2	17·4	6
83·0	6	67·3	2	17·2	6
81·7	6	64·8	6+	16·8	6
81·3	6+	62·9	4	16·6	6
80·7	6	62·4	2	15·8	6+
79·5	6+	61·2	6	13·8	5+
78·8	6	60·7	6	13·5	1
74·0	6	60·5	5	12·9	6
72·2	5	57·1	5	12·6	6
70·7	3	55·1	5	09·4	6
70·3	6	54·4	6+	08·1	5

λ	i	λ	i	λ	i
3205·9	6+	3164·7	6	3120·0	6
05·3	6+	61·8	6	19·2	6+
04·6	6+	61·6	6	18·5	5
04·3	6	60·4	6	18·3	5+
03·5	6+	58·6	6	16·6	6
03·0	6	58·2	6	15·6	6+
01·3	6	57·3	6	15·1	6
01·0	6+	57·1	6	15·0	6
3198·3	6+	56·9	5	13·5	6
97·3	6	56·4	1	11·3	5
96·2	5	54·5	6+ br.	10·7	6
95·5	5	53·7	5	10·5	6
94·8	6	52·8	5	09·8	5
94·4	5	52·1	5	09·5	5
94·0	6	50·7	6	09·1	5
90·9	6+	49·9	6	08·9	6
89·6	5	49·5	6	08·2	6
87·5	6	46·5	6	07·5	6
87·2	5	46·1	6	06·8	6+
86·5	4	45·4	6+	06·2	5
85·4	6 d.	44·5	5	05·7	6
83·5	6	43·2	6	05·5	6
83·0	6 d.	41·1	6	05·2	6
82·7	5	40·5	6	04·0	6
82·0	5	38·2	6	03·5	6
80·3	6	37·7	6	02·9	6
79·6	6+ br.	34·0	6	02·5	6
78·3	5	32·8	6+ br.	01·7	5
75·7	6+	31·3	5	01·3	6
75·0	6+	30·5	6	3099·4	6
74·2	2	30·2	6	98·7	6
73·4	6	29·3	6	95·2	6+ br.
72·6	6	29·0	6	93·8	5
70·6	6	28·6	6	92·8	6+
68·9	6+	27·0	6	91·5	5
68·5	5	25·6	6+	90·7	6
68·2	6+	24·4	6+	90·5	6
66·6	4	23·5	6+	90·3	5
65·8	2	22·8	6+	89·5	6+
64·8	6	20·8	6	88·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
3088·0	6	3057·0	6	3018·2	2
87·3	6	55·4	5	17·4	5
86·5	6	55·2	6	15·8	6
85·2	5	53·5	6	15·4	6+
85·0	6	53·0	6	14·4	6
84·0	6	52·5	6	14·1	4
83·7	6	51·4	6	13·3	5
82·9	6	50·6	5	10·1	6+ br.
82·6	6	49·6	6	08·7	6
80·7	6+	49·2	5	08·0	6
79·7	6	47·6	6+ Fe	03·6	5
79·4	6	46·3	6	02·8	6
78·6	6	46·0	6	02·0	6
78·3	5	45·4	6	01·1	6
77·9	4	45·1	6	00·2	6
77·6	5	44·6	6	2999·2	6
77·2	5	44·2	6	97·8	5
76·8	6	43·8	6	95·7	6
76·5	5	43·7	6	94·9	6
76·0	1 [1]	42·8	2 (Ir?)	94·5	6+ (Fe)
75·2	5	41·1	2	93·7	6
74·3	5	35·3	6	92·5	6
73·3	5	33·4	5	92·3	6
70·5	6	33·0	6	89·8	6+
70·1	5	31·5	6	89·2	6
67·1	6	31·2	6	88·5	6
66·6	6	30·8	2	86·2	6
66·3	6	29·1	6	85·7	6
64·7	6+ br. (Pt)	28·8	6	85·0	6
62·4	4	27·6	5	83·6	5
60·5	5	25·5	6	83·2	6
59·2	5 (Fe)	23·7	6+ br.	83·0	5
58·8	1	22·9	6+	81·7	6+ br.
58·4	6	21·1	6	80·5	6
58·2	6	20·9	6	79·5	6
57·6	5 Fe	19·6	5	78·7	6

[1] Bei $\lambda = 3076 \cdot 0$ liegt auch eine starke Zinklinie; es ist zweifelhaft, ob diese Linie dem Os angehört, obwohl sie, im Gegensatze zu den starken Zn-Linien, vollkommen scharf ist.

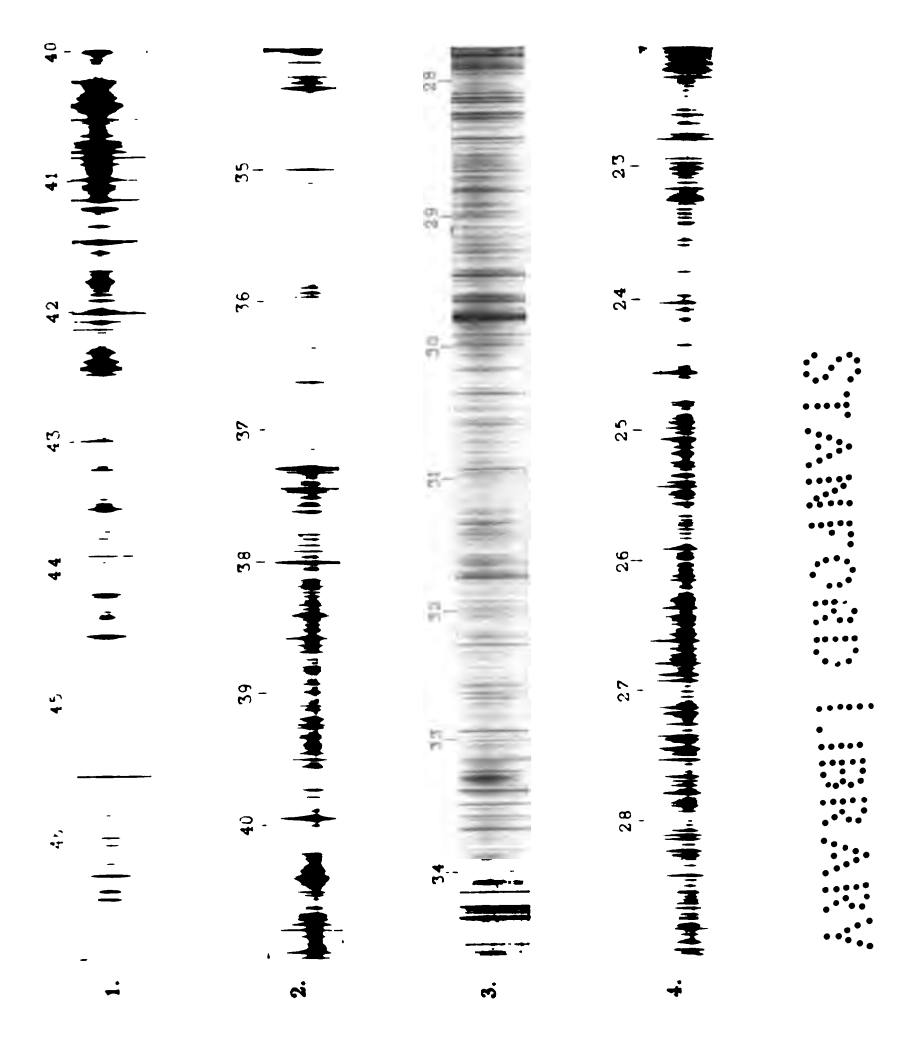
λ	i	λ	i	λ	i
2978·4	6	2934·1	6	2882·6	6+ br.
77·7	5	32·6	6	81·8	6+
77·5	6	32·4	6	80·3	5
75·5	6	31·3	5	79·4	5
75·3	6	30·6	6	78·4	5
73·3	5+ (Fe, Zn)	30·3	6	77·7	6
72·3	6+	29·5	5	77·4	6
71·2	4	26·0	6	75·4	5
68·5	6+ br.	25·6	5	75·0	5
67·0	6	24·6	6	74·7	6
66·4	6	23·1	6+	74·2	6
65·6	6	21·3	6+ br.	73·4	2 Pb
65·3	6	19·9	2	72·4	6
64·7	6	17·8	5	71·3	5
64·2	5	17·3	5	69·0	6+
63·1	6	15·7	6	67·5	6+ br.
62·3	5	14·7	6	65·7	6
61·1	5 Cu?	13·8	6	64·3	6+
57·2	6	12·3	2	63·4	5
56·6	6	11·2	6+ br.	62·0	6
56·3	6	10·6	5	61·0	4
55·1	6	09·6	6+	60·1	6
54·7	6	09·1	1	57·0	6
54·0	6 Fe	08·1	6	56·8	6
53·7	6	07·1	6+	55·3	6
52·4	6	06·7	6	54·2	6+
51·7	6	06·0	6	53·5	6+
51·3	6	05·8	6	52·1	6+
50·9	6	03·2	5	51·2	6
49·8	6	01·2	6	50·8	4
49·6	3	00·3	6	49·3	6
48·3	4	2899·3	5	49·1	6
45·5	6	96·2	5	48·3	5
44·2	6+	95·3	6	46·4	5
43·0	4	92·4	6	45·5	6+
41·0	6+ br.	90·9	6	44·4	3
38·4	6+	86·3	5	43·0	6
37·0	5+	85·2	5	41·5	6
35·6	6+ br. Zn?	84·4	6+ br. Zn?	40·0	6
34·7	6	83·4	6+	39·7	6

λ	i		λ	i		λ	i	
2838·7	2		2784·0	5		2720·2	5	
38·2	5		82·7	5		19·2	6	Pt?
37·4	6+		81·2	6+		19·0	6	
36·2	6		65·5	6		18·6	6	
34·3	6		65·2	5		16·0	6	
33·1	2	Pb, Ir	64·1	6		15·9	6	
32·6	6		63·4	5		15·5	6	
32·3	6		61·6	5		14·7	5	
31·5	6		55·8	5	Fe	11·1	6+	
31·3	6		51·3	6		10·5	6	
30·3	6	Pt	50·6	6		10·0	6	
29·9	6		50·4	6		09·2	6+	
29·3	6		49·4	5		08·3	4	
28·4	6		49·1	6		07·6	6	
25·3	6		48·1	5		07·2	6	
24·8	6		47·1	5	Fe	06·8	5	
24·2	6		46·6	5	Fe	05·6	6+	
23·2	5	Pb?	44·6	6+		04·2	6	
21·2	5		44·2	6		03·2	6+	
20·5	6		43·3	5	Fe	03·0	6	
20·2	5		42·6	6		02·7	6	
18·8	6		42·3	6		02·6	6	Pt?
18·1	6		41·5	6		01·4	6	
17·2	6		40·7	5		00·9	6	
16·7	5		40·4	5		00·6	6	
16·3	6		39·6	5	Fe	2699·7	5	
15·8	5		38·6	6+		98·5	6+	
14·2	5		37·8	6		98·0	6	
13·8	5		37·5	6		97·6	6	
10·7	6+ br.		37·1	6		97·4	6	
08·8	5		36·7	6+		97·0	6	
06·9	5		32·9	5		96·4	6	
02·0	5	Pb	31·5	4		95·0	6	
2795·9	5+ br.		30·8	5		94·7	6	
94·2	6+	(Pt)	28·2	5+		92·9	5	
92·1	6+		27·6	6	Fe	92·1	5	
86·8	6		23·8	6		91·5	5	
86·4	5		22·9	6+		90·0	4	
85·2	6	Ba	22·0	5		89·4	6	Cu?
84·8	6+		21·1	6		89·2	6+	

λ	i	λ	i	λ	i
2688·2	6	2654·7	6	2624·7	6+
87·3	6	53·8	6	24·3	6
86·8	6+	53·3	6	23·6	6+
86·0	6	53·1	6	23·3	6
84·9	6+ Fe	52·5	6	21·9	6
82·8	6	51·2	6	21·5	6
82·3	6	51·1	6	20·7	6
79 8	6	50·7	6+	20·1	6
79·5	6	49·7	6+	19·5	6
77·5	5	49·4	5	17·8	5
75·0	5	48·2	6	14·3	4 Pb
74·7	5	47·8	5	13·1	5
73·7	6	47·0	5 Pt?	12·6	6
73·4	6	46·4	6	11·9	6 Fe
71·9	6	45·7	6+	10·8	6
71·3	6+ br.	45·3	6+	07·1	6 Fe
69·9	6	44·2	4	05·2	6+ br.
69·6	6	43·7	6	03·1	6
67·6	5	42·8	6	2599·9	6
67·0	6	41·6	6	99·4	5 Fe
66·8	6	41·3	6 d.	98·4	5 Fe
66·3	6	40·6	5	97·9	6
66·2	6	39·2	5	97·5	6
64·7	6+ Fe	38·4	5	96·7	6
64·5	6+	38·0	6	96·3	6
64·0	6+	37·2	3	96·0	6
63·3	3 Pb	34·4	6	95·9	6
62·6	6	33·2	6	94·2	6
62·0	6	33·0	6	92·7	6
61·8	6	32·0	6	92·1	6 d.
61·3	5	31·4	6	91·6	6 Fe
61·1	6	31·2	6	90·7	5
60·0	5	29·5	6	89·6	6+
59·6	6	28·5	6	88·4	6
58·7	3 (Pd?)	28·4	6 Fe	87·5	6
56·7	5	28·1	6 Pt	86·9	6
56·3	6+	27·8	6	86·1	6
55·9	6	27·3	6	86·0	6 Fe
55·6	6	26·5	6	83·6	6+
55·3	6	25·6	6+ Fe	82·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
2581·1	6	2525·4	6	2475·1	6
80·0	4	24·3	6	74·9	6
78·4	5	22·9	6	74·1	5
77·3	6+ Pb	19·9	6	73·6	6
76·5	6	19·1	5	73·3	6
71·8	6	18·5	5	72·9	6
69·0	6	18·0	6	72·4	6
67·0	6	15·1	6	70·8	6
66·6	6	13·3	5	70·5	6
63·3	5	13·0	6	70·2	6
48·9	5	12·3	6+ Zn?	69·6	6
48·4	6	11·7	6+ (Fe)	69·0	4
48·2	6	10·8	6	65·3	5
47·7	6	10·5	6	61·5	5
47·1	6	09·7	5	58·8	6
46·9	6	07·2	6	57·7	5
46·2	6+	06·5	6+	55·1	5
45·0	6 Cu?	03·7	6	54·7	6
44·1	6	2497·1	5	54·0	6
43·9	6	95·1	6+ br.	53·5	5
43·0	6	93·6	6	52·7	6
42·6	5	93·3	6 Fe	51·7	6
42·2	6	92·5	6	51·4	5
41·6	6	92·1	6	50·8	5
40·8	6+	90·7	6+	48·5	6
40·4	6	89·7	6	47·4	6
40·2	6	89·3	5	46·4	6+
39·0	6	88·6	4	46·1	6
38·8	6	88·3	6+	45·2	6+ Zn?
38·0	4	86·3	4 (Zn)	44·6	6
36·8	6+ Zn?	85·7	6	44·3	6
35·5	6	85·3	6	43·8	5
33·6	6 d. (Zn)	84·3	6+	41·1	6
32·5	6	83·4	6	40·8	5
32·0	5	82·8	6	40·5	6
31·5	6+	82·5	6	35·7	6
29·6	6 Cu?	81·9	6	32·9	5
27·8	6	79·9	6	31·7	6
26·4	6	76·9	5	31·3	6
26·1	6	76·4	6 Pb	28·4	6

λ	i	λ	i	λ	i
2428·0	5	2392·6	6	2357·9	6
25·1	5	91·9	6	55·4	5
24·7	6	88·7	6 Fe	50·3	5
24·2	5	87·4	6	43·9	6
23·2	4	86·1	6	33·0	6
21·7	6+	84·7	6+	20·4	6
20·7	6	83·2	6+	13·9	5
20·2	6	82·2	5 Fe	06·2	5
19·8	6	79·5	6	05·0	6
18·6	6	78·9	6	2293·7	6
18·1	6	78·6	6	88·2	6
16·8	6	77·7	6	86·6	6+
15·5	6	77·2	5	85·6	6+
14·7	6	76·2	6	85·0	6+
14·1	6	75·2	5	83·3	5
13·3	6 Fe	74·8	6	82·3	4
11·1	6 Fe	73·0	6+	79·2	6
10·6	6 Fe	72·0	6	77·4	6
09·6	5+	71·3	6	72·6	5
01·2	5	70·7	6	70·8	6
2395·9	6	69·3	6	58·5	6
95·6	5+ (Fe)	67·4	3	52·2	6
94·4	6	58·7	5	04·5	5



Ruthenium.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

Über die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung

von

Emil Waelsch,

a. o. Professor an der k. k. technischen Hochschule zu Brünn.

Man kann die Lamé'sche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit fünf singulären Punkten in der Form schreiben:

$$(a\varphi)_2 + c\,.\,\varphi = 0,$$

wo a eine binäre Form fünfter Ordnung ist (deren Wurzelpunkte die singulären Punkte sind, die als von einander getrennt vorausgesetzt werden sollen), wo ferner c eine lineare Form und $(a\varphi)_2$ die zweite Überschiebung der Form a und der unbekannten Form φ ist.[1]

Man kann[2] nun sechs lineare Formen $c_x^{(1)}, c_x^{(2)}, \ldots c_x^{(6)}$ so bestimmen, dass die Identität besteht:

$$(a\varphi^{(i)})_2 + c^{(i)}\varphi^{(i)} = 0,$$

wobei $\varphi^{(i)}$ eine der Lamé'schen Formen zweiter Ordnung der Form a ist.

Im Folgenden ergibt sich zunächst, dass allgemein das Product Φ der analog definirten Lamé'schen Formen zweiter Ordnung einer Form n^{ter} Ordnung a identisch ist mit der Hermite'schen Schwesterform u_{n-1} von a, so dass sich für $n = 5$ das Product der $\varphi^{(i)}$ leicht ergibt.

Hierauf wird auf geometrischem Wege die Covariante sechster Ordnung Γ bestimmt, deren Wurzelfactoren die Punkte

[1] Siehe Klein, Autographirte Vorlesungshefte, Sommer 94, S. 40.

[2] Siehe: Zur Geometrie der linearen algebr. Differentialgleichungen. Mittheilungen der deutschen mathem. Gesellsch. zu Prag.

$c^{(i)}$ liefern und der Zusammenhang zwischen den $\varphi^{(i)}$ und den $c^{(i)}$ erörtert. Diese Covariante Γ gibt durch die Realität ihrer Wurzeln Aufschluss über die Realität der Lamé'schen Formen $\varphi^{(i)}$.

Zum Schlusse ergibt sich noch eine Eigenschaft der Hesse'schen Fläche der Diagonalfläche dritter Ordnung.

1. Die Hermite'sche Form u_{n-1}. In der Differentialgleichung

$$(a\varphi)_2 + c\varphi = 0, \tag{1}$$

wo a, c respective Formen n^{ter} und $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung sind, kann die Form c auf $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Arten so bestimmt werden, dass die Integralform φ dieser Gleichung ganz und von zweiter Ordnung wird,[1] wo sie dann ein Lamé'sches Polynom zweiter Ordnung der Form a heisst.

Wird ein solches Polynom φ gleich $\alpha_x \beta_x$ gesetzt, so gilt nach Gleichung 1) die Identität

$$(a\alpha)(a\beta)a_x^{n-2} + c_x^{n-2} . \alpha_x \beta_x = 0.$$

Diese ist erfüllt, wenn $x_1 = \alpha_2$, $x_2 = -\alpha_1$ und $x_1 = \beta_2$ $x_2 = -\beta_1$ gesetzt wird, d. h. wenn

$$(a\alpha)(a\beta)^{n-1} = 0, \qquad (a\beta)(a\alpha)^{n-1} = 0 \tag{2}$$

ist. Daher entsprechen sich die Wurzeln des Lamé'schen Polynoms φ in der ersten Polarbeziehung von a, und zwar in beiden Richtungen.

Sind umgekehrt die Gleichungen 2) erfüllt, so folgt aus ihnen:

$$(a\alpha)(a\beta)(a\alpha)^{n-2} = 0, \qquad (a\alpha)(a\beta)(a\beta)^{n-2} = 0,$$

d. h. die Form

$$(a\alpha)(a\beta)a_x^{n-2} = (a_x^n, \alpha\beta)_2 = (a\varphi)_2$$

hat die Factoren α und β oder $(a\varphi)_2$ ist durch φ theilbar. Demnach folgt:

»Die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung der Form n^{ter} Ordnung a sind mit den zweigliedrigen Cyclen der ersten Polare dieser Form identisch.«[1]

---

[1] Siehe meine oben citirte Arbeit.

Sind nun

$$a_x^{n-1}(a\xi) = 0 \text{ und } (a\xi)^{n-1}a_x = 0 \qquad 3)$$

die erste und letzte Polarbeziehung von a, so erhält man die Form Φ, welche das Product dieser Polarcyclen darstellt, indem man ξ aus den Gleichungen 3) eliminirt, d. h. indem man in die zweite dieser Gleichungen setzt:

$$\xi_1 = \frac{\partial a}{\partial x_1}, \qquad \xi_2 = \frac{\partial a}{\partial x_2}.$$

Durch dieses Verfahren erhält man aber bekanntlich au_{n-1}, wo u_{n-1} die vorletzte Hermite'sche Schwesterform ist;[1] daher:

»Das Product der Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form a n^{ter} Ordnung ist identisch mit deren Hermite'schen Schwesterform u_{n-1}.«

Demnach erhält man (in den Bezeichnungen des Gordan'schen Buches) für

$n = 3$: $\Phi = \Delta$,

$n = 4$: $\Phi = t$,

$n = 5$: $\Phi = {}^1/_2\, ia^2 - {}^3/_4\, \Delta^2$

u. s. w.

Es ergibt sich auch:

»Die Form u_{n-1} von der $(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung zerfällt nach Lösung einer Gleichung von der Ordnung ${}^1/_2(n-1)(n-2)$ in rational bekannte Formen zweiter Ordnung $\varphi^{(i)}$.«

Für $n = 4$ sind dies die drei quadratischen Factoren der Covariante t, deren Trennung durch die Gleichung

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$$

geschieht.[2]

Im Falle einer Form höherer Ordnung kann man die Existenz einer solchen covarianten Gleichung, welche die Factoren $\varphi^{(i)}$ von Φ trennt, in folgender Weise einsehen. Man braucht nur dieselbe simultane lineare Covariante $l^{(i)}$ von $\varphi^{(i)}$ mit einer

[1] Siehe z. B. Gordan's Invarianten, II, S. 357.

[2] Vergl. Hilbert, Lettre adressé à M. Hermite, Liouville Journ., (4) IV, p. 249.

λ	i	λ	i	λ	i
2978·4	6	2934·1	6	2882·6	6+ br.
77·7	5	32·6	6	81·8	6+
77·5	6	32·4	6	80·3	5
75·5	6	31·3	5	79·4	5
75·3	6	30·6	6	78·4	5
73·3	5+ (Fe, Zn)	30·3	6	77·7	6
72·3	6+	29·5	5	77·4	6
71·2	4	26·0	6	75·4	5
68·5	6+ br.	25·6	5	75·0	5
67·0	6	24·6	6	74·7	6
66·4	6	23·1	6+	74·2	6
65·6	6	21·3	6+ br.	73·4	2 Pb
65·3	6	19·9	2	72·4	6
64·7	6	17·8	5	71·3	5
64·2	5	17·3	5	69·0	6+
63·1	6	15·7	6	67·5	6+ br.
62·3	5	14·7	6	65·7	6
61·1	5 Cu?	13·8	6	64·3	6+
57·2	6	12·3	2	63·4	5
56·6	6	11·2	6+ br.	62·0	6
56·3	6	10·6	5	61·0	4
55·1	6	09·6	6+	60·1	6
54·7	6	09·1	1	57·0	6
54·0	6 Fe	08·1	6	56·8	6
53·7	6	07·1	6+	55·3	6
52·4	6	06·7	6	54·2	6+
51·7	6	06·0	6	53·5	6+
51·3	6	05·8	6	52·1	6+
50·9	6	03·2	5	51·2	6
49·8	6	01·2	6	50·8	4
49·6	3	00·3	6	49·3	6
48·3	4	2899·3	5	49·1	6
45·5	6	96·2	5	48·3	5
44·2	6+	95·3	6	46·4	5
43·0	4	92·4	6	45·5	6+
41·0	6+ br.	90·9	6	44·4	3
38·4	6+	86·3	5	43·0	6
37·0	5+	85·2	5	41·5	6
35·6	6+ br. Zn?	84·4	6+ br. Zn?	40·0	6
34·7	6	83·4	6+	39·7	6

λ	i		λ	i		λ	i	
2838·7	2		2784·0	5		2720·2	5	
38·2	5		82·7	5		19·2	6	Pt?
37·4	6+		81·2	6+		19·0	6	
36·2	6		65·5	6		18·6	6	
34·3	6		65·2	5		16·0	6	
33·1	2	Pb, Ir	64·1	6		15·9	6	
32·6	6		63·4	5		15·5	6	
32·3	6		61·6	5		14·7	5	
31·5	6		55·8	5	Fe	11·1	6+	
31·3	6		51·3	6		10·5	6	
30·3	6	Pt	50·6	6		10·0	6	
29·9	6		50·4	6		09·2	6+	
29·3	6		49·4	5		08·3	4	
28·4	6		49·1	6		07·6	6	
25·3	6		48·1	5		07·2	6	
24·8	6		47·1	5	Fe	06·8	5	
24·2	6		46·6	5	Fe	05·6	6+	
23·2	5	Pb?	44·6	6+		04·2	6	
21·2	5		44·2	6		03·2	6+	
20·5	6		43·3	5	Fe	03·0	6	
20·2	5		42·6	6		02·7	6	
18·8	6		42·3	6		02·6	6	Pt?
18·1	6		41·5	6		01·4	6	
17·2	6		40·7	5		00·9	6	
16·7	5		40·4	5		00·6	6	
16·3	6		39·6	5	Fe	2699·7	5	
15·8	5		38·6	6+		98·5	6+	
14·2	5		37·8	6		98·0	6	
13·8	5		37·5	6		97·6	6	
10·7	6+	br.	37·1	6		97·4	6	
08·8	5		36·7	6+		97·0	6	
06·9	5		32·9	5		96·4	6	
02·0	5	Pb	31·5	4		95·0	6	
2795·9	5+	br.	30·8	5		94·7	6	
94·2	6+	(Pt)	28·2	5+		92·9	5	
92·1	6+		27·6	6	Fe	92·1	5	
86·8	6		23·8	6		91·5	5	
86·4	5		22·9	6+		90·0	4	
85·2	6	Ba	22·0	5		89·4	6	Cu?
84·8	6+		21·1	6		89·2	6+	

dann aus einem Kegelschnitt, welcher durch den Hauptpunkt geht und dessen Ebene $E^{(i)}$ die Gerade $\varphi^{(i)}$ enthält, und ferner aus einer Geraden der F_3, welche die übrigen Geraden $\varphi^{(i)}$ schneidet. Es gibt demnach sechs solcher Punkte $\mathfrak{c}$; sie seien mit $\mathfrak{c}^{(i)}$ bezeichnet. Ihre Formen $\mathfrak{c}^{(i)}$ sind Factoren der zu bestimmenden Covariante Γ.

Soll nun die Curve $\mathfrak{C}_\mathfrak{c}$ zerfallen, so müssen die Gleichungen 6) dritten Grades in γ für alle Formen ψ eine Wurzel γ_0 gemein haben. Setzt man $\psi = j$ und $\psi = \mathfrak{c}^3$, so ergeben sich daher für die fraglichen $\mathfrak{c}$ die Gleichungen [da $(aj)_3 \equiv 0$]:

$$-3(i\mathfrak{c}, j)_3 + 2(\mathfrak{c}^3, j)_3 \gamma_0^2 = 0$$
$$3(j, \mathfrak{c}^3)_3 + 2((a\mathfrak{c}^2)_2 \mathfrak{c}^3)_3 \gamma_0^2 = 0$$

Eliminirt man γ_0^2 aus diesen Gleichungen, so folgt [da $(ij)_2 = \alpha$ gesetzt wird], dass die sechs $\mathfrak{c}_x^{(i)}$ Wurzelfactoren der Covariante

$$\Gamma_x^6 = j^2 - a\alpha$$

sind.

»Diese ist demnach diejenige Covariante, deren Wurzeln die Punkte $\mathfrak{c}^{(i)}$ der $\mathfrak{C}_3$ liefern.«

In Folge einer Syzygante der Form a[1] gilt auch

$$\Gamma = HA + 2ih + {}^1/_2 i^3,$$

wo $A = (ii)_2$, $h = (fj)_2 = -(iH)_2 - {}^3/_{10} i^2$ ist.

4. Zusammenhang zwischen $\varphi^{(i)}$ und $c^{(i)}$. *a)* Nachdem die Wurzeln $\mathfrak{c}^{(i)}$ der Covariante Γ gefunden sind, soll die Form $\varphi^{(i)}$ bestimmt werden.

Da die Überschiebung $(a\varphi^{(i)})_2$ den Punkt $\mathfrak{c}^{(i)}$ enthält, so ist $\varphi^{(i)}$ harmonisch zur Form

$$(a\mathfrak{c})^3 a_x^2. \qquad 7)$$

Da ferner die Ebene, welche $\varphi^{(i)}$ mit $\mathfrak{c}^{(i)}$ verbindet, durch den Hauptpunkt geht und j die Form dieses Punktes ist, so ist $(j, \varphi^{(i)}\mathfrak{c})_3 = 0$ oder $\varphi^{(i)}$ ist zur Form

$$(j\mathfrak{c}) j_x^2 \qquad 8)$$

harmonisch.

---

[1] Siehe Stroh, Über eine fundam. Eigenschaft etc. Math. Ann., Bd. 33, S. 105.

Daher ist $\varphi^{(i)}$ die Functionaldeterminante der Formen 7) und 8) oder

»es ist $\varphi^{(i)} = (aj)(ac^{(i)})^3(jc^{(i)})a_x j_x$«.

b) Aus $\varphi^{(i)}$ soll die Form $c_x^{(i)}$ gefunden werden.

Es gilt

$$(a\varphi^{(i)})_2 + c^{(i)}\varphi^{(i)} = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass eine quadratische Form φ Factor einer cubischen Form χ sei, ist die, dass die Covariante

$$-2(\varphi\varphi)_2\chi + 3\varphi(\chi\varphi)_2$$

identisch verschwinde.[1]

Daher ist

$$c^{(i)} = \frac{3}{2}\,\frac{((a\varphi^{(i)})_2\varphi^{(i)})_2}{(\varphi^{(i)}\varphi^{(i)})_2}.$$

c) Da $\varphi^{(i)}$ harmonisch ist zur Form 8), so ist $c^{(i)}$ Wurzel der Form

$$(j\varphi^{(i)})^2 j_x \qquad \text{(siehe Art. 1).}$$

d) Sind die Coëfficienten von a reell und ist $\varphi^{(i)}$ ein reelles Polynom, so ist auch $c^{(i)}$ reell.

Ist umgekehrt $c^{(i)}$ reell, so sind auch die Formen 7) und 8) reell, daher auch ihre Functionaldeterminante $\varphi^{(i)}$.

»Es entspricht demnach jeder reellen Wurzel der Covariante Γ ein reelles Lamé'sches Polynom $\varphi^{(i)}$ und umgekehrt.«

5. Über die Diagonalfläche dritter Ordnung. Wenn man auf jeder durch fünf Punkte a des Raumes gehenden $\mathfrak{C}_3$ die Wurzelpunkte derselben Covariante construirt, so beschreiben diese Punkte eine Fläche, welche ich[2] als »Covariantenfläche« dieser Covariante bezeichnet habe. Die Gleichung dieser Fläche in den überzähligen Coordinaten x_i des Gegenflachs des gegebenen Fünfecks a (siehe l. c.) wird gefunden, indem man den Ausdruck annullirt, den man erhält, wenn man im Leitgliede der gewählten Covariante die Coëfficienten der Form der Punkte $a : a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ setzt, dann die übrigbleibenden

---

[1] Siehe Clebsch, Binäre Formen, S. 94.

[2] Siehe: Über eine geom. Darstellung. Diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 574.

Coëfficienten durch die symmetrischen Functionen der Wurzeln α_i ersetzt und schliesslich $\alpha_i = x_i$ schreibt.

Wählt man als Covariante die oben bestimmte Covariante $\Phi = u_4$, so bleibt bei den angeführten Substitutionen vom Leitgliede nur das Glied a_4 (wie überhaupt im Allgemeinen a_{n-1} bei u_{n-1}).

Daher ist $\Sigma x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$ die Gleichung der Covariantenfläche der Covariante Φ. Dies ist aber die Gleichung der Hesse'schen Fläche der Diagonalfläche, deren Gleichung ist $\Sigma x_1^3 = 0$; daher folgt:

»Zu den fünf Punkten a gehört für jede durch sie gehende $\mathfrak{C}_3$ eine Überschiebungsfläche F_3; diese F_3 hat sechs Gerade, die Bisecanten der $\mathfrak{C}_3$ sind. Die Schnittpunktepaare dieser Bisecanten mit $\mathfrak{C}_3$ erfüllen die Hesse'sche Fläche der Diagonalfläche, welche zu dem Gegenflach des Fünfecks a gehört. Die Punkte eines dieser Paare entsprechen einander in der Steiner'schen Verwandtschaft conjugirter Punkte dieser Hesse'schen Fläche.« Oder:

»Die Geraden $\varphi^{(i)}$ der Überschiebungsflächen der Punkte a für alle durch diese Punkte gehenden $\mathfrak{C}_3$ erfüllen die Fiedler-Voss'sche Congruenz der Diagonalfläche des Gegenflachs der Punkte a.«

Der letzte Satz ergibt sich, indem man die Parameterdarstellung der $\mathfrak{C}^3$ benützt, wie sie in der zuletzt citirten Arbeit gegeben ist. Denn die Coordinaten der Punkte $\alpha = \infty, 0$ sind respective $x_i = \alpha_i, \alpha_i^{-1}$, wenn $a_4 = 0$ oder $\Sigma\alpha_i^{-1} = 0$ ist. Dann liegen die beiden Punkte auf der Hesse'schen Fläche, genügen aber auch der Polarbeziehung $\Sigma x_i y_i^2 = 0$ der Diagonalfläche, und zwar in beiden Richtungen.

Über die Refractionsäquivalente der Elemente

von

Alfred Hauke.

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

Die Theorie der Refractionsäquivalente fusst auf dem Begriff der Refractionsconstante R eines Körpers und deren Summationsgesetz:

$$MR = \Sigma m_i r_i. \qquad \text{I)}$$

Dabei bedeuten M und die m die Massen des Körpers und aller Bestandtheile, die r die Refractionsconstanten der letzteren.

Die Gleichung I) ist aber nicht immer erfüllt. Sicher ist nur

$$MR = \Sigma m_i f_i(r_i) = \Sigma m_i r_i + \Sigma m_i \varphi_i$$

für $f(r) = r + \varphi$, wobei f und φ Functionen von r sind. $\Sigma m\varphi = D$ ist also das Correctionsglied.

Es ist leicht, den Werth von D durch Experimente zu erhalten.

Zur Bestimmung der φ werden gewisse Annahmen gemacht, welche die Erfahrung rechtfertigt.

Wenn $D = 0$ ist, setzt man alle $\varphi = 0$ und betrachtet nach Brühl's[1] Vorgang überhaupt die φ bloss als Functionen der Constitution, setzt sie also für gleich oder ähnlich constituirte Körper constant voraus.

Landolt[2] hat aus praktischen Gründen den Begriff des Refractionsäquivalentes eingeführt:

---

[1] Wied. Beibl. 4, S. 776, 1880.

[2] Pogg. Ann. 123, 1864.

Das Product aus der Refractionsconstante einer Verbindung oder Atomgruppe mit dem Moleculargewichte P, $RP = Q$ nennt er die Molecularrefraction oder das Refractionsäquivalent der Verbindung, respective der Gruppe.

Analog heisst $p.r = q$ die Atomrefraction eines Elementes, wenn p das Atomgewicht und r die Refractionsconstante desselben bedeutet.

Natürlich ist $Q = \Sigma q + \Delta$, wenn $\Delta = \Sigma p\varphi$ bedeutet.

Unter der Refractionsconstante einer Substanz versteht man eine Function des Brechungsexponenten, die vom Zustande derselben unabhängig ist.

Es wurden hauptsächlich drei Ausdrücke als Refractionsconstante bezeichnet und verwendet, die sämmtlich nur Functionen des Brechungsexponenten $= n$ und der Dichte $= d$ sind und keine andere Naturconstante enthalten, nämlich:

1. $R_1 = \frac{n^2-1}{d}$, die Newton'sche Formel,

2. $R_2 = \frac{n-1}{d}$, die empirische oder n-Formel,

3. $R_3 = \frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{d}$, das theoretische Gesetz oder die n^2-Formel.

Nasini[1] machte darauf aufmerksam, dass diese drei Formeln nicht allgemein vereinbar sind. Sonst müssten die folgenden Proportionen bestehen:

$$n+1 : 1 : \frac{n+1}{n^2+2} = 1 : c_2 : c_3,$$

worin c_2 und c_3 Constante sind.

Für Gase ist das auch angenähert erfüllt, weil für diese n wenig grösser als 1 ist.

In diesem Falle werden c_2 und c_3 ungefähr $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.

Für Flüssigkeiten bewegen sich die Werthe der n zwischen 1·3 und 1·6. In diesem Intervall wächst die Grösse $\frac{n^2+2}{n^2-1}$ nur

[1] Berl. Ber. 40, S. 71, 1884.

von 1·6 zu 1·76, weshalb die Formeln 2) und 3) ziemlich vergleichbare Resultate geben.

Wegen der Dispersion wird R im Allgemeinen nur für Brechungsexponenten bei bestimmter Wellenlänge constant sein. Es wäre denn die Änderung des R, welche bloss durch die Dispersion $= \delta$ hervorgerufen wird, ebenfalls constant.

Für 1) ist die Bedingung dafür $\frac{2n\delta}{d} = \text{const}$, d. h. $2n\delta$ müsste der Dichte proportional sein.

Für 2) müsste $\frac{\delta}{d} = \text{const}$, d. h. die Dispersion der Dichte proportional sein.

Für 3) ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\frac{6n\delta}{d(n^2+2)^2} = \text{const.}$$

Mögen diese Gleichungen bestehen oder nicht, jedenfalls muss man, um vergleichbare Werthe für R und die r zu erhalten, Licht von bestimmter Wellenlänge zur Bestimmung der Brechungsexponenten verwenden.

Schrauff[1] hat darauf zuerst hingewiesen. Um von der Dispersion frei zu sein, schlug er vor, die Wellenlänge $\lambda = \infty$, d. h. die Constante A aus der Cauchy'schen Interpolationsformel $n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots$ zu Grunde zu legen.

In neuerer Zeit ist man aus praktischen Gründen auf Brühl's[2] Vorschlag davon abgegangen und reducirt jetzt gewöhnlich auf die C-Linie des Sonnenspectrums.

Conrady[3] u. A. machten, ohne viel Erfolg, den Versuch, das Natriumlicht als Normallicht einzuführen.

Nun noch einige Worte über die gebräuchlichen Refractionsconstanten.

Aus Newton's Emissionstheorie des Lichtes folgerte Laplace,[4] dass

---

[1] Diese Sitzungsber. seit 1861.

[2] Seit 1880.

[3] Zeitschr. für physikal. Chemie, III. Bd., S. 210, 1889.

[4] Méc. cél. IV, S. 232.

$$R = \frac{n^2 - 1}{d} = \frac{4k}{V^2} = \text{const}, \tag{1}$$

wobei k die Anziehungsconstante der Substanz und V die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum bedeuten.

Die Grösse $n^2 - 1$ wurde brechende Kraft genannt.

Biot's und Arago's[1] Untersuchungen über die Lichtbrechung der Gase bestätigten die Gleichung 1), ergaben aber für chemische Verbindungen die $\varphi \neq 0$.

Arago und Petit[2] fanden bei grösseren Temperaturintervallen R von der Temperatur abhängig.

Dulong's[3] Messungen führten zu dem Resultate, dass auch für Gasmischungen $\varphi \neq 0$ ist.

Wahrscheinlich auf Grund einer Bemerkung Arago's, dass nämlich für Gase wegen der geringen Abweichung des Brechungsexponenten von der Einheit auch $\frac{n^m - 1}{d} = \text{const}$ ist, kamen Gladstone[4] und Dale in England und Landolt[5] in Deutschland zu der rein empirischen Formel

$$R = \frac{n - 1}{d} = \text{const}, \tag{2}$$

die sich den Thatsachen schon bedeutend besser anschliesst, wenn auch Rühlmann's[6] und Wüllner's[7] Untersuchungen ergaben, dass auch 2) nur als Näherungsformel zu betrachten sei, wie etwa das Mariotte'sche Gesetz.

Aber auch die Formel 1) fand noch lange Anhänger, obwohl sie unzweckmässiger ist und ihre theoretische Basis längst verloren hatte.

Ja Hock[8] versuchte es sogar, sie neu zu begründen und Schrauff[9] gibt eine Tafel der Refractionsäquivalente fast aller Elemente, die auf Newton's Formel basirt ist.

---

1 Mém. de l'Instit. France, 7, 1806. Gilb. 25, 345, 1807; 26 36, 1807.
2 Ann. chim. phys. 1, 1, 1816.
3 Ann. chim. phys. 31, 154, 1826.
4 Phil. Trans. 1858, 887.
5 Pogg. Ann. 123, 1864.
6 Pogg. Ann. 132, S. 202, 1867.
7 Pogg. Ann., 133, 1868.
8 Pogg. Ann. 112, S. 347, 1861.
9 Diese Sitzungsber. 52, 1865. Berl. Ber. 21, 208.

Er war dabei gezwungen, für dieselbe Substanz je nach dem Aggregatzustande mehrere Äquivalente zu unterscheiden.

Gladstone[1] berechnete auf Grund der zweiten Formel ebenfalls eine Tabelle der Atomrefractionen, auf die ich noch zurückkomme.

Die dritte Formel hat vor den beiden anderen den Vorzug, dass sie auf moderner theoretischer Grundlage berechnet wurde und die Thatsachen besser wiedergibt, wie besonders Brühl[2] nachwies.

Daher ist sie auch jetzt fast ausschliesslich in Gebrauch.

L. Lorenz[3] in Kopenhagen und H. A. Lorentz[4] in Leyden gelangten auf verschiedenem Weg, ersterer auf Grund specieller mechanischer Annahmen, letzterer von Maxwell's elektromagnetischer Lichttheorie ausgehend, fast gleichzeitig zur Gleichung:

$$R_3 = \frac{A^2-1}{A^2+2}\,\frac{1}{d}\,, \tag{3}$$

worin A die Cauchy'sche Constante ist.

Landolt[5] sah sich veranlasst, sein reiches Beobachtungsmaterial auf die n^2-Formel umzurechnen, obwohl er erkannte, dass auch R_3 von der Temperatur nicht ganz unabhängig ist.

Das veranlasste Johst[6] andere empirische Formeln aufzustellen, wie $R = \frac{\sqrt{n}-1}{d}$ und $R = \frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{1}{d}$. Diese waren aber nicht im Stande, die n^2-Formel zu verdrängen, sondern blieben unbeachtet.

Ich muss noch die Untersuchungen Ketteler's[7] erwähnen, welche die Ziffer 2 im Nenner von R_3 in vielen Fällen als unrichtig ergaben.

Er stellte daher eine neue Theorie der Refractionsäquivalente auf, indem er von der folgenden Gleichung ausging:

---

[1] Sill. Journ. (3), XXIX, 55—57, 1885. Wied. Beibl. IX, 417.

[2] Zeitschr. für physikal. Chemie, VII, S. 141, 1891.

[3] Wied. Ann. 11, 70, 1880.

[4] Wied. Ann. 9, 70, 1880.

[5] Berl. Ber. 1882.

[6] Wied. Ann. 20, 47, 1883.

[7] Zeitschr. für physikal. Chemie, II, 1888, S. 905.

$$R = \frac{n^2-1}{n^2+x} \frac{1}{d}.$$

Aus theoretischen Gründen setzte er $x = \frac{R}{\beta} - 1$, wodurch die Gleichung die Form annimmt:

$$R = (n^2-1)\left(\frac{1}{d} - \beta\right).$$

Dabei ist β das wahre Volumen der Substanz.

Diese Formel enthält zwei Naturconstanten, schliesst sich daher besser den Thatsachen an. Ihre Anwendbarkeit ist aber dadurch sehr beschränkt, dass sie die Kenntniss von β voraussetzt.

Zur Bestimmung der wahren Volumina hat Clausius[1] eine Formel abgeleitet, die uns wieder auf die n^2-Formel zurückführt.

Er fand für kugelförmige Partikelchen die Dielektricitätsconstante $= \varkappa = \frac{1+2v}{1-v}$ oder $v = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+2}$, wobei v das wahre Volumen bedeutet.

Nach Maxwell's Theorie der Elektricität und des Lichtes ist nun $\varkappa = n^2$. Das Experiment ergab[2] in vielen Fällen die Richtigkeit dieser Gleichung.

Durch Substitution erhält man:

$$v = \frac{n^2-1}{n^2+2}.$$

Diese Gleichung verwendeten Dorn[3] und Fr. Exner[4] zur Bestimmung der Molekülgrössen.

Die Lorenz'sche Formel geht durch die Einführung des v in folgende über:

$$R = \frac{v}{d}.$$

Also ist $\frac{1}{R}$ das wahre specifische Gewicht einer Substanz, wenn sie aus kugelförmigen Partikelchen besteht, innerhalb deren kein leerer Raum mehr ist.

---

[1] Die mechanische Behandlung der Elektricität, III. Abschnitt.

[2] U. a. Boltzmann, diese Sitzungsber. 67 und 69, 1873 und 1874.

[3] Wied. Ann. 13, S. 378.

[4] Diese Sitzungsber. 91, 1885, S. 850.

Dann besteht aber offenbar auch die Gleichung

$$MR = \Sigma mr.$$

Für diesen Fall sind also die $\varphi = 0$, und man kann umgekehrt aus $\Sigma m\varphi \neq 0$ schliessen, dass die Partikelchen der Substanz entweder nicht kugelförmig sind oder dass noch innerhalb derselben leerer Raum ist.

Nach diesen historischen Bemerkungen gehe ich zur Beschreibung meiner Beobachtungen über.

Ich bestimmte die Refractionsäquivalente einer Anzahl von Elementen aus wässerigen Lösungen ihrer Verbindungen.

Dabei wendete ich die Formel $R = \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{d}$ an und setzte voraus, dass $MR = \Sigma mr$ ist.

Die Brechungsexponenten wurden für Natrium- und Thalliumlicht mit Pulfrich's Totalreflectometer[1] bestimmt und auf die C-Linie reducirt.

Die Beschreibung des verwendeten Apparates enthielt eine Tabelle, die für Natriumlicht die zu den beobachteten Ablenkungswinkeln i gehörigen n gab. Für Thalliumlicht habe ich mir selbst eine ähnliche Tafel berechnet nach der Formel $n = \sqrt{N^2 - \sin^2 i}$, wobei N der Brechungsexponent des Glases ist.

Ich gebe in Tabelle I eine Zusammenstellung der Werthepaare i und n, so weit ich sie benöthigte. Es waren $N_{Na} = 1\cdot61511$, $N_{Tl} = 1\cdot62043$.

Tabelle I.

n Na	$10^{-4}\Delta n$	i^0	$10^{-4}\Delta n$	n Tl
1·3920		55		1·3981
	59		58	
1·3861		56		1·3923
	58		58	
1·3803		57		1·3865
	57		57	
1·3746		58		1·3808
	57		56	

[1] Wied. Ann. 21, 724; 30, 193; 31, 724.

n Na	$10^{-4}\Delta n$	t^0	$10^{-4}\Delta n$	n Tl
1·3689		59		1·3752
	56		56	
1·3633		60		1·3696
	55		55	
1·3578		61		1·3641
	54		54	
1·3524		62		1·3587
	53		52	
1·3471		63		1·3535
	52		51	
1·3419		64		1·3484
	51		51	
1·3368		65		1·3433
	49		49	
1·3319		66		1·3384
	48		48	
1·3271		67		1·3336

Die Dichten der Lösungen bestimmte ich mit der Mohr'-schen Wage. Die Procentgehalte wurden theils durch Wägung bestimmt, theils den Landolt-Börnstein'schen Tabellen[1] entnommen.

Die Goldchlorid- und Platinchloridlösungen wurden wegen des zweifelhaften Chlorgehaltes quantitativ analysirt und daraus ihr Procentgehalt abgeleitet.

Als Refractionsconstante des Wassers für die C-Linie erhielt ich $R = 0 \cdot 205$. Dieser Werth wurde zur Bestimmung der Molecularrefractionen $PR = Q$ der gelösten Verbindungen benützt.

In Tabelle II sind meine sämmtlichen Beobachtungen zusammengestellt.

Die fehlenden Brechungsexponenten waren wegen der Farbe der betreffenden Lösungen nicht messbar.

Zur Ermittlung der Atomrefractionen der Elemente verwendete ich die Mittelwerthe der Molecularrefractionen jeder Substanz.

Die Atomrefractionen von Chlor und Wasserstoff setzte ich nach Brühl[2]

$$q_{\mathrm{Cl}} = 6 \cdot 014 \qquad q_{\mathrm{H}} = 1 \cdot 103,$$

---

[1] Landolt und Börnstein, Physikal.-chem. Tabellen, 2. Aufl., 1894.

[2] Zeitschr. für physikal. Chemie, VII. Bd., 1891, S. 140.

Tabelle II.

Wässerige Lösungen.

Gelöste Substanz	Formel	Procentgehalt	Dichte	n Na	n Tl	n C	PR
Lithiumchlorid	$LiCl$	31·67	1·192	1·4038	1·4062	1·4014	8·55
		20·00	1·117	1·3767	1·3792	1·3742	8·60
		9·93	1·057	1·3544	1·3564	1·3524	8·63
		5·14	1·029	1·3435	1·3455	1·3415	8·23
Natriumchlorid	$NaCl$	21·76	1·164	1·3706	1·3728	1·3684	8·89
		20·50	1·152	1·3691	1·3715	1·3667	9·05
		11·72	1·081	1·3524	1·3544	1·3504	9·11
		11·00	1·080	1·3520	1·3540	1·3500	8·92
		5·70	1·040	1·3425	1 3447	1·3403	8·70
Kaliumchlorid	KCl	18·43	1·119	1·3574	1·3596	1 3552	11·27
		15·31	1·099	1 3537	1·3558	1·3516	11·22
		15·00	1·098	1·3535	1·3556	1·3514	11 15
		5·75	1·035	1·3405	1·3425	1·3385	11·14
Kupferchlorid	$CuCl_2$	18·78	1·2033	1·3802	1·3830	1·3774	17·73
		10·26	1·1029	1·3574	1·3596	1·3552	17·85
Rubidiumchlorid ...	$RbCl$	14·13	1·1135	1·3473	1·3491	1·3452	12·62

Gelöste Substanz	Formel	Procentgehalt	Dichte	n Na	n Tl	n ·C	PR
Goldchlorid.......	$AuCl_3HCl+2H_2O$	18·48	1·130	1·3552	1·3577	1·3527	50·15
		11·64	1·085	1·3475	1·3498	1·3452	49·37
Goldchlorid	$AuCl_3HCl$	9·61	1·076	1·3471	1·3594	1·3448	42·72
		6·20	1·046	1·3417	1·3437	1·3397	43·77
		4·29	1·032	1·3392	1·3412	1·3372	42·72
		1·88	1·013	1·3360	1·3380	1·3340	43·32
Magnesiumchlorid .	$MgCl_2$	6·60	1·049	1·3478	1·3500	1·3456	16·36
		6·21	1·046	1·3467	1·3489	1·3445	17·54
		3·40	1·024	1·3402	1·3424	1·3380	15·60
Calciumchlorid	$CaCl_2$	13·0	1·110	1·3638	1·3659	1·3617	18·06
		6·9	1·056	1·3490	1·3510	1·3470	17·97
Zinkchlorid.......	$ZnCl_2$	21·47	1·201	1·3735	1·3756	1·3714	17·64
		9·67	1·088	1·3517	1·3536	1·3498	17·67
		8·70	1·079	1·3498	1·3518	1·3478	17·67
Cadmiumchlorid...	$CdCl_2$	14·02	1·130	1·3553	1·3573	1·3533	20·98
		13·92	1·129	1·3550	1·3570	1·3530	20·59
		7·54	1·067	1·3437	1·3466	1·3418	19·49
Baryumchlorid ...	$BaCl_2$	18·66	1·186	1·3633	1·3657	1·3609	21·93
		5·53	1·048	1·3409	1·3429	1·3380	21·78

Quecksilberchlorid .	$HgCl_2$	4·42	1·036	1·3364	1·3386	1·3342	20·82
Aluminiumchlorid . .	Al_2Cl_6	12·79	1·095	1·3647	1·3669	1·3625	50·32
		6·81	1·050	1·3501	1·3522	1·3480	49·85
Yttriumchlorid	YCl_3+6H_2O	13·11	1·084	1·3528	1·3548	1·3508	48·31
Vanadintetrachlorid	VCl_4	13·45	1·068	—	1·3557	1·3517 ?	35·98
Uranchlorid.	UCl_4	11·74	1·097	1·3466	1·3487	1·3445	40·63
Manganchlorür	$MnCl_2$	7·39	1·067	1·3495	1·3515	1·3475	17·86
		3·73	1·033	1·3425	1·3446	1·3404	18 90
Eisenchlorid	Fe_2Cl_6	13·60	1·119	1·3722	1·3752	1·3692	54·86
		7·83	1·068	1·3548	1·3574	1·3522	57 08
Nickelchlorid	$NiCl_2$	18·16	1·208	1·3831	1·3855	1·3807	17·33
		9·93	1·106	1·3586	1·3606	1·3566	17·35
Platinchlorid	$PtCl_6H_2+6H_2O$	18·00	1·129	1·3614	1·3639	1·3589	75·47
		9·00	1·063	1 3469	1·3491	1·3457	76 95
		4·50	1·031	1·3399	1·3419	1·3379	72·46
	$PtCl_6H_2$	2·16	1·014	1·3359	1·3379	1·3339	52·19
Natriumbromid	$NaBr$	10·00	1·080	1·3477	1·3500	1·3454	11·91
Kaliumjodid	KJ	36·92	1·356	1·3964	1·3991	1·3937	21·09

Gelöste Substanz	Formel	Procentgehalt	Dichte	n Na	n Tl	n C	*PR*
Natriumnitrat	$NaNO_3$	22·15	1·159	1·3590	1·3613	1·3567	11·33
Kaliumnitrat	KNO_3	14·86	1·099	1·3482	1·3504	1·3460	13·18
		7·40	1·048	1·3415	1·3435	1·3395	13·65
Kupfernitrat.......	$Cu(NO_3)_2$	28·59	1·311	1 3865	1·3911	1·3819	20·28
		15·95	1 156	1·3609	1·3632	1·3586	21·11
		14·12	1·135	1·3570	1·3592	1·3548	21·32
Silbernitrat	$AgNO_3$	27·55	1·289	1·3699	1·3724	1·3674	16·06
		15·25	1·143	1·3503	1·3523	1·3483	15·38
Zinknitrat	$Zn(NO_3)_2$	11·28	1·110	1·3532	1·3554	1·3510	20·94
Strontiumnitrat	$Sr(NO_3)_2$	30·61	1·2936	1·3765	1·3785	1·3745	23·76
		9·06	1·0729	1·3441	1·3462	1·3420	23·34
		2·85	1·0211	1 3364	1·3383	1·3345	22·99
Bleinitrat	$Pb(NO_3)_2$	18·05	1·180	1·3579	1·3601	1·3557	31 92
		17·63	1·175	1·3562	1·3584	1·3540	30·23
		15·23	1·147	1·3533	1·3556	1·3510	31·29
		9·48	1·088	1·3457	1·3477	1·3437	31·77
Thoriumnitrat	$Th(NO_3)_4$	8·02	1·064	1·3429	1·3450	1·3408	52·58

Eisennitrat........	$Fe_2(NO_3)_6$	16·65	1·133	1·3649	1·3673	1·3625	73·00
Cobaldnitrat	$Co(NO_3)_2$	3·12	1·030	1·3379	—	1·3354 ?	18·19
		1·41	1·013	1·3364	1·3384	1·3344	23·37
Natriumsulfat	Na_2SO_4	4·41	1·040	1·3406	1·3425	1·3387	14·67
Saures Kaliumsulfat	$KHSO_4$	15·71	1·117	1·3514	1·3534	1·3494	17·04
Kupfersulfat	$CuSO_4$	13·35	1·142	1·3570	1·3591	1·3549	14·26
		6·65	1·068	1·3442	1·3462	1·3422	14·60
Cäsiumsulfat	Cs_2SO_4	14·32	1·136	1·3510	1·3529	1·3491	34·05
Berylliumsulfat	$BeSO_4+7H_2O$	14·10	1·076	1·3491	1·3511	1·3471	36·90
Magnesiumsulfat...	$MgSO_4$	11·84	1·126	1·3579	1·3599	1·3559	13·58
		6·58	1·069	1·3470	1·3490	1·3450	13·49
Cersulfat	$Ce_2(SO_4)_3+6H_2O$	12·34	1·104	1·3506	1·3527	1·3485	79·71
Didymsulfat.......	$Di_2(SO_4)_3+8H_2O$	2·52	1·019	1·3368	1·3388	1·3348	88·81
Ferrosulfat........	$FeSO_4$	11·28	1·116	1·3548	1·3568	1·3528	17·69
		12·74	1·133	1·3576	1·3595	1·3557	17·31
Borsäure	H_3BO_3	3·46	1·0125	1·3359	1·3380	1·3338	12·01
Phosphorsäure	P_2O_5	4·76	1·037	1·3398	1·3417	1·3379	18·78
		2·39	1·018	1·3370	1·3390	1·3550	18·44

Gelöste Substanz	Formel	Procentgehalt	Dichte	n Na	n Tl	n C	PR
	H_3PO_4	17·30	1·102	1·3522	1·3542	1·3502	14·67
Chromsäure	CrO_3	15·32	1·1215	1·3770	—	1·3750 ?	20·06
		8·38	1·063	1·3558	—	1·3538 ?	20·01
		4·26	1·030	1·3441	—	1·3421 ?	18·89
Kaliumchromat	K_2CrO_4	18·41	1·161	1·3753	1·3788	1·3718	29·88
		12·79	1·109	1·3627	1·3656	1·3598	30·87
Selenige Säure	H_2SeO_3	13·87	1·121	1·3525	1·3546	1·3504	14·51
Kaliwolframat	K_2WO_4	9·66	1·091	1·3447	1·3467	1·3427	28·01
Kaliumacetat......	$KC_2H_3O_2$	12·56	1·064	1·3487	1·3508	1·3466	16·58
Baryumacetat	$Ba(C_2H_3O_2)_2$	21·20	1·163	1·3618	1·3638	1·3598	34·04
		12·79	1·096	1·3506	1·3526	1·3486	33·69

und berechnete unter der Annahme $Q = \Sigma q$ zunächst die Refractionsäquivalente derjenigen Metalle, deren Chlorverbindungen ich gemessen hatte.

Mit Hilfe dieser Atomrefractionen berechnete ich mir Mittelwerthe der Refractionsäquivalente von J, Br und der Gruppen NO_3, $(NO_3)_2$ und SO_4. Auf Grund dieser erhielt ich dann weitere Atomrefractionen.

Es ergaben sich

$$Q_{NO_3} = 8 \cdot 32,\ Q_{(NO_3)_2} = 15 \cdot 24 \text{ und } Q_{SO_4} = 8 \cdot 86.$$

Dabei war ich wegen zu grosser Abweichungen, welche die Ungiltigkeit des Summationsgesetzes deutlich zeigen, genöthigt, die betreffenden Eisenverbindungen auszuschliessen.

Ich berechnete mir dann umgekehrt die Werthe der Atomrefractionen des Eisens in diesen Verbindungen unter der Annahme, dass $Q_{(NO_3)_3} = 3 Q_{NO_3}$ und fand

aus Eisennitrat

$$q_{Fe} = 12 \cdot 04,$$

aus Ferrosulfat

$$q_{Fe} = 8 \cdot 64.$$

Um auch aus den übrigen Beobachtungen Atomrefractionen ableiten zu können, setzte ich nach Brühl $q_{0'} = 1 \cdot 506$ und $q_{0''} = 2 \cdot 328$.

Die Resultate all' dieser Berechnungen sind in Tabelle III nach dem periodischen System der Elemente geordnet angegeben.

Diese Tafel ergänzte und corrigirte ich noch auf Grund fremder Beobachtungen und erhielt so die Tabelle IV.

Für die Refractionsäquivalente von C, N, Br und J setzte ich die von Brühl angegebenen Werthe ein, die aus reichem Material berechnet sind.

Der Werth q_B ist von Ghira[1] aus einer Reihe von Beobachtungen bestimmt.

Die Refractionsäquivalente des Phosphors und Schwefels sind sehr variabel.

---

[1] Berl. Ber. 49. Bd., S. 31.

Tabelle III.

Refractionsäquivalente aus meinen Beobachtungen.

H 1·10									
Li 2·49	Be 2·21	B 4·18	C 2·31	N 3·79	O 1·51	F —			
				3·09	2·33				
Na 2·92	Mg 4·47	Al 7·00	Si —	P 5·47	S 2·82	Cl 6·01			
K 5·18	Ca 5·99	Sc —	Ti —	V 11·92	Cr 14·66	Mn 6·35	Fe 9·94	Co 5·54	Ni 5·31
Cu 5·76	Zn 5·63	Ga —	Ge —	As —	Se 7·78	Br 8 99			
Rb 6·61	Sr 8·12	Yt 8·13	Zr —	Nb —	Mo --		Ru —	Rh —	Pd --
Ag 7·40	Cd 8·32	In —	Sn —	Sb —	Te —	J 15·91			
Cs 12·59	Ba 9·83	Ca —	Ce 15·49	Di 16·35					
		Yb —		Ta —	W 11·61		Os --	Ir —	Pt 14·37
Au 17·71	Hg 8·79	Tl —	Pb 16·06	Bi —					
			Th 22·11		U 16·57				

Tabelle IV.

Die Refractionsäquivalente der Elemente.

H 1·10									
Li 2·49	Be 2·21	B 3·03	C 2·37	N 2·76	O 1·51	F —			
Na 2·92	Mg 4·47	Al 7·00	Si 3·60	P 7·30	S 8·52	Cl 6·01			
K 5·18	Ca 5·99	Sc —	Ti —	V 11·92	Cr 14·66	Mn 6·35	Fe 9·94	Co 5·54	Ni 5·31

Cu 5·76	Zn 5·63	Ga —	Ge —	As 8·93	Se 7·78	Br 8·86			
Rb 6·61	Sr 8·12	Yt 8·13	Zr —	Nb —	Mo —		Ru —	Rh —	Pd —
Ag 7·40	Cd 8·32	In —	Sn 9·17	Sb 12·32	Te —	J 13·81			
Cs 12·59	Ba 9·83	La —	Ce 15·49	Di 16·35					
		Yb —		Ta —	W 11·61		Os —	Ir —	Pt 14·37
Au 17·71	Hg 8·79	Tl 6·97	Pb 16·06	Bi 10·11					
			Th 22·11		U 16·57				

Tabelle V.

Die wahren specifischen Gewichte.

H 0·91									
Li 2·82	Be 4·11	B 3·59	C 5·05	N 5·08	O 10·57	F —			
Na 7·87	Mg 5·44	Al 3·86	Si 7·86	P 4·25	S 3·75	Cl 5·88			
K 7·54	Ca 6·66	Sc —	Ti —	V 4·29	Cr 3·58	Mn 8·63	Fe 5·62	Co 10·08	Ni 11·04
Cu 10·97	Zn 11·56	Ga —	Ge —	As 8·39	Se 10·15	Br 9·00			
Rb 12·89	Sr 10·75	Yt 10·93	Zr —	Nb —	Mo —		Ru —	Rh —	Pd —
Ag 14·50	Cd 13·43	In —	Sn 12·88	Sb 9·71	Te —	J 9·16			
Cs 10·54	Ba 13·92	La —	Ce 9·12	Di 8·87					
		Yb —		Ta —	W 15·81		O —	Ir —	Pt 13·52
Au 11·08	Hg 22·66	Tl 29·30	Pb 12·86	Bi 20·52					
			Th 10·49		U 14 49				

Tabelle III.

Refractionsäquivalente aus meinen Beobachtungen.

H 1·10									
Li 2·49	Be 2·21	B 4·18	C 2·31	N 3·79	O 1·51	F —			
				3·09	2·33				
Na 2·92	Mg 4·47	Al 7·00	Si —	P 5·47	S 2·82	Cl 6·01			
K 5·18	Ca 5·99	Sc —	Ti —	V 11·92	Cr 14·66	Mn 6·35	Fe 9·94	Co 5·54	Ni 5·31
Cu 5·76	Zn 5·63	Ga —	Ge —	As —	Se 7·78	Br 8 99			
Rb 6·61	Sr 8·12	Yt 8·13	Zr —	Nb —	Mo —		Ru —	Rh —	Pd —
Ag 7·40	Cd 8·32	In —	Sn —	Sb —	Te —	J 15·91			
Cs 12·59	Ba 9·83	Ca —	Ce 15·49	Di 16·35					
		Yb —		Ta —	W 11·61		Os —	Ir —	Pt 14·37
Au 17·71	Hg 8·79	Tl —	Pb 16·06	Bi —					
			Th 22·11		U 16·57				

Tabelle IV.

Die Refractionsäquivalente der Elemente.

H 1·10									
Li 2·49	Be 2·21	B 3·03	C 2·37	N 2·76	O 1·51	F —			
Na 2·92	Mg 4·47	Al 7·00	Si 3·60	P 7·30	S 8·52	Cl 6·01			
K 5·18	Ca 5·99	Sc —	Ti —	V 11·92	Cr 14·66	Mn 6·35	Fe 9·94	Co 5·54	Ni 5·31

Cu 5·76	Zn 5·63	Ga —	Ge —	As 8·93	Se 7·78	Br 8·86			
Rb 6·61	Sr 8·12	Yt 8·13	Zr —	Nb —	Mo —		Ru —	Rh —	Pd —
Ag 7·40	Cd 8·32	In —	Sn 9·17	Sb 12·32	Te —	J 13·81			
Cs 12·59	Ba 9·83	La —	Ce 15 49	Di 16·35					
		Yb —		Ta —	W 11·61		Os —	Ir —	Pt 14·37
Au 17·71	Hg 8·79	Tl 6·97	Pb 16·06	Bi 10·11					
			Th 22·11		U 16·57				

Tabelle V.

Die wahren specifischen Gewichte.

H 0·91									
Li 2·82	Be 4·11	B 3·59	C 5·05	N 5·08	O 10·57	F —			
Na 7·87	Mg 5·44	Al 3·86	Si 7·86	P 4·25	S 3·75	Cl 5·88			
K 7·54	Ca 6·66	Sc —	Ti —	V 4·29	Cr 3·58	Mn 8·63	Fe 5·62	Co 10·08	Ni 11·04
Cu 10·97	Zn 11·56	Ga —	Ge —	As 8·39	Se 10·15	Br 9·00			
Rb 12·89	Sr 10·75	Yt 10·93	Zr —	Nb —	Mo —		Ru —	Rh —	Pd —
Ag 14·50	Cd 13·43	In —	Sn 12·88	Sb 9·71	Te —	J 9·16			
Cs 10·54	Ba 13·92	La —	Ce 9·12	Di 8·87					
		Yb —		Ta —	W 15·81		O —	Ir —	Pt 13·52
Au 11·08	Hg 22·66	Tl 29·30	Pb 12·86	Bi 20·52					
			Th 10·49		U 14 49				

Tabelle VI.

Die Refractionsäquivalente nach Gladstone (n-Formel).

H 1·3 3·5									
Li 3·5	Be 5·0	B 4	C 5	N 4·1 5·3	O 2·8	F 1·6			
Na 4·4	Mg 6·7	Al 7·7	Si 7·4 6·8	P 18·3	S 16·0	Cl 9·9 10·7			
K 7·85	Ca 10·0	Sc —	Ti 24·6	V 24·8	Cr 15·3 23·0	Mn 11·5 26·2	Fe 11·6 20·1	Co 10·4	Ni 9·9 Pd 21·6
Cu 11·5	Zn 9·8	Ga 14·8	Ge —	As 15·4	Se 30·5	Br 15·3 16·4			
Rb 12·1	Sr 13·0	Yt —	Zr 21·2	Nb —	Mo —		Ru —	Rh 23·6	
Ag 13·2	Cd 13·1	In 17·4	Sn 27 19·2	Sb 24·1	Te —	J 24·5 27·2			
Cs 19·2	Ba 15·8	La 23·0	Ce 20·0	Di 23·1					
		Yb —		Ta —	W —		Os —	Ir —	Pt 24·7
Au 23·1	Hg 19·4 29·0	Tl 20·4	Pb 24·3 Th —	Bi 38·2	U 19·5				

Tabelle VII.

Die Refractionsäquivalente nach Gladstone (n^2-Formel).

H 0·87 2·33									
Li 2·19	Be 2·58	B 2·06	C —	N 2·24 2·83	O 1·86	F 1·06			
Na 2·82	Mg 3·97	Al 4·25	Si 4·30 3·95	P 8·54	S 10·37	Cl 6·56 6·74			
K 5·05	Ca 6·06	Sc —	Ti 6·50	V 7·66	Cr 5·71 6·65	Mn 4·76 6·35	Fe 4·75 5·83	Co 4·37	Ni 4·26

Cu 4·73	Zn 4·86	Ga 6·70	Ge —	As 7·30	Se 11·73	Br 8·67 9·38			
Rb 7·66	Sr 7·94	Yt —	Zr 10·81	Nb —	Mo —		Ru —	Rh 7·00	Pd 7·44
Ag 6·08	Cd 6·53	In 8·78	Sn 10·79 8·98	Sb 10·72	Te —	J 12·40 13·30			
Cs 11·75	Ba 9·47	La 11·35	Ce 15·60	Di 11·51					
		Yb —		Ta —	W —		Os —	Ir —	Pt 7·43
Au 7·81	Hg 8·80 10·76	Tl 9·71	Pb 10·82	Bi 13·09	U 8·16				

Tabelle VIII.

Die wahren specifischen Gewichte (nach Gladstone).

H 1·15 0·43									
Li 3·20	Be 3·49	B 5·34	C —	N 6·25 4·95	O 8·58	F 17·84			
Na 8·18	Mg 6·05	Al 6·35	Si 7·14 6·58	P 3·63	S 3·09	Cl 5·36 5·25			
K 7·74	Ca 6·60	Sc —	Ti 7·38	V 6·80	Cr 9·10 7·89	Mn 11·56 8·66	Fe 11·80 9·62	Co 13·42	Ni 13·27
Cu 13·32	Zn 13·37	Ga 10·44	Ge —	As 10·26	Se 6·73	Br 9·21 8·53			
Rb 11·12	Sr 10·96	Yt —	Zr 8·37	Nb —	Mo —		Ru	Rh 14·90	Pd 14·31
Ag 17·71	Cd 17·15	In 13·00	Sn 10·93 13·11	Sb 11·20	Te —	J 10·19 9·51			
Cs 11·28	Ba 14·47	La 12·20	Ce 13·64	Di 12·55					
		Yb —		Ta —	W —		Os —	Ir —	Pt 26·11
Au 25·11	Hg 22·73 18·59	Tl 21·00	Pb 19·10	Bi 15·85	U 29·4				

Die Refraction des S hat Nasini[1] genau untersucht und erhielt sehr abweichende Werthe.

Für Phosphor schwankt nach Zecchini[2] $p.f(r)$ zwischen 3 und 11.

Ich nahm für diese Elemente die Werthe aus den Chloriden, um möglichst vergleichbare Zahlen zu erhalten, und zwar für S nach Nasini,[3] für P nach Haagen[4] und Becquerel.[5]

Die Werthe der Refractionsäquivalente für Tl, Bi, Sb, Si, Sn und As berechnete ich mir aus folgenden Angaben:

In Landolt's Tabellen fand ich die Brechungsexponenten von Tl nach Quercken[6] und von Bi_2O_3 nach Kundt, in den vorhin erwähnten Abhandlungen von Haagen und Becquerel die n von $SbCl_5$, $SiCl_4$, $SnCl_4$ und $AsCl_3$. Die Dichten nahm ich aus Landolt's Tabellen.

Für Fluor ergibt sich aus F_2Ca nach Sarasin,[7] Mühlheims[8] und Becquerel der Werth $q_F = 0{\cdot}21$.

Diesen nahm ich jedoch nicht in die Tabelle auf, weil ich ihn für unvergleichbar mit denen der übrigen Elemente halte.

Für die Refraction der restirenden Elemente fand ich keinerlei Angaben.

Aus den Refractionsäquivalenten in Tabelle IV habe ich die wahren specifischen Gewichte oder richtiger die Ausdrücke $\frac{p}{q}$ abgeleitet und in Tabelle V zusammengestellt.

Der Bruch $\frac{p}{q}$ ergibt sich für Gold, Platin und Eisen kleiner als das gewöhnliche, scheinbare specifische Gewicht, kann also in diesen Fällen unmöglich das wahre bedeuten.

Dies beweist, dass entweder die Theilchen dieser Elemente nicht kugelig oder dass in diesen Fällen die angegebenen q nicht

---

[1] U. a. Wied. Beibl. VII, S. 281.

[2] Berl. Ber. 49, S. 32.

[3] Rend. d. R. Acad. IV, a, 6, 1880.

[4] Pogg. Ann. 131, 117, 1867.

[5] Berl. Ber. 33, 539.

[6] Wied. Beibl. VIII, S. 407.

[7] Arch. d. sc. phys. nat. Genève 1883.

[8] Groth, Zeitschr. für Kryst. 1888.

die wirklichen Atomrefractionen, sondern bloss Functionen davon sind.

Die Anordnung nach dem periodischen System der Elemente habe ich deshalb gewählt, weil man dabei den Zu-

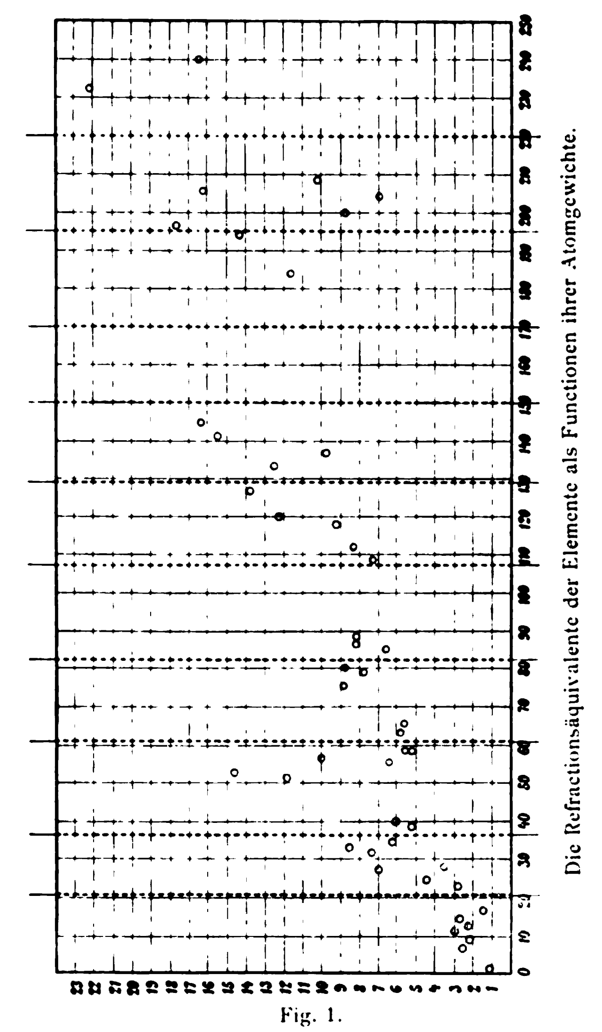


Fig. 1.

sammenhang zwischen Refractionsäquivalent und Atomgewicht besser übersieht.

Es zeigt sich für q und $\frac{r}{q}$ im Allgemeinen ein Anwachsen der Werthe nach rechts und unten.

Über die Art desselben geben die Figuren 1 und 2 Aufschluss, in denen ich q und $\frac{p}{q}$ als Functionen des Atomgewichtes darstellte.

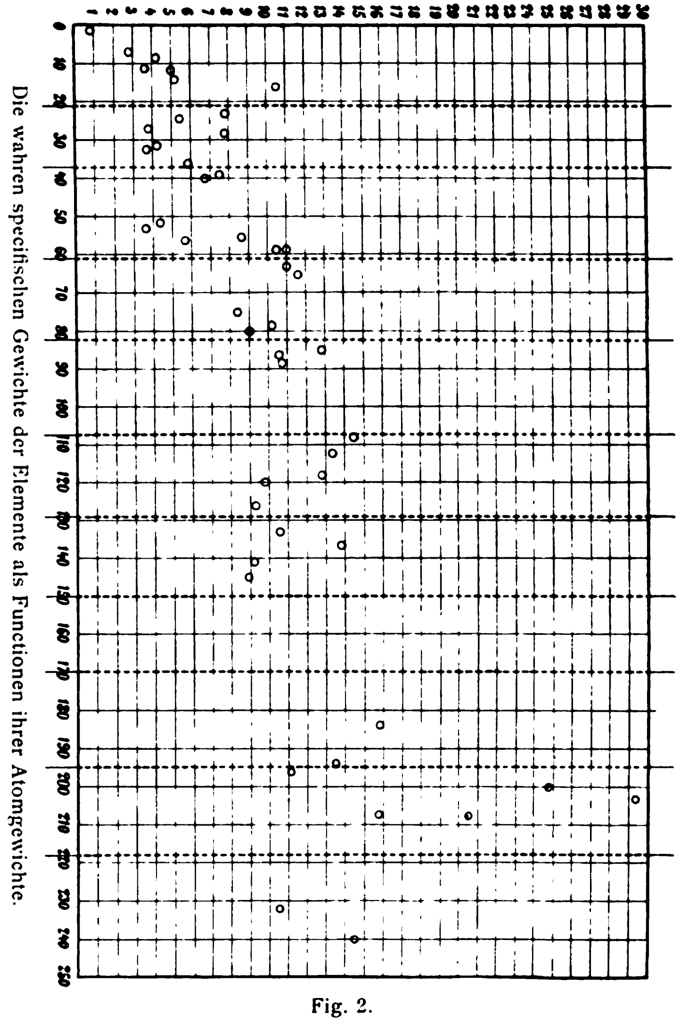


Fig. 2.

Die Grenzen der einzelnen Elementegruppen sind durch Striche gekennzeichnet.

Im Allgemeinen scheint mir das Ansteigen der Refractionsäquivalente in Kettenlinien vor sich zu gehen, die ihre Minima

an den Grenzen der Gruppen, ihre Maxima in deren Mitte haben.

Der erste, der einen derartigen Zusammenhang erkannte, war Gladstone.[1]

Tabelle VI enthält dessen oben erwähnte Tafel der Refractionsäquivalente. Darin entsprechen die Doppelzahlen verschieden constituirten Verbindungen.

Um Gladstone's Tafel mit meiner vergleichbar zu machen, habe ich sie auf die n^2-Formel umgerechnet und gebe in Tabelle VII die Resultate an.

In Tabelle VIII sind die entsprechenden Werthe der specifischen Gewichte oder besser der Ausdrücke $\frac{p}{q}$ zusammengestellt. Diese sind sämmtlich grösser als die gewöhnlichen specifischen Gewichte.

Die Figuren 3, 4 und 5 geben die Werthe der Tabellen VI, VII und VIII als Functionen der Atomgewichte. Dabei sind die Doppelpunkte durch Striche mit einander verbunden, die, wie man sieht, bei Anwendung der n^2-Formel bedeutend kürzer werden.

Die Refractionsäquivalente d. Elemente n. Gladstone (n-Formel) als Functionen ihrer Atomgewichte.

Fig. 3.

Fig. 4 zeigt deutliche Kettenlinien und grössere Maxima in jeder zweiten Gruppe.

[1] Wied. Beibl. IX, S. 113, 1885.

Leider habe ich über das Beobachtungsmaterial, welches der Tafel Gladstone's zu Grunde liegt, keine Kenntniss.

Es wäre nicht uninteressant zu erfahren, ob die Menge der Beobachtungen oder eine specielle Auswahl zu diesen Regelmässigkeiten führten.

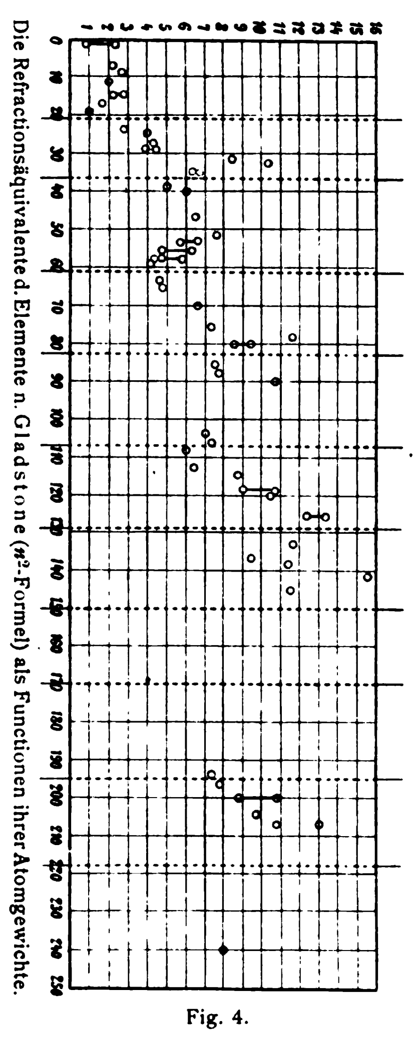


Fig. 4.

Im Verlauf meiner Untersuchungen habe ich mir nach Brechungsexponenten wiederholt Refractionsäquivalente berechnet, die nur zum Theil allgemein bekannt sein dürften.

Daher habe ich meine Resultate in Tabelle IX zusammengestellt. Dabei liegt wieder das Summationsgesetz zu Grunde.

Tabelle IX.

I. Refractionsäquivalente von Elementen.

1. Gasförmig.

Element	Beobachter	q
H	Ketteler[1]	1·05
O	Mascart[1]	2·02
N	»	2·22
Cl	»	5·78
Br	»	8·46
J	Hurion[2]	15·32
P	Le Roux[3]	4·99
S	»	4·05
As	»	4·13
Hg	»	8·11

[1] Brühl, Zeitschr. für physikal. Chemie, 7, 1891, S. 25.
[2] Berl. Ber. XXXIII, S. 444.
[3] Berl. Ber. XVII, S. 235.

2. Flüssig.

Element	Beobachter	Lichtart	q
Br	Becquerel[1]	Li	8·88
P	Gladstone und Dale[2]	roth	8·99
»	Damien[3]	»	9·10

Die wahren specifischen Gewichte der Elemente nach Gladstone als Functionen der Atomgewichte.

Fig. 5.

[1] Berl. Ber. XXXIII, S. 539.

[2] Phil. Mag. (4), XVIII; Berl. Ber. XV, 210.

[3] Journ. d. Phys. 10, 1881.

3. Fest.

Element	Beobachter	Lichtart	q
C	Schrauff[1]	*C*	2·14
Ni	Du Bois und Rubens[1]	roth	3·20
Co	»	»	5·06
Fe	Drude[1]	*D*	5·28
Zn	»	»	4·86
Hg	»	»	5·89
Pb	»	»	9·16
Pt	»	roth	3·72
Ag	Beer[1]	—	6·83
P	Gladstone und Dale[2]	*A*	9·04
Se	Sirks[3]	—	10·98
Se	Becquerel[4]	—	12·45

II. Refractionsäquivalente von Verbindungen.

1. Flüssig.

Substanz	Beobachter	Lichtart	Q
CCl_4	Haagen[5]	*A*	25·69
$CHCl_3$	»	»	20·75
$C_2H_4Br_2$	»	»	25·96
CH_3J	»	»	18·41
CS_2	»	»	19·95
S_2Cl_2	»	»	28·97
CS_2	Ketteler[6]	*C*	21·08
$SOCl_2$	Nasini[7]	»	21·80
SO_2Cl_2	»	»	21·20
SO_3HCl	»	»	17·23
$PSCl_3$	Kanonnikoff[7]	»	32·07

[1] Landolt und Börnstein, Physikal.-chem. Tabellen, II. Aufl., S. 384.
[2] Phil. Mag. (4), XVIII; Berl. Ber. XV, S. 210.
[3] Berl. Ber. XXVII, S. 324; Pogg. Ann. 143, S. 429.
[4] Berl. Ber. XXXIII, S. 539.
[5] Pogg. Ann. CXXXI, S. 117; Berl. Ber. XXIII, S. 230.
[6] Wied. Ann. der Physik und Chemie, 35.
[7] Landolt und Börnstein, Physikal.-chem. Tabellen, 2. Aufl., 1894, S. 424.

2. Fest

Substanz	Beobachter	Lichtart	Q
$NaCl$	Haagen[1]	A	8·28
$NaCl$	Bedson und Williams[2]	»	8·24
$Na_2B_4O_7$	»	»	25·61
KCl	Stefan[3]	C	10·75
KCl	Grailich[3]	»	10·55
NH_4Cl	»	»	12·61
K_2SO_4	Topsoe und Christiansen[4]	»	19·04
KBr	»	»	14·19
KJ	»	»	19·92
NH_4J	»	»	22·70
$Ba(NO_3)_2$	»	»	26·30
$NiSO_4+6H_2O$	»	»	40·55
$Pb(NO_3)_2$	»	»	31·29
$Sr(NO_3)_2$	Fock[3]	»	23·24
$AgCl$	Des Cloiseaux[5]	—	13·51
As_2O_3	»	—	21·80
$AgCl$	Wernicke[6]	—	13·32
$AgBr$	»	—	16·68
AgJ	»	—	22·75
Cu_2O	»	B	15·30
CuO	Kundt[3]	—	8·31
Ni_2O_3	»	roth	19·05

III. Refractionsäquivalente von Verbindungen aus wässerigen Lösungen.

Substanz	Procentgehalt	Beobachter	Lichtart	Q
$LiCl$	40·06	Beer und Kremers[7]	roth	8·55
$NaCl$	26·15	»	»	9·56
KCl	23·7	»	»	11·90

[1] Pogg. Ann. CXXXI, S. 117; Berl. Ber. XXIII, S. 230.

[2] Wied. Beibl. VI, S. 91.

[3] Landolt und Börnstein, Physikal.-chem. Tabellen, 2. Aufl., 1894 S. 424.

[4] Ann. d. ch. ph., (5), I, 1874.

[5] Wied. Beibl. VII, S. 25.

[6] Berl. Ber. XXVII, S. 326.

[7] Pogg. Ann. CI, S. 133.

Substanz	Procent-gehalt	Beobachter	Lichtart	Q
$CaCl_2$	40·41	Beer und Kremers[1]	roth	19·15
$SrCl_2$	32·00	»	»	20·97
$BaCl_2$	24·30	»	»	24·38
NaBr	45·18	»	»	13·15
KBr	37·69	»	»	15·53
$CaBr_2$	55·88	»	»	23·24
NaJ	58·04	»	»	19·41
KJ	55·09	»	»	21·02
NaCl	20	Sauber[2]	B	8·82
KCl	20	»	»	10·01
KBr	15	»	»	15·23
KJ	20	»	»	18·79
$BaCl_2$	21	Forster[3]	D	24·13
$Na_2B_4O_7$	2·65	»	»	29·02
Na_2SO_4	14·1	»	»	14·81
$NaNO_3$	42·9	»	»	11·21
$AgNO_3$	57·87	»	»	15·77
»	29·01	»	»	15·26
»	15·80	»	»	15·94
$Pb(NO_3)_2$	31·6	»	»	30·59
»	14·3	»	»	31·48
$MgSO_4$	18·02	»	»	11·21
KJ	20·00	Jamin[4]	—	17·13
NaCl	13·6	Bedson und Williams[5]	A	8·42
$MgCl_2$	37·44	Becquerel[6]	D	18·60
NaCl	25	Schütt[7]	$\lambda = \infty$	8·86
»	15	»	»	8·84
»	3	»	»	8·84
KOH	40·4	Fraunhofer[7]	C	6·46
NaOH	34·74	Willigen[7]	»	5·52
»	18·50	»	»	5·67
$NaNO_3$	44·35	»	$\lambda = \infty$	10·79
»	16·86	»	»	10·61
NH_4Cl	24·83	»	»	12·79

[1] Pogg. Ann. CI, S. 133.
[2] Pogg. Ann. CXVII, S. 577.
[3] Wied. Beibl. V, S. 656.
[4] C. R. XXXI; Berl. Ber. VI, VII, 391.
[5] Wied. Beibl. VI, S. 91.
[6] Berl. Ber. XXXIII, S. 539.
[7] Landolt und Börnstein's Tabellen, S. 440.

Substanz	Procent-gehalt	Beobachter	Lichtart	Q
NH_4Cl	9·72	Willigen[1]	λ = ∞	12·74
$CaCl_2$	40·64	»	»	17·68
»	16·75	»	»	17·87
$ZnCl_2$	35·98	»	C	17·33
»	23·00	»	»	17·53
HCl	34·41	»	λ = ∞	7·87
HNO_3	50·48	»	»	9·32
H_2SO_4	88·97	»	C	13·32
»	85·98	»	»	13·43
»	81·41	»	»	13·32
»	71·97	»	»	13·45
»	30·10	»	»	13·25
»	4·46	»	»	16·93

Am Schlusse dieser Zeilen drängt es mich, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Franz Exner, der mich zu dieser Arbeit anregte und meine Untersuchungen durch seinen bewährten Rath in liebenswürdigster Weise förderte, meinen innigen Dank auszusprechen.

[1] Landolt-Börnstein's Tabellen, S. 440.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. VIII. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XIX. SITZUNG VOM 8. OCTOBER 1896.

Erschienen sind im Laufe der akademischen Ferien:

Sitzungsberichte, Bd. 105 (1896), Abth. I, Heft III und IV (März und April); Abth. II. a, Heft V und VI (Mai und Juni); Abth. II. b, Heft V—VII (Mai bis Juli) und Abth. III, Heft I—V (Jänner bis Mai).

Monatshefte für Chemie, Bd. 17 (1896), Heft V—VII (Mai bis Juli) und Heft VIII (August).

Denkschriften, Bd. 63 (1896) und die Collectiv-Ausgabe: Tiefseeberichte (V. Reihe); ferner der

Akademische Almanach, 46. Jahrgang (1896).

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Prof. E. Suess, begrüsst die Classe bei Wiederaufnahme der Sitzungen nach den akademischen Ferien und heisst das neueingetretene Mitglied Herrn Prof. Franz Exner herzlich willkommen.

Hierauf gedenkt der Vorsitzende der Verluste, welche die kaiserl. Akademie und speciell diese Classe seit der letzten Sitzung durch das Ableben zweier ausländischer correspondirender Mitglieder erlitten hat, und zwar am 9. Juli l. J. durch den Tod des Geheimen Bergrathes Prof. Dr. Heinrich Ernst Beyrich in Berlin und am 13. Juli l. J. durch den Tod des Herrn Prof. Dr. August Kekulé in Bonn.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide an diesen Verlusten durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär verliest den h. Curatorial-Erlass vom 20. August 1896, Nr. 110, in welchem mitgetheilt wird, dass

Se. k. und k. Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog Rainer als Curator der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften die von derselben in ihrer a. o. Gesammtsitzung vom 1. Juni d. J. beschlossenen Änderungen der §§. 46, 64, 66, 67 und 71 ihrer Geschäftsordnung mit höchster Entschliessung vom 14. August d. J. genehmigend zur Kenntniss genommen habe.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus: die Herren Professoren Zd. H. Skraup in Graz und F. Exner in Wien für ihre Wahl zu wirklichen Mitgliedern und Herr Prof. J. Pernter in Innsbruck für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit des Herrn Rudolf Ziegelbauer in Graz: »Über das Ortho-Phenylenbiguanid«.

Das c. M. Herr Prof. R. v. Wettstein übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die europäischen Arten der Gattung *Gentiana* aus der Section *Endotricha* Froel. und ihr entwicklungsgeschichtlicher Zusammenhang.«

Das c. M. Herr Prof. Hans Molisch übersendet eine Arbeit unter dem Titel: »Die Ernährung der Algen« (Süsswasseralgen, II. Abhandlung).

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Über eine neue Folgerung aus der Maxwell'schen Theorie der elektrischen Erscheinungen«, von Dr. Anton Scheye in Berlin.
2. »Über regelmässige und unregelmässige Körper«, von Herrn H. Friedrich, Ingenieur in Pilsen.

Das w. M. Herr Prof. Friedrich Brauer legt eine genaue Beschreibung mehrerer exotischer Oestriden-Larven vor, welche Herr Oskar Neumann in Afrika gefunden hat.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Prince Albert I[er], Prince de Monaco, Résultats des Campagnes Scientifiques accomplie sur Son Yacht »Hirondelle«. Publiés sous la direction avec le concours de M. Jules Richard, chargé des Travaux zoologiques à bord. Fascicule X. Poissons provenant des campagnes 1885—1888 par R. Collett. (Avec 6 planches.) Monaco, 1896; Folio.

Sevětínský J., Dějiny Lesů v Čechách. V Písku, 1895; 8°.

XX. SITZUNG VOM 15. OCTOBER 1896.

Herr Prof. G. G. Stokes in Cambridge spricht den Dank aus für seine Wahl zum ausländischen Ehrenmitgliede dieser Classe.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann übersendet folgende zwei Arbeiten aus dem III. chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Dr. Paul Cohn:

1. »Über Chinolin-Phenoläther«.
2. »Über die Aufspaltung des Cyclophenylenbenzylidenoxyds«.

Herr Dr. Friedrich Junker in Urach (Württemberg) übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: »Die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variablenpaare ternärer Formen. Tafeln der ternären symmetrischen Functionen vom Gewicht 1 bis 6«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium: »Über die Einwirkung von wässeriger Kalilauge und gesättigter Pottaschelösung auf Isobutyraldehyd« von M. Brauchbar.

XXI. SITZUNG VOM 22. OCTOBER 1896.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen ihren Dank aus die Herren Professoren Dr. J. v. Hepperger in Graz für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede und Dr. J. H. van 't Hoff in Berlin für seine Wahl zum ausländischen correspondirenden Mitgliede dieser Classe.

Herr Dr. Emil Holub übersendet eine Abhandlung des Herrn Fr. Klapálek, k. k. Gymnasiallehrer in Wittingau: »Über die Geschlechtstheile der Plecopteren, mit besonderer Rücksicht auf die Morphologie der Genitalanhänge«.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen«, von Herrn Karl Carda, Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.
2. »Über die Theilung der Geraden und der Winkel«, von Herrn Anton Nadachowski, Ingenieur der k. k. Staatsbahnen in Ebensee.

Das w. M. Herr Prof. C. Grobben überreicht eine Arbeit des Herrn Dr. Th. Pintner in Wien, betitelt: »Studien an Tetrarhynchen nebst Beobachtungen an anderen Bandwürmern. II. Mittheilung: Über eine Tetrarhynchenlarve aus dem Magen von *Heptanchus* nebst Bemerkungen über das Excretionssystem verschiedener Cestoden«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. A. Franke: »Über die Einwirkung von alkoholischem Natron auf Isobutyraldehyd«.

Herr Prof. Lieben überreicht ferner eine Abhandlung des Herrn Dr. Ad. Jolles: »Über eine quantitative Methode zur Bestimmung des Bluteisens zu klinischen Zwecken«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht folgende fünf Abhandlungen:

1. »Magnetisirung nach zwei Dimensionen und magnetische Hysteresis im Drehfelde«, von Prof. August Grau und Dr. Richard Hiecke.
2. »Über die Grenzen des stereoskopischen Sehens«, von Dr. Friedrich Wächter.
3. »Über die Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmten gegebenen Zeit«, von Herrn Oberst Alois Indra.
4. »Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase«, von Dr. Gustav Jäger.
5. »Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme«, von Herrn Fritz Hasenoehrl.

Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen

von

Karl Carda in Brünn.

Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y, z) \\ y' &= \psi(x, y, z) \\ z' &= \chi(x, y, z), \end{aligned} \tag{1}$$

wobei φ, ψ, χ unabhängige Functionen der Argumente x, y, z bedeuten, wird eine Punkttransformation des Raumes (x, y, z) bestimmt. Wir können die Frage aufwerfen, wann die Transformationen (1) alle Flächeninhalte invariant lassen. Nach einem allgemeinen Princip Lie's folgt dann, dass die Transformationen (1) eine Gruppe bilden.

Wir können unsere Fragestellung in einfacher Weise erledigen, wenn wir eine von Herrn C. Neumann mitgetheilte Formel heranziehen. Im Punkte x, y, z construiren wir ein Flächenelement, dessen Normale die Richtungscosinus a, b, c besitzt. Der Flächeninhalt desselben sei ds. Vermöge (1) geht x, y, z in x', y', z'; a, b, c in a', b', c' und ds in ds' über. Die erwähnte Formel lautet dann:

$$\frac{ds'}{ds} = - \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & \alpha \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & \beta \\ \chi_x & \chi_y & \chi_z & \gamma \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

wobei die partiellen Ableitungen in bekannter Weise bezeichnet sind.[1]

Um zu bestimmen, wie a, b, c transformirt werden, legen wir durch das erste Flächenelement eine Fläche, welche dann vermöge (1) in eine Fläche durch das zweite Flächenelement übergeht. Es bestehen daher die Gleichungen:

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &= 0 \\ dz' - p'dx' - q'dy' &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Um die Rechnung elegant zu gestalten, behalten wir die Cartesischen Punktcoordinaten x, y, z bei, ersetzen aber p und q durch homogene Coordinaten:

$$p \equiv -\frac{p_1}{p_3}, \qquad q \equiv -\frac{p_2}{p_3}.$$

Wir erhalten somit aus (3)

$$\begin{aligned} p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz &= 0 \\ p_1' dx' + p_2' dy' + p_3' dz' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Aus diesem System erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (1), indem wir noch über einen Factor passend verfügen, die Formeln:

$$\begin{aligned} p_1' &= \begin{vmatrix} p_1 & \psi_x & \chi_x \\ p_2 & \psi_y & \chi_y \\ p_3 & \psi_z & \chi_z \end{vmatrix}, \\ p_2' &= \begin{vmatrix} \varphi_x & p_1 & \chi_x \\ \varphi_y & p_2 & \chi_y \\ \varphi_z & p_3 & \chi_z \end{vmatrix}, \\ p_3' &= \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x & p_1 \\ \varphi_y & \psi_y & p_2 \\ \varphi_z & \psi_z & p_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

---

[1] Carl Neumann, Zwei Sätze über correspondirende Flächenelemente. Berichte der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1876, S. 253—255, oder Math. Annalen, Bd. 11, S. 306—308.

Setzen wir in (2)

$$\frac{ds'}{ds} = 1$$

und drücken wir $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ in bekannter Weise durch $p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'$ aus, so erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z & p_1' \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z & p_2' \\ \chi_x & \chi_y & \chi_z & p_3' \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}^2 = (p_1^2+p_2^2+p_3^2)(p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2). \tag{6}$$

Die Gleichungen (5) und (6) sind die **Definitionsgleichungen der gesuchten Gruppe.**

Entwickeln wir die Determinante in (6) nach den Elementen der letzten Colonne, so erhalten wir die einfache Beziehung

$$p_1'^2+p_2'^2+p_3'^2 = p_1^2+p_2^2+p_3^2. \tag{7}$$

Hieraus folgt:

Die Coordinaten p_1, p_2, p_3 werden von der gesuchten Gruppe orthogonal transformirt.

Statt der durch die Gleichungen (5) bestimmten Transformation T der Coordinaten p_1, p_2, p_3 betrachten wir die zu ihr inverse T^{-1}, welche gleichfalls orthogonal ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi_x p_1' + \psi_x p_2' + \chi_x p_3' \\ p_2 &= \varphi_y p_1' + \psi_y p_2' + \chi_y p_3' \\ p_3 &= \varphi_z p_1' + \psi_z p_2' + \chi_z p_3'. \end{aligned} \tag{8}$$

Bezeichnet man mit q_1', q_2', q_3' die Coordinaten eines zweiten durch den Punkt x', y', z' gelegten Flächenelementes, so geht dieses vermöge T^{-1} in ein Flächenelement q_1, q_2, q_3 durch den Punkt x, y, z über. Durch eine einfache Rechnung erkennt man das Bestehen der Gleichung

$$p_1'q_1' + p_2'q_2' + p_3'q_3' = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3. \tag{9}$$

Hieraus schliesst man mit Rücksicht auf die Gleichung (7):

Die gesuchte Gruppe des Raumes ist conform.

Jede conforme Transformation des Raumes führt aber Kugel in Kugel über.[1] Unsere Gruppe soll alle Flächeninhalte invariant lassen. Hieraus folgt:

Die gesuchte Gruppe führt Kugeln in congruente Kugeln über.

Hiemit ist das Ziel unserer Betrachtungen erreicht.

Theorem I: Die einzigen Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen, sind die Bewegungen desselben.

Corollar: Die Bewegungen des Raumes lassen sich als die Punkttransformationen des Raumes definiren, welche alle Flächeninhalte invariant lassen.

Wir fügen noch das folgende Theorem hinzu, unterdrücken jedoch den einfachen Beweis.

Theorem II: Die einzigen Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte nach constantem Verhältniss ändern, sind die Ähnlichkeitstransformationen desselben.

Zwei andere Beweise des ersten Theorems werde ich in den Monatsheften für Mathematik und Physik veröffentlichen.

---

[1] Über die interessanten conformen Transformationen des Raumes vergleiche man Lie, Geometrie der Berührungstransformationen. Erster Band, Leipzig, 1896, 10. Capitel.

Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 3 Textfiguren.)

Wir denken uns ein Gas, dessen Molekeln materielle Punkte sind, welche nur dann eine beträchtliche Anziehungskraft auf einander ausüben, wenn sie einander sehr nahe kommen, bei einer bestimmten Annäherung schlage jedoch die Anziehung in eine sehr grosse Abstossung um. Wir acceptiren also die geläufigen Anschauungen über die Materie. Wir können demnach die gewöhnliche Vorstellung der Wirkungssphäre anwenden und einen Zusammenstoss zweier Molekeln als den Eintritt der einen in die Wirkungssphäre der anderen bezeichnen.

Wir nehmen an, dass das Gas nicht sehr dicht sei, so dass der Fall, dass gleichzeitig drei Molekeln in Wechselwirkung treten, gegenüber einem gewöhnlichen Zusammenstoss zweier Molekeln nur selten vorkommt. In höherem Grade selten ist dann die gleichzeitige Wechselwirkung von vier, fünf Molekeln u. s. w. Diese Fälle wollen wir daher nicht in Betracht ziehen, indem wir annehmen, dass in Folge ihrer Seltenheit sie auf die Druckverhältnisse des Gases von nicht wahrnehmbarem Einflusse sind.

So oft zwei Molekeln zusammenstossen, beschreiben sie um einander eine Centralbewegung und gehen dann wieder aus einander. Die mittlere Zeit, welche dabei während der Wechselwirkung verstreicht, ist abhängig von der relativen Geschwindigkeit und der Grösse der Kraft der Molekeln. Je

grösser letztere ist, desto weniger wird die relative Geschwindigkeit für die Dauer des Stosses von Einfluss sein. Wir wollen daher in erster Annäherung annehmen, es sei die Temperatur — denn durch diese ist ja die relative Geschwindigkeit bedingt — auf die Stossdauer nicht von Einfluss. Damit ist gleichzeitig gesagt, dass auch die Kraft, welche die Molekeln auf einander ausüben, von der Temperatur unabhängig ist.

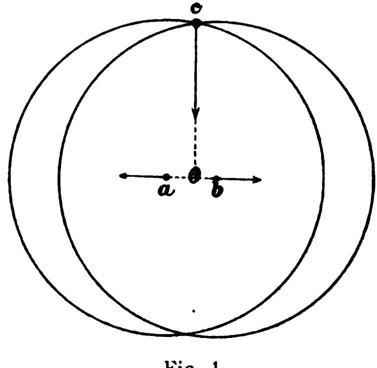


Fig. 1.

Treffen gleichzeitig drei Molekeln zusammen, so werden sie im Allgemeinen ebenfalls eine Centralbewegung um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beschreiben und dann in geradlinigen Bahnen wieder auseinandergehen. Doch ist jetzt auch der Fall möglich, dass zwei Molekeln dauernd zusammenbleiben, d. h. dass die eine die Wirkungssphäre der anderen nicht mehr verlässt. Wir wollen uns einen solchen Fall im Folgenden vor Augen führen.

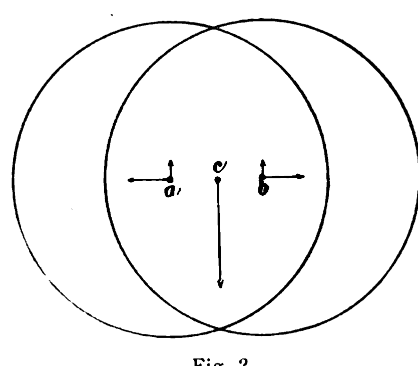


Fig. 2.

Zwei Molekeln a und b seien central auf einander geflogen und gehen nun nach entgegengesetzten Richtungen aus einander. Solange sich beide noch in Wechselwirkung befinden, komme eine dritte Molekel c mit einer Geschwindigkeit, welche gegen den Schwerpunkt der beiden andern gerichtet ist und auf deren Centrilinie senkrecht steht, in die Wirkungssphären von a und b. Dieser Zeitpunkt, in welchem c in die Wirkungssphären von a und b eintritt, ist in Fig. 1 dargestellt.

Von nun an erfährt c eine Beschleunigung gegen den Schwerpunkt. Desgleichen erhalten a und b ausser der durch

ihre eigene Anziehungskraft bewirkten noch eine Verzögerung durch die Wirkung von *c* in der Richtung der Centrilinie und eine Beschleunigung senkrecht darauf. Dies dauert so lange, bis *c* den Schwerpunkt passirt. Diesen Zeitpunkt zeigt Fig. 2.

c besitzt jetzt eine grössere Geschwindigkeit als zu Beginn der Wechselwirkung. Dieselbe wird aber von nun ab verringert. Desgleichen wird die relative Geschwindigkeit von *a* und *b* nicht nur durch ihre eigene Anziehungskraft, sondern auch durch die Wirkung der Molekel *c* weiter verringert, bis schliesslich *c* die Wirkungssphäre von *a* und *b* verlässt. Die gegenseitige Lage in diesem Zeitpunkt ist durch Fig. 3 ersichtlich gemacht.

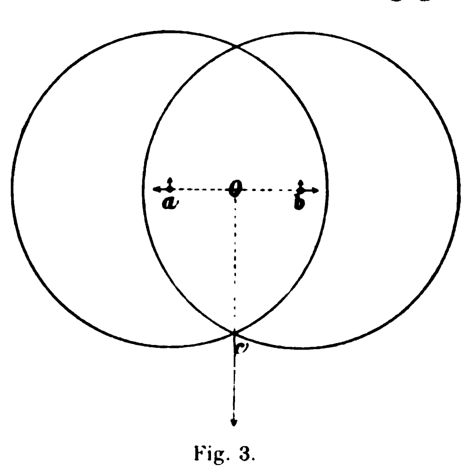


Fig. 3.

c verlässt mit grösserer Geschwindigkeit die Wirkungssphäre, als es in dieselbe eingetreten ist, da, wie aus den Figuren leicht ersichtlich, der Weg sowohl, auf welchem, als auch die Kraft, mit welcher *a* und *b* auf *c* beschleunigend wirken, grösser ist als die entsprechenden Factoren der Verzögerung. Desgleichen hat der Schwerpunkt von *a* und *b* eine Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung erfahren. Die dazu nöthige Energie ist auf Kosten der Bewegung von *a* und *b* in der Richtung ihrer Centrilinie genommen worden. Dieser Verlust kann nun so gross sein, dass die Molekeln bereits zu relativer Ruhe kommen, bevor sie ausser Wechselwirkung treten. Sie werden dann in Folge der Anziehungskräfte wieder gegen einander fliegen und nun eine Art schwingender Bewegung gegen ihren gemeinsamen Schwerpunkt machen, ohne je wieder ausser Wechselwirkung zu treten, wenn nicht irgend eine äussere Kraft dies bewerkstelligt.

Aus den Figuren 1, 2 und 3 geht unmittelbar hervor, dass bei vollständiger Umkehr der Bewegung eine Doppelmolekel

durch Dazwischenkunft einer einfachen getrennt werden kann, so dass wir hier die Möglichkeit einer Dissociation gegeben haben. Wie sich nun in der Zeiteinheit eine ganz bestimmte Zahl von Doppelmolekeln bilden kann, so wird auch eine ganz bestimmte Zahl derselben dissociirt.

Wollen wir nun wissen, wie oft eine Vereinigung zweier Molekeln in der Secunde vorkommt, so handelt es sich darum, die Zahl der Fälle zu suchen, wo gleichzeitig drei Molekeln in Wechselwirkung treten. Wir wissen bereits, dass dieser Fall gegenüber dem, dass zwei Molekeln zusammenstossen, selten vorkommt. Haben wir in der Volumeinheit unseres Gases N_1 einfache Molekeln, so ist die Zahl der Zusammenstösse, welche dieselben in der Secunde unter einander machen, den Grössen N_1^2 und $\sqrt{1+\alpha t}$ proportional ($t =$ Temperatur, $\alpha =$ Ausdehnungscoëfficient der Gase). Mithin ist auch die Zahl der jeweilig in der Volumeinheit vorhandenen Molekelpaare der Grösse $N_1^2 \sqrt{1+\alpha t}$ proportional. Wir wollen unter einem Molekelpaar immer zwei in Wechselwirkung befindliche Molekeln verstehen, welche von selbst wieder aus einander gehen, während zwei dauernd beisammen bleibende Molekeln eine Doppelmolekel vorstellen sollen.

Unsere Molekelpaare werden nun Zusammenstösse erleiden, deren Zahl abermals von der relativen Geschwindigkeit gegenüber den anderen Molekeln und von der Menge der in der Volumeinheit enthaltenen Molekeln abhängt. Es sei diese Zahl Z_1. Aus all' dem ergibt sich jetzt leicht, dass die Zahl der in der Zeiteinheit sich bildenden Doppelmolekeln durch

$$k_1 N_1^2 Z_1 f_1(t) \tag{1}$$

gegeben ist, wenn k_1 die entsprechende Proportionalitätsconstante und $f_1(t)$ eine Function der Temperatur bedeutet. Dabei haben wir nicht beachtet, dass auch möglicherweise durch die Wechselwirkung eines Molekelpaares mit einer Doppelmolekel eine neue Doppelmolekel entstehen könnte. Wir wollen jedoch voraussetzen, dass die Zahl der Doppelmolekeln gegenüber den einfachen so klein ist, dass deren Einfluss auf die Neubildung von Doppelmolekeln vernachlässigt werden kann.

Wir fragen nun nach der Zahl der in der Zeiteinheit sich zerlegenden Doppelmolekeln. Dieselbe wird wiederum der in der Volumeinheit befindlichen Zahl N_2 der Doppelmolekeln proportional sein. Die Zahl der Zusammenstösse, welche eine Doppelmolekel in der Zeiteinheit erfährt, sei Z_2, dann ist die Zahl der in der Zeiteinheit dissociirenden Molekeln

$$k_2 N_2 Z_2 f_2(t), \tag{II}$$

wobei k_2 wiederum eine Proportionalitätsconstante, $f_2(t)$ eine Function der Temperatur bedeutet.

Für den stationären Zustand müssen nun die Ausdrücke (I) und (II) einander gleich sein. Wir haben demnach

$$k_1 N \; Z_1 f_1(t) = k_2 N_2 Z_2 f_2(t).$$

In der Ausdehnung unterscheidet sich eine Doppelmolekel in keiner Weise von einem Molekelpaar, so dass wir nach den bisherigen Annahmen die Zahl Z_2 der Zusammenstösse, welche eine Doppelmolekel erleidet, proportional der Zahl Z_1 der Zusammenstösse setzen können, welche ein Molekelpaar erfährt. Unsere Gleichung für den stationären Zustand wird dann

$$N_2 = k_3 N_1^2 f(t),$$

wenn wir unter k_3 die verschiedenen Constanten zusammenfassen und unter $f(t)$ die entsprechende Temperaturfunction verstehen.

Besitzt unser Gas das Volumen v und nennen wir die Gesammtzahl der einfachen Molekeln n_1, jene der Doppelmolekeln n_2, so ist

$$N_1 = \frac{n_1}{v}, \qquad N_2 = \frac{n_2}{v},$$

woraus für unsere Gleichung folgt:

$$n_2 = k_3 \frac{n_1^2}{v} f(t).$$

Ist die Temperatur constant, so wird unsere Gleichung

$$n_2 = k \frac{n_1^2}{v}, \tag{1}$$

wenn wir

$$k_3 f(t) = k$$

setzen.

Für den Druck eines Gases gilt die bekannte Gleichung

$$p(v-b) = \frac{nm\overline{c^2}}{3}.$$

Dabei bedeutet n die Zahl der Molekeln. Dieselbe ist in unserem Fall

$$n = n_1 + n_2, \qquad (2)$$

bei vollständiger Dissociation wird sie

$$n_0 = n_1 + 2n_2. \qquad (3)$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (1), (2) und (3) n_1 und n_2, so gelangen wir leicht zu einer Beziehung zwischen n und n_0 in der Form

$$n = \frac{n_0}{2} - \frac{v}{8k} + \frac{v}{8k}\sqrt{1 + \frac{8n_0 k}{v}},$$

oder wenn wir die Wurzel entwickeln,

$$n = n_0 - \frac{n_0^2 k}{v},$$

wobei wir die höheren Glieder vernachlässigen können, da ja nach Gleichung (1) $\frac{n_0^2 k}{v}$ gegen n_0 schon eine sehr kleine Grösse ist. Für die Zustandsgleichung ergibt sich demnach

$$p(v-b) = \frac{n_0 m\overline{c^2}}{3}\left(1 - \frac{n_0 k}{v}\right),$$

oder wiederum mit Vernachlässigung der höheren Glieder

$$p = \frac{n_0 m\overline{c^2}}{3(v-b)} - \frac{n_0^2 m\overline{c^2} k}{3v^2}.$$

Was wir da erhalten haben, ist nichts Anderes als die van der Waals'sche Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = \frac{nm\overline{c^2}}{3},$$

wenn wir

$$\frac{n_0^2 m \overline{c^2} k}{3} = a$$

setzen. Die Art und Weise, wie wir diese Gleichung abgeleitet haben, besitzt den grossen Vortheil, dass wir nicht darauf zu reflectiren brauchen, wie es bei allen anderen Methoden nothwendig ist, dass gleichzeitig eine grosse Zahl von Molekeln sich in Wechselwirkung befinden. Ja wir machten es vielmehr zur Bedingung, dass bloss zwei, höchstens drei Molekeln gleichzeitig auf einander wirken.

Nicht so leicht wie die Zustandsgleichung der Gase lässt sich die Temperaturfunction $f(t)$ bestimmen. Eine exacte Darstellung derselben dürfte überhaupt auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen. Immerhin wollen wir es wenigstens versuchen, eine Temperaturfunction plausibel zu machen, welche in jeder Beziehung mit der Erfahrung übereinstimmt. Aus der eingangs gegebenen Darstellung geht unmittelbar hervor, dass für die Geschwindigkeit, mit welcher die Molekeln a und b vor der Wechselwirkung auf einander fliegen, desgleichen für jene von c ein gewisser Spielraum vorhanden ist, doch dass weder die relative Geschwindigkeit zwischen a und b, noch die Geschwindigkeit von c eine gewisse Grenze überschreiten darf, wenn eine Association erfolgen soll. Es wird sich daher sowohl für diese, als auch für jene ein Mittelwerth der Geschwindigkeiten angeben lassen, bei welchem ein dauernder Zusammenhang zwischen a und b noch ermöglicht wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine Geschwindigkeit zu jenen gehört, welche den Mittelwerth bilden, wird dann auch proportional der Wahrscheinlichkeit sein, dass eine Association erfolgt.

Die Geschwindigkeiten in unserem Gas seien nach Maxwell's Gesetz vertheilt, dann wird die Wahrscheinlichkeit, dass die mittlere relative Geschwindigkeit eine gewisse Grösse nicht übersteigt, dem Ausdruck

$$\frac{1}{\gamma^3} \int_0^{\gamma_1} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass die dritte Molekel eine gewisse Geschwindigkeit nicht übersteigt, dem Ausdruck

$$\frac{1}{\gamma^3}\int_0^{\gamma_2} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc$$

proportional sein. Die Wahrscheinlichkeit schliesslich, dass beide Fälle gleichzeitig eintreten, ist proportional dem Product

$$\frac{1}{\gamma^6}\int_0^{\gamma_1} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc \int_0^{\gamma_2} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc.$$

γ_1 und γ_2 sind dabei constante Grössen, γ ist die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Molekeln. Wir wissen ferner von früher her, dass die Zahl der sich bildenden Doppelmolekeln auch der Grösse $N_1^2 \sqrt{1+\alpha t}$ und der Zahl der Zusammenstösse Z_1 proportional ist, sie ist demnach durch den Ausdruck

$$k_4 N_1^2 Z_1 \frac{\sqrt{1+\alpha t}}{\gamma^6} \int_0^{\gamma_1} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc \int_0^{\gamma_2} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc \tag{III}$$

gegeben, wenn wir unter k_4 die entsprechende Constante verstehen.

Für die Dissociation einer Doppelmolekel muss im Mittel eine gewisse Dissociationswärme aufgewendet werden. Soll daher eine Doppelmolekel durch den Zusammenstoss mit einer anderen zerlegt werden, so wird es wiederum eine gewisse mittlere Energie geben, unter welche die zusammenstossenden Molekeln nicht herabgehen dürfen, damit eine Zerlegung erfolgen kann. Wir drücken dies dadurch aus, dass die relative Geschwindigkeit der einen Molekel gegenüber der anderen unter einen gewissen Betrag nicht herabsinken darf. Mithin wird die Zahl der sich zerlegenden Doppelmolekeln der Grösse

$$\frac{1}{\gamma^3}\int_{c_1}^{\infty} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc$$

proportional gesetzt werden können. Diese Ausdrücke haben wir nach dem Obigen noch mit N_2 und Z_2 zu multipliciren und finden so für die Zahl der in der Zeiteinheit sich zerlegenden Molekeln

$$\frac{k_5 N_2 Z_2}{\gamma^3}\int_{c_1}^{\infty} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc. \tag{IV}$$

Für den stationären Zustand muss nun (III) = (IV) sein. Erinnern wir uns, dass

$$N_1 = \frac{n_1}{v}, \qquad N_2 = \frac{n_2}{v},$$

so ergibt sich

$$n_2 = \frac{n_1^2}{v} k_6 \frac{\sqrt{1+\alpha t} \int_0^{\gamma_1} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc \int_0^{\gamma_2} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc}{\gamma^3 \int_{c_1}^{\infty} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc} \quad . \tag{4}$$

Zur Berechnung der Integrale wollen wir

$$\frac{c}{\gamma} = x$$

setzen. Dann wird

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \xi_1, \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma} = \xi_2, \qquad \frac{c_1}{\gamma} = x_1.$$

Wir nehmen ferner an, dass γ_1 und γ_2 sehr klein seien, c_1 hingegen, also auch x_1 sehr gross. Wir können dann

$$e^{-\xi_1^2} = e^{-\xi_2^2} = 1$$

setzen und erhalten

$$\int_0^{\gamma_1} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc = \gamma^3 \int_0^{\xi_1} x^2 e^{-x^2} dx = \gamma_3 \frac{\xi_1^3}{3} \cdot$$

Dasselbe gilt für das zweite Integral zwischen den Grenzen 0 und γ_2. Schliesslich ergibt die partielle Integration

$$\int_0^{\infty} c^2 e^{-\frac{c^2}{\gamma^2}} dc = \gamma^3 \int_{x_1}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\gamma^3 x_1 e^{-x_1^2}}{2} + \frac{\gamma^3}{2} \int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Da nun innerhalb der Grenzen x_1 und ∞, x^2 gegenüber Eins sehr gross ist, so muss auch $\int_{x_1}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ gegen $\int_{x_1}^{\infty} e^{-x^2} dx$ sehr gross sein, weshalb wir letzteres gegenüber ersterem vernachlässigen wollen, und es folgt dann

$$\int_{x_1}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\gamma^3 x_1 e^{-x_1^2}}{2}.$$

Gleichung (4) wird demnach

$$n_2 = \frac{2}{9} k_6 n_1^2 \sqrt{1+\alpha t}\, \frac{\xi_1^3 \xi_2^3 e^{x_1^2}}{v x_1}. \qquad (5)$$

Wir setzen

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 (1+\alpha t)$$

und können dann

$$\frac{\sqrt{1+\alpha t}\, \xi_1^3 \xi_2^3 e^{x_1^2}}{x_1} = \frac{k_7}{T^2} e^{\frac{\beta}{T}}$$

schreiben, wobei k_7 und β passende Constanten sind. Gleichung (5) wird dadurch

$$n_2 = \frac{k n_1^2}{v T^2} e^{\frac{\beta}{T}},$$

wobei wir jetzt alles Constante in k vereinigt haben und unter T die absolute Temperatur verstehen. Wie früher können wir diese Formel zur Ableitung der Zustandsgleichung benutzen und erhalten so die Abhängigkeit der Grösse a von der Temperatur. Dass dabei unsere Formel in jeder Beziehung mit der Erfahrung übereinstimmt, habe ich bereits in der Abhandlung: »Über die Temperaturfunction der Zustandsgleichung der Gase«[1] gezeigt. Ja sogar in ihrer Anwendung auf die Dissociation der Gase[2] habe ich gefunden, dass zwischen Rechnung und Beobachtung vollständige Übereinstimmung herrscht.

Setzen wir nun wieder voraus, dass, wie wir an vielen Gasen beobachten können, n_2 gegen n_1 sehr klein ist. Für diese Gase ergibt die Beobachtung, dass auch β eine sehr kleine Grösse ist, so dass

$$e^{\frac{\beta}{T}} = 1$$

gesetzt werden kann. Es ist dann

$$n_2 = \frac{k n_1^2}{v T^2}.$$

---

[1] Diese Sitzungsber. CI (II), S. 1675 ff. (1892).

[2] Diese Sitzungsber. CI (II), S. 1182 ff. (1891). — CIV (II), S. 671 ff. (1895).

In erster Annäherung können wir auch das Boyle-Charles'sche Gesetz als giltig annehmen, mithin

$$pv = RT$$

oder

$$v = \frac{RT}{p}$$

setzen, woraus

$$n_2 = \frac{kn_1^2 p}{RT^3}$$

folgt. Wir lassen das Gas nun ohne äussere Arbeitsleistung ausdehnen, bis

$$p = p'$$

wird, und erhalten sodann

$$n_2' = \frac{kn_1^2 p'}{RT^3}$$

oder

$$\frac{n_2 - n_2'}{n_1} = \frac{kn_1}{RT^3}(p - p').$$

Wir können dabei n_1 immer als constant ansehen, da ja n_2, also auch n_2' als sehr klein gegen n_1 angenommen wurde. $\frac{n_2 - n_2'}{n_1}$ ist daher als ein ganz bestimmter Bruchtheil der gesammten Gasmenge anzusehen, welcher beim Übergang vom Druck p zu dem niedrigeren p' dissociirt.

Für jede Gasmolekel ist nun das Verhältniss der sogenannten mittleren inneren Energie zur mittleren Energie der fortschreitenden Bewegung eine von der Temperatur unabhängige Grösse. Jede Energiemenge wächst daher proportional mit der absoluten Temperatur. Daraus folgt unmittelbar, dass auch die Wärmemenge, welche zur Dissociation einer Molekel im Mittel aufgewendet werden muss, proportional der absoluten Temperatur ist. Multipliciren wir daher die Zahl der zerlegten Molekeln mit der absoluten Temperatur des Gases, so erhalten wir eine Zahl, welche der Wärmemenge, die für die Dissociation benöthigt wurde, mithin auch der Temperaturerniedrigung des Gases bei adiabatischer Ausdehnung ohne äussere Arbeits-

leistung proportional ist. Es ergibt sich demnach für diese Temperaturerniedrigung

$$\Delta = \frac{\varkappa T(n_2 - n_2')}{n_1} = k' \frac{p - p'}{T^2},$$

wenn wir

$$\frac{\varkappa k n_1}{R} = k'$$

setzen. $\varkappa$ und k' sind Constante, da ja auch $\frac{n_1}{R}$ constant ist. Unsere Formel sagt also genau dasselbe aus, was Joule und Thomson an Luft und Kohlensäure beobachtet haben, nämlich dass die Temperaturerniedrigung immer proportional der Druckdifferenz und verkehrt proportional dem Quadrat der absoluten Temperatur ist.

In der guten Übereinstimmung zwischen den aus unserer Theorie gefolgerten Formeln und der Beobachtung lässt sich wohl eine gewisse Gewähr für die Berechtigung unserer Betrachtungsweise erblicken.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. IX. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.

XXII. SITZUNG VOM 5. NOVEMBER [illegible]

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth. I, Heft [illegible]
1896.

Für die diesjährigen Wahlen sprechen den Dank [illegible] geheim. Medicinalrath Prof. E. Hering in Leipzig [illegible] Wahl zum ausländischen Ehrenmitgliede und Herr Prof. [illegible] Hatschek in Prag für seine Wahl zum inländischen [illegible] spondirenden Mitgliede dieser Classe.

Das w. M. Herr Hofrath L. Schmarda übersendet [illegible] Abhandlung von Dr. A. Nalepa, Professor am k. k. [illegible] Gymnasium in Wien, betitelt: »Zur Kenntniss der Phy[illegible] coptinen«.

Herr Dr. Karl Kellner in Hallein übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität, mit der Aufschrift: »Experimenteller Beweis über die Verwandelbarkeit der sogenannten Grundstoffe«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung: »Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft«.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. F. Mertens überreicht eine Abhandlung: »Über die Transcendenz der Zahlen e und π«.

Ferner überreicht Herr Regierungsrath Mertens folgende zwei Abhandlungen:

1. »Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen. (Directe Construction der Isophengen)«, von Herrn Julius Mandl, k. u. k. Hauptmann des Geniestabes in Wien.

2. »Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen«, von Herrn Dr. R. Daublebsky v. Sterneck in Wien.

Das c. M. Herr Prof. V. Uhlig aus Prag spricht über die geotektonischen Ergebnisse seiner Reise in die Ostkarpathen, die er im Sommer 1896 mit Subvention der kaiserl. Akademie unternommen hat.

Herr Dr. Carl Hillebrand, Assistent der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Wien, überreicht eine Abhandlung: »Über den Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Haeckel E., Systematische Phylogenie der wirbellosen Thiere (*Invertebrata*). II. Theil des Entwurfs einer systematischen Phylogenie. Berlin, 1896; 8°.

Jahrbuch der organischen Chemie, herausgegeben von Gaetano Minunni (Palermo). Zweiter Jahrgang, 1894. Leipzig, 1896; 8°.

Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (directe Construction der Isophengen)

von

Julius Mandl,

k. u. k. Hauptmann des Geniestabes.

(Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)

In Burmester's ausführlichem Werke über »Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen« (Wien, 1871) wird die wahre und scheinbare Beleuchtung der Flächen in der Weise behandelt, dass die Entwicklungen mit Hilfe der höheren Analysis und neueren Geometrie durchgeführt sind und aus den erhaltenen Resultaten die constructive Bestimmung der Licht- und Hellevertheilung abgeleitet wird; dagegen hat Tilscher in seinem Werke: »Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen« (Wien, 1862) gezeigt, wie die Darstellung der wahren oder geometrischen Beleuchtung auf rein constructivem Wege abgeleitet werden kann.

Wenn man sich die Bedürfnisse des Technikers vor Augen hält, so verdient erstens die scheinbare Beleuchtung den Vorzug vor der geometrischen, zweitens muss der constructiven Behandlung der Vorrang vor der analytischen eingeräumt werden, bei welch letzterer das Endresultat naturgemäss wieder eine Construction bildet. Aus diesen Ursachen haben die Burmester'schen Theorien und die scheinbare Beleuchtung überhaupt in jenen Werken, welche den Bedürfnissen der Praxis angepasst sind, bisher keine Berücksichtigung erfahren.

Der Verfasser hat sich nun die constructive Behandlung der scheinbaren Beleuchtung zur Aufgabe gestellt und wird im vorliegenden Aufsatze die bezüglichen Constructionen an einem senkrechten Kreiscylinder, geraden Kreiskegel und der Kugel ableiten, wogegen die Behandlung der übrigen Flächen zweiter Ordnung, der allgemeinen Cylinder- und Kegelflächen, der abwickelbaren und windschiefen Regelflächen, der Rotations- und Umhüllungsflächen den Gegenstand eines oder mehrerer folgender Aufsätze bilden wird.

Bekanntlich ist die wahre Beleuchtungsintensität oder Lichtintensität eines ebenen Flächenelementes proportional dem Cosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen, wenn unter dem Einfallswinkel jener Winkel verstanden wird, den die Richtung der Lichtstrahlen mit der Normalen des Flächenelementes einschliesst.

Die scheinbare Beleuchtungsintensität oder Helleintensität eines ebenen Flächenelementes ist proportional der wahren Beleuchtungsintensität und dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels, wobei wir unter dem Ausstrahlungswinkel jenen Winkel verstehen wollen, welchen die Sehrichtung mit der Normalen des Flächenelementes einschliesst. Nimmt man die scheinbare Beleuchtungsintensität eines Flächenelementes, auf dem sowohl die Lichtrichtung, als auch die Sehrichtung senkrecht stehen, als Einheit an, so ist die Helleintensität eines jeden Flächenelementes gleich dem Producte aus dem Cosinus des Einfallswinkels und dem Cosinus des Ausstrahlungswinkels.

In nachstehender Fig. 1 bedeute LF einen auf das Flächenelement auffallenden Lichtstrahl, SF die Sehrichtung, FN die Normale des Flächenelementes, ferner λ den Einfalls- und σ den Ausstrahlungswinkel; dann ist die Helleintensität des Flächenelementes

$$H = \cos\lambda . \cos\sigma.$$

Trägt man auf dem Lichtstrahle die Intensität $\overline{Fa} = 1$ nach einem beliebig angenommenen Maassstabe auf und fällt von a die Senkrechte ab auf die Normale FN, so ist $\overline{Fb} = \cos\lambda$.

Zieht man ferner von b die Gerade bc senkrecht auf der Sehrichtung, so ist $\overline{Fc} = \cos\lambda . \cos\sigma$. Somit gibt die Strecke $\overline{Fc}$ in dem angenommenen Maassstabe die Helleintensität des Flächenelementes F.

Daraus ergibt sich sofort das Gesetz vom Parallelogramm der Lichtstrahlen. Ein Lichtbündel L von der Richtung LF und der Intensität $\overline{aF}$ kann in seiner Wirkung durch zwei

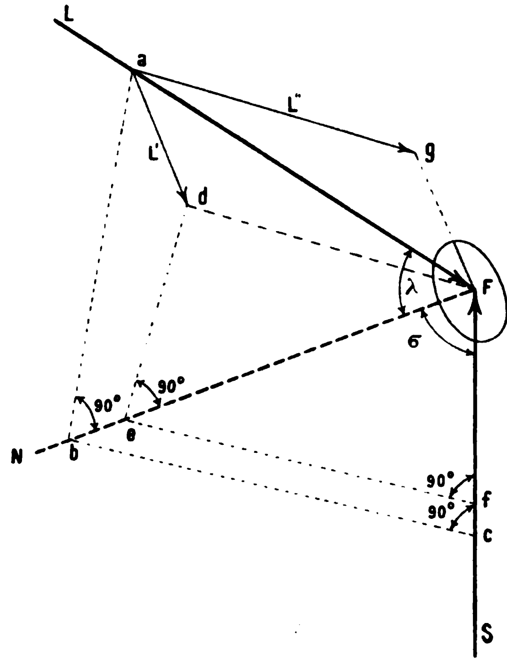


Fig. 1.

andere Lichtbündel L' und L'' ersetzt werden, deren Richtungen und Intensitäten durch die Strecken $\overline{ad}$, beziehungsweise $\overline{ag}$ bestimmt sind, wenn sich aus $\overline{ad}$ und $\overline{ag}$ ein Parallelogramm construiren lässt, dessen Diagonale mit aF der Richtung und Grösse nach übereinstimmt. Fällt man nämlich von d die Senkrechte de auf FN und zieht ef senkrecht auf FS, so ist die Strecke $\overline{be}$ die Projection von $\overline{ad}$ auf NF und $\overline{fc}$ die Projection von $\overline{be}$ auf FS; die Strecke $\overline{fc}$ bedeutet somit die Helleintensität des Flächenelementes F für den Fall, als dasselbe von einem

Lichtbündel L' von der Intensität $\overline{ad}$ beleuchtet wird. Desgleichen gibt die Strecke $\overline{Ff}$ die Helleintensität des Flächenelementes F für den Fall, als dasselbe unter der Einwirkung eines Lichtbündels L'' von der Intensität $\overline{ag} = \overline{dF}$ steht.

Die Lichtbündel lassen sich demnach nach denselben Gesetzen wie Kräfte zusammensetzen und zerlegen. Die beiden Componenten L' und L'' heissen die Nebenlichtbündel des Lichtbündels L.

Wenn die Normale des Flächenelementes mit dem auf dasselbe auffallenden Licht- und dem Sehstrahle in einer Ebene

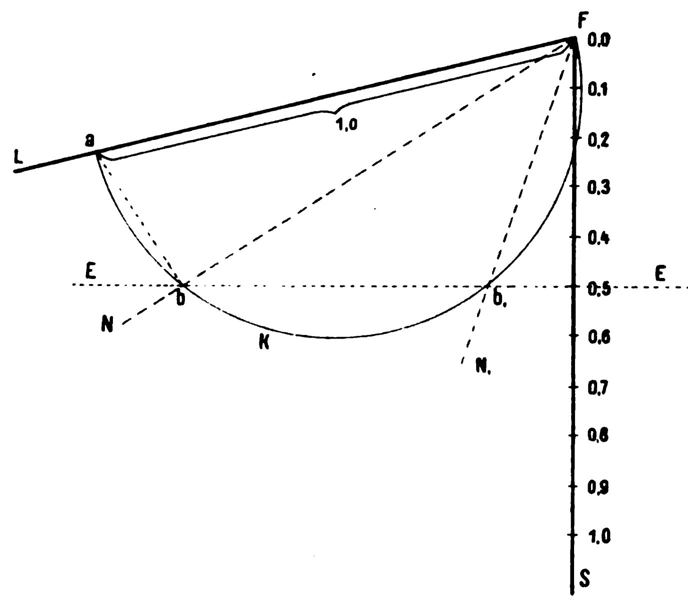


Fig. 2.

liegt, so ist die Ermittelung der Helleintensität nach Fig. 2 vorzunehmen.

Man trägt auf dem Lichtstrahle LF die Strecke $\overline{Fa} = 1$ und auf dem Sehstrahle SF die Intensitätsscala nach demselben Maassstabe auf, dann fällt man von a die Gerade ab senkrecht auf die Normale FN des Flächenelementes und projicirt b auf die Sehrichtung SF. In Fig. 2 wird die Intensitätsscala beim Theilstriche 0·5 getroffen, dies ist die Helleintensität des Flächenelementes.

Der Punkt b muss auf einem Kreise K liegen, von dem $\overline{Fa}$ ein Durchmesser ist. Man kann daher umgekehrt diejenigen Flächenelemente finden, welchen eine bestimmte Helleintensität zukommt, indem man in dem betreffenden Theilpunkte der Intensitätsscala (z. B. 0·5) eine Senkrechte (0·5...b) errichtet und diese Senkrechte mit dem Kreise K zum Schnitte bringt. Die Schnittpunkte b und b_1 verbindet man mit F und erhält auf diese Weise die Flächennormalen N und N_1. Alle Flächenelemente, welche auf den Richtungen NF und N_1F senkrecht stehen, haben die Helleintensität (0·5), von der wir bei der Construction ausgegangen sind.

Liegt jedoch die Flächennormale FN nicht in der Ebene LFS, welche man durch den auf das Flächenelement auffallenden Licht- und Sehstrahl legen kann, so ist der geometrische Ort für den Fusspunkt b des durch a auf FN gefällten Perpendikels eine Kugelfläche K, von der $\overline{Fa}$ ein Durchmesser ist. Um ein Flächenelement von bestimmter Helleintensität (z. B. 0·5) zu finden, muss jetzt durch den betreffenden Theilstrich (0·5) der Intensitätsscala eine Ebene senkrecht zur Sehrichtung gelegt werden; diese Ebene EE schneidet die Kugelfläche K nach einem Kreise von der Eigenschaft, dass die Verbindungslinie eines jeden seiner Punkte mit dem Punkte F eine Flächennormale ergibt, die der Intensität (0·5), von welcher wir bei der Construction ausgegangen sind, entspricht. Nachdem parallele Flächenelemente die gleiche Helleintensität haben, so handelt es sich darum, jene Flächenelemente ausfindig zu machen, deren Normalen parallel sind zu den Mantellinien eines schiefen Kreiskegels, dessen Spitze in F liegt und dessen Basis die Schnittlinie der Kugel K mit der Ebene EE ist. Verbindet man alle auf diese Weise erhaltenen Punkte einer gegebenen Fläche, denen die gleiche Helleintensität zukommt, so erhält man die Linien gleicher scheinbarer Beleuchtungsintensität oder Isophengen, zum Unterschiede von den Linien gleicher wahrer Beleuchtungsintensität oder Isophoten.

Alle Flächenelemente, welche zur Lichtrichtung oder zur Sehrichtung parallel sind, haben die Helleintensität Null, demnach gibt es auf jeder krummen Fläche bei bestimmter Licht- und Sehrichtung im Allgemeinen zwei Isophengen mit der Helle-

intensität Null. Die eine dieser Grenzisophengen ist die Selbstschattengrenze, die zweite ist die Contour der Fläche.

Wird eine krumme Fläche in orthogonaler Parallelprojection durch Aufriss und Grundriss dargestellt, so ist die Sehrichtung für den Aufriss normal zur verticalen, für den Grundriss normal zur horizontalen Projectionsebene. Wir müssen daher Aufriss-Isophengen von den Grundriss-Isophengen unterscheiden.

Innerhalb des Selbstschattens gibt es, wie die Erfahrung lehrt, gleichfalls verschiedene Grade der Lichtintensität. Für die Construction der Isophoten und Isophengen im Selbstschatten einer beleuchteten Fläche wird die Annahme gemacht, dass dieser Theil der Fläche von einem dem directen Lichte gerade entgegengesetzt wirkenden Lichtbündel von bedeutend geringerer Intensität getroffen wird. In den beiliegenden Figuren sind diese Isophengen als negative Isophengen bezeichnet.

Construction der Isophengen eines verticalen Kreiscylinders.

In Fig. 3 ist ein verticaler Kreiscylinder in orthogonaler Projection dargestellt. Die Lichtstrahlenrichtung ist durch die beiden Projectionen l' und l'' gegeben.

Für die Construction der Aufriss-Isophengen, um welche es sich hier nur handeln kann, ist SO die Sehrichtung (deren Projectionen sind $S'O'$ und $S''O''$).

Nach dem Gesetze vom Parallelogramm der Lichtstrahlen kann das Lichtbündel l in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine vertical, die andere horizontal und parallel zum Grundriss l' der Lichtrichtung verläuft. Die Intensitäten dieser beiden Nebenlichtbündel findet man, wenn man den Lichtstrahl l um seine horizontale Projection nach l_0 umlegt, sodann auf dem umgelegten Lichtstrahle die Strecke $\overline{O'a_0} = 1$ aufträgt und $a_0a' \perp l'$ zieht. Dann ist $\overline{O'a'}$ die Intensität des horizontalen und $\overline{a'a_0}$ jene des verticalen Nebenlichtbündels. Letzteres ist parallel zu allen Flächenelementen des Cylinders, daher ohne Wirkung. Demnach gibt das horizontale Nebenlichtbündel l' dieselbe Wirkung wie das Hauptlichtbündel l selbst und die Construction reducirt sich auf die dem Lichtbündel l' entsprechenden Isophengen.

Die Isophengen der Cylinderfläche sind offenbar Mantellinien, da die Normalenrichtung für alle Punkte einer Erzeugenden die gleiche ist. Im vorliegenden Falle sind die Lichtrichtung l' und die Sehrichtung $S'O'$, sowie alle Flächennormalen horizontal, demnach kann die ganze Construction nach dem früher an der Hand der Fig. 2 beschriebenen Vorgange in der horizontalen Projectionsebene durchgeführt werden.

Über dem Durchmesser $\overline{O'a'}$, dessen Grösse gleich ist der Intensität des horizontalen Lichtbündels l', ist ein Kreis K gezogen. Auf der Sehrichtung $S'O'$ ist die Intensitätsscala aufgetragen.

Die Isophenge mit der Helleintensität 0·4 ergibt sich nun, indem man durch den Theilstrich 0·4 der Intensitätsscala eine Parallele zu AX zieht und diese mit dem Kreise K zum Schnitte bringt. Die Schnittpunkte b und b_1 verbindet man mit O', so stellen $O'b$ und $O'b_1$ die Flächennormalen, daher F und F_1 (deren horizontale Projectionen F' und F'_1 sind) die gesuchten Isophengen vor.

Die an den Kreis K parallel zu AX geführten Tangenten t und t_1 treffen die Intensitätsscala bei den Theilstrichen 0·69, beziehungsweise —0·12; diese entsprechen den hellsten Isophengen des direct beleuchteten, beziehungsweise des im Selbstschatten liegenden Theiles der Cylinderfläche, dem sogenannten positiven, beziehungsweise negativen Hellepole. Die Construction dieser Hellepole P und P_1 ist aus der Figur zu ersehen. Die Richtungen $O'P'$ und $O'P'_1$ stehen aufeinander senkrecht, weil $\sphericalangle BO'B_1$ ein Winkel im Halbkreise ist.

Zieht man durch a' die Gerade $a'c$ senkrecht auf $S'O'$, so muss c in der Peripherie des Kreises K liegen. Ferner ist

$$\text{arc}\ a'B = \text{arc}\ Bc,$$

somit

$$\sphericalangle\ a'O'B = BO'c.$$

Die Grundrisse der beiden Hellepole P und P_1 liegen daher auf den Halbirungslinien des Winkels $a'O'S'$ und seines Nebenwinkels.

Die Intensität der verticalen Projectionsebene ist in der Strecke $\overline{O'c} = 0·58$, jene der horizontalen Projectionsebene $\overline{a'a_0} = 0·58$ gegeben.

Construction der Isophengen eines geraden Kreiskegels.

In Fig. 4 ist ein abgestumpfter gerader Kreiskegel durch seine beiden Projectionen dargestellt.

Führt man durch einen in der Kegelaxe liegenden Punkt O lauter Normale zu den Mantellinien des Kegels, so bilden diese Normalen ebenfalls einen geraden Kreiskegel CC, dessen Axe mit der Kegelaxe OS zusammenfällt. Nun legt man durch O einen Lichtstrahl, dessen Projectionen l' und l'' sind und trägt auf demselben die Strecke $\overline{Oa} = 1$ auf; über $\overline{Oa}$ als Durchmesser wird ferners eine Kugel K gezeichnet. Fällt man nun von a eine Senkrechte auf irgend eine Erzeugende des Kegels C, so muss der Fusspunkt auf der Oberfläche der Kugel K liegen. Die Verbindungslinie aller dieser Fusspunkte fällt mit der Durchdringungslinie der Kugel K mit dem Kegel C zusammen. Der Grundriss D' dieser Durchdringungslinie bildet eine Art verlängerter Cardioide. Die Construction derselben ist sehr einfach, weil sowohl die Kugel K, als auch der Kegel C durch horizontale Ebenen nach Kreisen geschnitten werden; wir werden jedoch später noch eine einfachere Construction von D' kennen lernen.

Projicirt man nun eine Mantellinie $\overline{Ob}$ des Kegels C, deren Länge wir von der Kegelspitze O bis zur Durchdringungscurve D messen wollen, auf die Sehrichtung, so gibt die Länge dieser Projection — in dem angenommenen Maassstabe — die Intensität jener Flächenelemente, welche zur Richtung von Ob senkrecht stehen, also die Intensität einer Mantellinie des in Fig. 4 dargestellten abgestumpften Kegels, deren Grundriss mit $O'b'$ zusammenfällt.

Für die Aufriss-Isophengen ist der Intensitätsmaassstab auf der Sehrichtung $m'O'$ aufgetragen. Um daher die Aufriss-Isophenge von der Intensität 0·4 zu finden, zieht man durch den Theilstrich 0·4 der Intensitätsscala eine Parallele zu AX und sucht deren Schnittpunkte b' und b'_1 mit D'. Die Verbindungsgeraden $O'b'$ und $O'b'_1$ sind die Grundrisse der gesuchten Aufriss-Isophengen.

Man erkennt leicht, dass jener Theil von D', welcher von O' über b'_1B' und b' bis n' reicht, zu dem im Aufrisse sichtbaren

und direct beleuchteten Theile der Mantelfläche des gegebenen Kegelstumpfes gehört, dagegen der Curvenast von O' über B_1' bis q' zu dem im Aufrisse sichtbaren und im Selbstschatten befindlichen Theile der erwähnten Fläche. Der Rest der Curve ist für die Aufriss-Isophengen belanglos.

Die Hellepole des Aufrisses ergeben sich, indem man parallel zu AX die Tangenten an D' zieht, die Berührungspunkte B' und B_1' mit O' verbindet und die Aufrisse jener Mantellinien des Kegelstumpfes ermittelt, deren Grundrisse mit $O'B'$, beziehungsweise $O'B_1'$ zusammenfallen. Die Selbstschattengrenze wird im Grundrisse durch die im Punkte O' an die Curve D' gezogenen Tangenten $O' \ldots 0 \cdot 0$ erhalten.

Die verticalen Projectionen jener Mantellinien, deren Grundrisse die Geraden $O' \ldots 0 \cdot 0$ sind, stellen auch die verticalen Projectionen der Selbstschattengrenze vor; von diesen hat jedoch nur eine die Bedeutung als Aufriss-Grenzisophenge.

Für die Grundriss-Isophengen ist der Intensitätsmaassstab auf $O''S''$ aufgetragen. Um die Grundriss-Isophenge der Intensität 0·2 zu erhalten, legt man durch den Theilpunkt 0·2 der Intensitätsscala eine horizontale Ebene und ermittelt den Schnitt dieser Ebene mit dem Kegel C. Der Schnitt ist ein Kreis (dessen Grundriss ist mit k' bezeichnet) und trifft die Durchdringungscurve in zwei Punkten, deren Grundrisse mit f' und g' bezeichnet sind. Demnach sind $O'f'$ und $O'g'$ die Grundriss-Isophengen der Intensität 0·2.

Jene horizontale Ebene, welche durch den Theilstrich - 0·2 der Intensitätsscala $O''S''$ geht, schneidet den Kegel C nach einem Kreise, dessen Grundriss mit k' zusammenfällt. Die Schnittpunkte mit der Durchdringungscurve projiciren sich in h' und i', somit geben $h'O'$ und $i'O'$ — beziehungsweise deren Verlängerungen — die Grundriss-Isophengen der Intensität —0·2. Überhaupt stellt die grössere Schleife von D' den Grundriss jenes Theiles der Durchdringungscurve D vor, welcher oberhalb der horizontalen Projectionsebene liegt, während die kleinere Schleife von D' den Grundriss von dem unter der horizontalen Projectionsebene liegenden Theile der Durchdringungscurve D vorstellt. Die beiden Hellepole des Grundrisses fallen mit l' zusammen.

Aus dem Gesagten ersieht man, dass der Aufriss der Durchdringungscurve D für die Isophengen-Construction nicht benöthigt wird. Für den Grundriss D' soll nun eine einfache Construction abgeleitet werden.

Zerlegt man das Lichtbündel l in ein verticales und ein horizontales Nebenlichtbündel, so erhält man die Intensitäten der beiden letzteren, indem man auf dem Lichtstrahle l die Strecke $\overline{Oa}$ gleich der Einheit aufträgt und von a die Senkrechte ap auf den Grundriss l' des Lichtstrahles fällt. Es ist dann $\overline{ap}$ die Richtung und Intensität des verticalen, $\overline{pO}$ die Richtung und Intensität des horizontalen Nebenlichtbündels; die Intensität des ersteren erscheint in der verticalen Projection $\overline{a''p''}$, die Intensität des letzteren in der horizontalen Projection $\overline{p'O'}$ in wahrer Grösse.

Um nun die vom horizontalen Nebenlichtbündel herrührenden Helleintensitäten zu ermitteln, ist über dem Durchmesser $\overline{Op}$ eine Kugel K_1 zu zeichnen und die Durchdringungscurve D_1 dieser Kugel mit dem Kegel C zu bestimmen. Die horizontale Projection dieser Durchdringungscurve ist der Kreis D'_1, wie sich aus dem Folgenden ergibt.

Durch eine verticale Ebene PQR wird die Kugel K_1 nach einem Kreise und der Kegel C nach zwei Mantellinien geschnitten. Dreht man die Ebene PQR um die Kegelaxe OS in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage, so ergeben sich in e''_1 und e''_2 die verticalen Projectionen von zwei Punkten der Durchdringungscurve D_1, jedoch in der gedrehten Lage. Die horizontalen Projectionen dieser beiden Punkte fallen in e'_1 zusammen und müssen nach e' zurückgedreht werden, um einen Punkt (oder eigentlich zwei sich deckende Punkte) von D'_1 zu erhalten.

Bezeichnet man nun den Winkel, den die Ebene PQR mit l' einschliesst, mit α, so ist $\overline{O'c'} = \overline{O'a'}.\cos\alpha$; ferner $\overline{O'c'_1} = \overline{O''c''_1}$ und $\overline{O''e''_1} = \overline{O''c''_1}.\cos\beta$, wenn β jener Winkel ist, den die Mantellinien des Kegelstumpfes mit der Kegelaxe einschliessen. Es ist also $\overline{O''e''_1} = \overline{O'a'}.\cos\alpha.\cos\beta$; weiters ist $\overline{O'e'_1} = \overline{O''e''_1}.\cos\beta = \overline{O'a'}.\cos\alpha.\cos^2\beta$ und $\overline{O'e'} = \overline{O'e'_1}$, somit $\overline{O'e'} = \overline{O'a'}.\cos^2\beta.\cos\alpha$.

Der Ausdruck $\overline{O'a'}.\cos^2\beta$ ist von der Lage der Ebene PQR unabhängig, unter gegebenen Verhältnissen constant. Macht man daher $\overline{O'g'} = \overline{O'a'}.\cos^2\beta$, so ist $O'e' = \overline{O'g'}.\cos\alpha$, der Punkt e' muss daher auf einem Kreise liegen, von welchem $\overline{O'g'}$ ein Durchmesser ist. Der Punkt g' ergibt sich direct, indem man von a' eine Senkrechte auf jene Mantellinie des Kegels C fällt, deren Grundriss mit l' zusammenfällt und die horizontale Projection vom Fusspunkte dieser Senkrechten ermittelt. Dies ist in der Fig. 4 nach erfolgter Drehung der Ebene $P_1Q_1R_1$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage durchgeführt.

Es bedarf also bloss der Bestimmung von g', um sofort die horizontale Projection der Durchdringungscurve D_1, als den über dem Durchmesser $\overline{O'g'}$ gezeichneten Kreis D_1' zu erhalten.

Fällt man nun von einem Punkte e' dieses Kreises eine Senkrechte auf $O'm'$, so gibt der betreffende Theilstrich der Intensitätsscala, die dem horizontalen Nebenlichtbündel entsprechende Helleintensität jener Kegelerzeugenden, deren horizontale Projection mit $O'e'$ zusammenfällt.

Was die vom verticalen Nebenlichtbündel herrührenden Intensitäten anbelangt, so ist die wahre Beleuchtungsintensität aller Mantellinien des Kegelstumpfes gleich gross, und zwar gleich der Projection von $\overline{ap}$ auf die in die Ebene $P_1Q_1R_1$ fallende Mantellinie des Kegels C. In der Figur ist diese Projection nach erfolgter Drehung der Ebene $P_1Q_1R_1$ in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage ermittelt. Sonach ist $z = s_1''u_1''$ die vom verticalen Nebenlichtbündel erzeugte wahre Beleuchtungsintensität des Kegelstumpfes. Trägt man nun die Strecke z auf der Mantellinie Oe des Kegels C, von e bis b, auf. oder was dasselbe ist, wenn man die horizontale Projection von z, nämlich die Strecke z', auf dem Grundrisse $O'e'$ der betreffenden Mantellinie des Kegels C von e' bis b' aufträgt, und projicirt man $\overline{b'e'}$ senkrecht auf $O'm'$, so wird auf der Intensitätsscala eine Strecke abgeschnitten, deren Grösse die scheinbare Beleuchtungsintensität jener Mantellinie vorstellt, deren Grundriss mit $O'e'$ zusammenfällt. Daraus folgt, dass der Fusspunkt von b' auf $O'm'$ mit jenem Theilstriche der Intensitätsscala übereinstimmt, der die totale Helleintensität der betreffenden Mantellinie des Kegelstumpfes angibt, nämlich jene Helle-

intensität, welche aus der vereinten Wirkung beider Nebenlichtbündel resultirt.

Die Verbindungslinie aller Punkte b' gibt die gezeichnete Curve D', deren Bildungsgesetz nach dem Vorhergehenden jenem der Cardioïde ganz ähnlich ist und daher als verlängerte Cardioïde bezeichnet wurde. In dem speciellen Falle, wenn die Lichtstrahlenrichtung zu einer Mantellinie des Kegelstumpfes parallel ist, übergeht die Curve D' in die gemeine Cardioïde; ist dagegen die Lichtstrahlenrichtung senkrecht auf der Kegelaxe, so übergeht D' in den Kreis D'_1.

Sucht man auf der Oberfläche des Kegels C jene Linie, deren Grundriss die Curve D'_1 ist, so ist leicht einzusehen, dass dies die Durchdringungscurve des Kegels C mit der Kugel K sein muss.

Die Construction der Isophengen eines gerades Kreiskegels reducirt sich somit auf verhältnissmässig wenige Linien und kann daher sehr gut für die Constructionen der scheinbaren Beleuchtung anderer Flächen in ähnlicher Weise verwerthet werden, wie es Tilscher für die Construction der wahren Beleuchtung gethan hat.

Construction der Isophengen einer Kugel.

Mit Hilfe der Isophengenconstruction eines geraden Kreiskegels lassen sich die Isophengen einer Kugel in der Weise ermitteln, dass man für einen, die Kugel nach einem Horizontalkreise berührenden Kegel die Isophengen construirt und deren Schnittpunkte mit dem Berührungskreise bestimmt. Diese Schnittpunkte sind schon Punkte der Kugelisophengen.

Die Durchführung dieser Construction bietet nach dem Vorhergehenden nichts Neues.

Auf eine zweite Art ist die Isophengenconstruction einer Kugel in Fig. 5 durchgeführt. Nach dieser Construction erscheint jede Isophenge als die Durchdringungscurve eines schiefen Kreiskegels mit der Kugeloberfläche.

Durch den Mittelpunkt O der gegebenen Kugel K ist der Lichtstrahl l gelegt und auf demselben die Strecke $\overline{Oa}$ gleich der Einheit des Intensitätsmaassstabes aufgetragen. Um $\overline{Oa}$ als

Durchmesser ist eine Kugel K_1 gezeichnet, welche den geometrischen Ort der Fusspunkte aller Senkrechten vorstellt, die man von a auf alle Radien der Kugel K fällt. Um die Intensität eines Punktes auf der Oberfläche der Kugel K zu finden, ist der zugehörige Kugelradius bis zum Schnitte mit der Kugel K_1 zu verlängern und von diesem Schnittpunkte eine Senkrechte gegen die Sehrichtung zu ziehen. Diese Senkrechte schneidet auf dem Sehstrahle die gesuchte Helleintensität ab.

Punkte gleicher Helleintensität können daher gefunden werden, wenn man durch einen bestimmten Punkt des Intensitätsmaassstabes eine Ebene senkrecht auf die Sehrichtung legt und mit der Kugel K_1 zum Schnitte bringt. Betrachtet man diesen Schnittkreis als Basis eines Kegels, dessen Spitze im Mittelpunkte O der Kugel K liegt und bringt diesen Kegel mit der Kugel K zum Schnitte, so stellt die Durchdringungscurve die Kugelisophengen von der verlangten Intensität vor.

Die Isophengen der Kugel ergeben sich somit, wie erwähnt, als die Durchdringungslinien von schiefen Kreiskegeln mit der gegebenen Kugel. Die Grundflächen dieser Kegel stehen senkrecht auf der Sehrichtung, daher parallel zu jener Projectionsebene, welche auf der Sehrichtung senkrecht steht. Ein System von Kreisschnitten eines jeden dieser Kegel ist daher parallel zu einer Projectionsebene, was die Ermittelung der Durchdringung wesentlich vereinfacht.

Soll beispielsweise in Fig. 5 die Aufrissisophenge mit der Intensität 0·5 ermittelt werden, so wird die Intensitätsscala auf der Sehrichtung $m'O'$ aufgetragen und durch den Theilstrich 0·5 die Ebene E_1E_1 parallel zur verticalen Projectionsebene gelegt und mit der Kugel K_1 zum Schnitte gebracht. Der Schnittkreis k_1 projicirt sich im Grundrisse in der Geraden k_1', der Mittelpunkt desselben liegt in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte der Kugel K_1, seine Projectionen sind o_1', o_1''. Der Kegel C mit der Basis k_1 und der Spitze O schneidet die gegebene Kugel K nach der Aufrissisophenge von der Helleintensität 0·5. Schneidet man demnach die Kugel K und den Kegel C durch eine zur verticalen Projectionsebene parallele Ebene E_2E_2, so erhält man im Aufrisse zwei Kreise k_2'' und k_3'', die sich in den Isophengenpunkten b'' und d'' schneiden. Die

Tangenten t_1'' und t_2'' an die Punkte b'' und d'' der Isophenge sind leicht zu ermitteln als die Schnittlinien von Tangirungsebenen, welche man in den Punkten b und d an die Kugel K und an den Kegel C legt.

Betrachten wir beispielsweise den Punkt b. Die in diesem Punkte parallel zur horizontalen Projectionsebene an die Kugel gelegte Tangente ist τ_1; die durch b parallel zur verticalen Projectionsebene gelegte Kugeltangente ist τ_2; die durch τ_1 und τ_2 bestimmte Berührungsebene der Kugel wird von einer zur verticalen Projectionsebene senkrecht stehenden Ebene PQR nach der Geraden ef geschnitten.

Die durch den Punkt b hindurchgehende Berührungsebene des Kegels C ist bestimmt durch die Mantellinie bO und durch die Tangente τ_3 an den Kreis k_3. (Die verticalen Projectionen von τ_3 und τ_1 fallen zufällig zusammen.) Bringt man die Geraden Ob und τ_3 mit PQR zum Schnitte, so erhält man in Og den Schnitt der Ebene PQR mit der Berührungsebene des Kegels. Die Geraden Og und ef schneiden sich in einem Punkte h, dessen verticale Projection h'' ein Punkt der Isophengentangente t_1'' ist. Offenbar muss aus Gründen der Symmetrie die Tangente t_2'' ebenfalls durch h'' hindurchgehen.

Abgesehen von den auf diese Weise construirten Isophengenpunkten und Isophengentangenten ist es zweckmässig, die Isophengenpunkte des grössten Horizontalkreises der Kugel zu ermitteln. Dieselben liegen in den Isophengen eines verticalen, die Kugel K umhüllenden Kreiscylinders und können nach Fig. 3 bestimmt werden.

Ferner können charakteristische Punkte der Aufrissisophengen in der verticalen Projection l'' des Lichtstrahles erhalten werden, indem man die Beleuchtungsconstruction auf einen senkrechten Kreiscylinder anwendet, dessen Basis der in der Ebene PQR liegende grösste Kreis der Kugel K ist. Die Construction ist ebenfalls nach Fig. 3 durchzuführen, nachdem man die Basisebene PQR des Cylinders um ihre horizontale Spur PQ in die horizontale Projectionsebene gedreht hat. Nachdem die durch den Lichtstrahl l und die Sehrichtung mO gelegte Ebene PQR eine Symmetrieebene der Kugel ist, so müssen die Aufrissisophengen beiderseits der Spur QR symmetrisch

verlaufen. Die Punkte grösster Helleintensität werden daher auch in der Symmetrielinie QR zu suchen sein. Die Hellepole des erwähnten, auf PQR senkrecht stehenden Cylinders treffen somit den in der Ebene PQR liegenden grössten Kugelkreis in den absoluten Hellepolen P_1 und P_2 des Aufrisses der Kugel. Nach dem bei Besprechung des Cylinders Gesagten müssen demnach die absoluten Hellepole der Kugel allgemein in der durch die Lichtstrahlenrichtung und die Sehrichtung gelegten Ebene liegen und die zu den Hellepolen gehörigen Kugelradien den Winkel zwischen Licht- und Sehstrahl, beziehungsweise dessen Nebenwinkel halbiren. Auf Grund dieser Regel sind in Fig. 3 die absoluten Hellepole ermittelt worden.

Eine dritte Art zur Ermittelung der Isophengen einer Kugel zeigt Fig. 6. Jede Isophenge ist hier als Schnitt einer hyperbolischen Cylinderfläche mit der Kugel zur Darstellung gebracht. Diese Methode ist am besten geeignet, über den charakteristischen Verlauf der Helleintensitätslinien Aufschluss zu geben.

K' und K'' sind Grund- und Aufriss der gegebenen Kugel, l' und l'' die bezüglichen Projectionen eines durch deren Mittelpunkt O hindurchgehenden Lichtstrahles. Durch Transformation der Coordinaten, wobei die durch die Sehrichtung mO und den Lichtstrahl l hindurchgehende Ebene PQR als neue Projectionsebene angenommen wurde, erhält man die neuen Projectionen K''' und l''' von Kugel beziehungsweise Lichtstrahl.

In dieser Projection zeigen sich nun die Linien gleicher w a h r e r Beleuchtungsintensität als die auf l''' senkrecht stehenden Sehnen (0·0), (0·1), (0·2)... u. s. w.

Verbindet man ferner alle Punkte der Kugel, deren zugehörige Kugelradien mit der Sehrichtung $m'''O''$ den gleichen Winkel einschliessen, so erhält man Kreise, die sich in der dritten Projection als die auf $m'''O''$ senkrecht stehenden Sehnen [0·0], [0·1], [0·2]... u. s. w. projiciren. Beispielsweise verbindet jener Kreis, der sich in der mit [0·5] bezeichneten Sehne projicirt, alle Punkte der Kugel, für welche der Cosinus des besagten Winkels gleich ist 0·5. Die Schnittpunkte des Kreises (0·6) mit dem Kreise [0·5] haben sonach die wahre Beleuchtungsintensität 0·6 und die scheinbare Beleuchtungsintensität 0·6.0·5 = 0·3. Die Punkte gleicher Helleintensität

sind daher in der dritten Projection leicht gefunden. Wie leicht zu ersehen, projiciren sich die Aufrissisophengen in der dritten Projection als Hyperbeln, deren Asymptoten auf den Richtungen $l'''O'''$, beziehungsweise $m'''O'''$ senkrecht stehen. Die Axen dieser Hyperbeln halbiren demnach den Winkel zwischen Licht- und Sehrichtung, respective dessen Nebenwinkel. Daraus erkennt man auch sofort die Richtigkeit des bei der früheren Construction über die Lage der Hellepole Gesagten.

Die Ermittelung der verticalen Projection der Isophengen ist in Fig. 6 für die Helleintensitäten 0·3 und —0·1 durch Bestimmung der charakteristischen Punkte und Tangenten, sowie einiger Zwischenpunkte mit ihren Tangenten ausgeführt.

Beispielsweise erhält man die verticale Projection jenes Punktes der Isophenge 0·3, dessen dritte Projection a''' ist, indem man den durch $a'''O'''$ hindurchgehenden grössten Kugelkreis in die zur verticalen Projectionsebene parallele Lage dreht. Die verticale Projection des gedrehten Punktes a ergibt sich in $(a_1)''$, beziehungsweise $(a_2)''$. Durch Zurückdrehen erhält man a_1'', beziehungsweise a_2''. Die Tangenten τ_1'' und τ_2'' in den Isophengenpunkten a_1'' und a_2'' erhält man, indem man im Punkte a die Berührungsebenen an die Kugel K und an jene hyperbolische Cylinderfläche legt, deren dritte Projection mit der dritten Projection der Isophenge 0·3 zusammenfällt. Die Schnittlinie dieser beiden Berührungsebenen ist eine Tangente an die Isophenge.

Die Berührungsebene an die Kugel hat ihre dritte Spur in t_1, die Berührungsebene des Cylinders hat ihre dritte Spur in t_2, somit ist der Schnittpunkt T (dessen verticale Projection sich in T'' ergibt) ein Punkt der gesuchten Tangente.

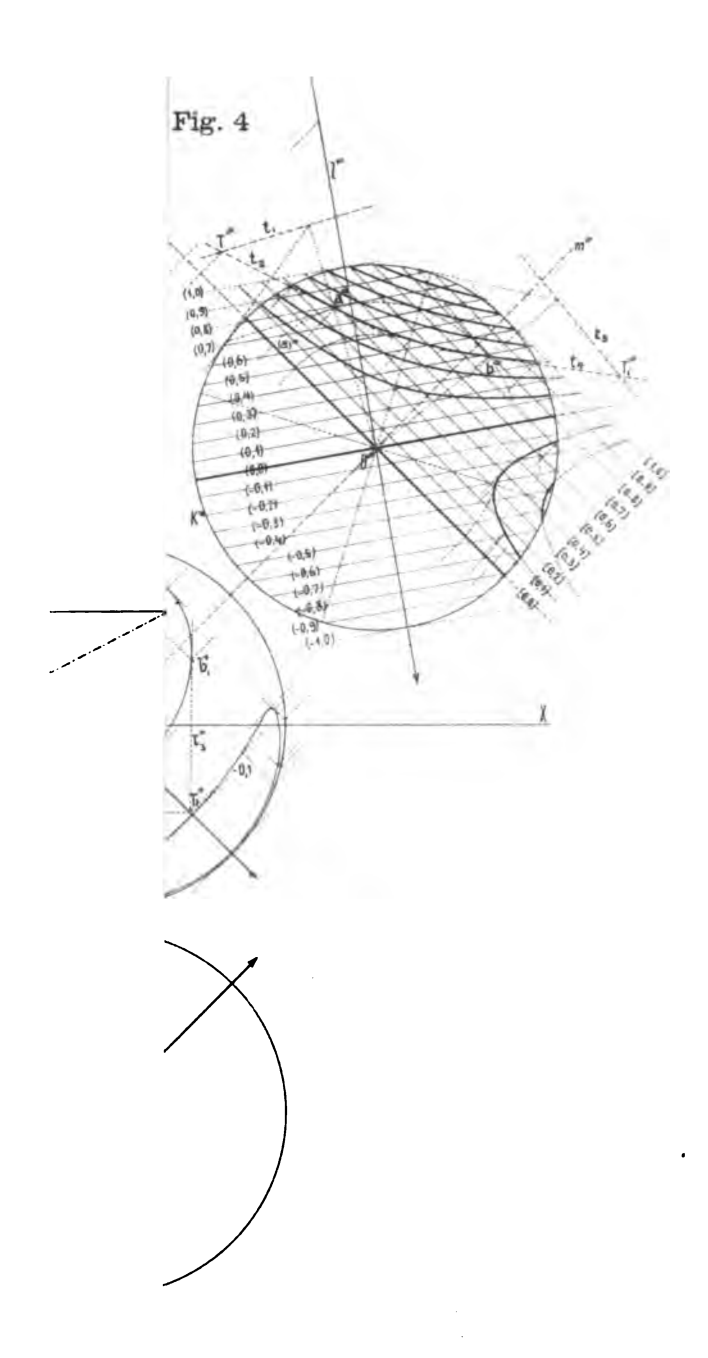
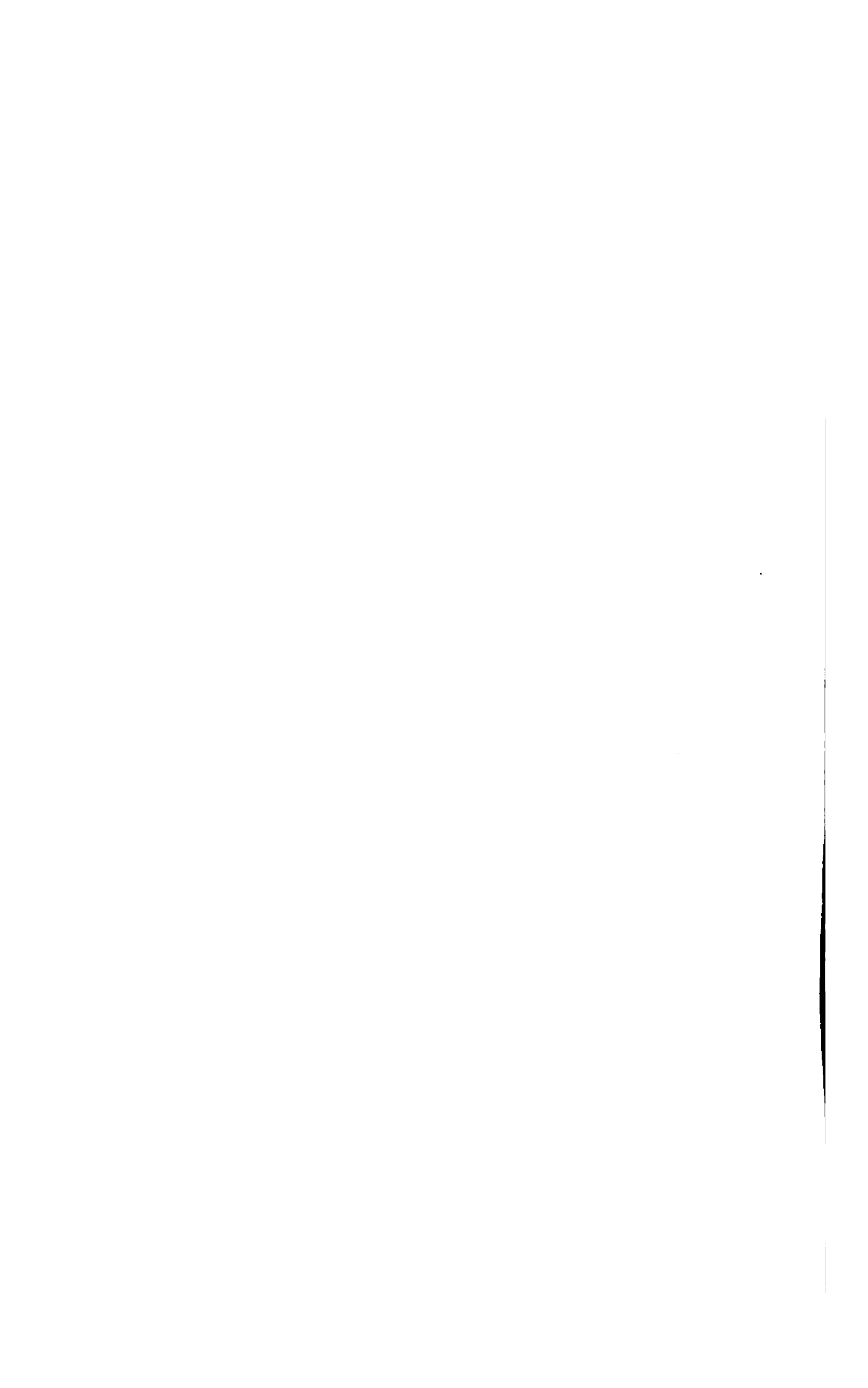


Fig. 4

kais. Akad



Über die Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit

von

Alois Indra,

k. u. k. Artillerie-Oberst.

(Mit 1 Textfigur.)

(**Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1896.**)

Die angestrebte Fortsetzung und praktische Verwerthung meiner Studien über die Wärmeleitung in Kanonenrohren[1] versetzte mich in die Nothwendigkeit, ein Thermometer zu besitzen, welches die momentan herrschende Temperatur oder Temperaturdifferenz an Geschütztheilen sofort anzugeben gestattet.

Wenngleich das Thermoelement ein ganz geeignetes Mittel hiezu bietet, so ist dessen Anwendung bei Experimenten in der unmittelbaren Nähe des feuernden Geschützes so gut wie ausgeschlossen.

Indem ich nun versuchte, die gewöhnlichen Quecksilber-Thermometer zu Momentanmessungen anzuwenden, wurde ich durch folgenden Gedankengang geleitet:

Wird ein Quecksilber-Thermometer, welches die Temperatur der umgebenden Luft besitzt, mit einer Wärmequelle in Berührung gebracht, so steigt die Quecksilbersäule mit einer gewissen abnehmenden Geschwindigkeit, und wir messen die Temperatur durch die Höhe der Quecksilbersäule nach einer meist willkürlichen Zeit, sobald keine weitere Ausdehnung des Quecksilberfadens wahrgenommen werden kann.

[1] Indra, Neue ballistische Theorien. I. Analytische Theorie der Wärmeleitung in Geschützrohren. Pola 1893.

Es wird daher bei gewöhnlichen Messungen der Temperatur auf die Zeit der Einwirkung der Wärmequelle keine streng gesetzmässige Rücksicht genommen, sondern jene unbestimmte Zeit abgewartet, bis der Beharrungszustand in der Quecksilbersäule eingetreten ist.

Diese Zeit wird bei gewöhnlichen Temperaturmessungen aus zweifachen Gründen leicht zu bemessen sein:

1. Wenn die ganze Quecksilbersäule mit der Wärmequelle in Contact gebracht werden kann, und

2. wenn die Wärmequelle entweder absolut stationär ist oder durch unvermeidliche Wärmeverluste nur wenig abnimmt.

Schwierig wird jedoch die Temperaturbestimmung, wenn im Gegentheile

1. nur das Quecksilbergefäss oder — wie bei manchen Experimenten beim Geschütz — nur der Boden des Gefässes mit der Wärmequelle in Contact gebracht werden kann, und

2. wenn die Wärmequelle während des Messens der Temperatur nicht nur nicht gleichmässig verharrt, sondern bedeutend steigt oder fällt.

Was den Punkt 1 anbelangt, so wurden bereits Methoden angegeben bezüglich der »Thermometer-Correction für den herausragenden Faden«.[1]

Bezüglich der Temperaturmessungen ad 2, d. h. wenn die Wärmequelle beständig steigt oder fällt, ist mir keine Methode bekannt geworden, und die Entwicklung derselben bildet den Gegenstand der nachstehenden Abhandlung.

Die grundlegende Idee für die Bestimmung der momentanen Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle mittelst gewöhnlicher Quecksilber-Thermometer besteht darin, dass zuerst, je nach der Geschwindigkeit der Temperaturänderung, angenommen wird, die Temperatur sei in einem entsprechend kleinen Zeitbereich t_0 constant.

Dieses Zeitintervall könnte nun im Allgemeinen innerhalb eines beliebigen Zeitintervalles t gewählt werden; aus

---

[1] Wüllner, Experimentalphysik, Leipzig 1875, S. 310, mitgetheilt in Landolt's Abhandlung über die Dampftensionen homologer Verbindungen. Bonn 1868.

praktischen Gründen — da man ja grösstentheils Anfangstemperaturen messen will — ist hier unter t_0 eine anfängliche Zeit verstanden.

Ist nun die Umgebungstemperatur u_0, die dem Zeitintervalle t_0 entsprechende Temperatur u_t und die Temperatur für den Beharrungszustand u, so kann ich die mir gestellte Aufgabe in nachstehender Weise formuliren:

Es soll bei der momentanen Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle jene Temperatur u gemessen werden, welche die Wärmequelle im Anfangszustande (oder zu einer bestimmten Zeit t) hatte, wenn innerhalb der Zeit t_0 die Wärmequelle nahezu als constant angesehen werden konnte.

(Die Wahl von t_0 hängt daher von der Geschwindigkeit der Temperaturänderung der Wärmequelle ab und ist dieser Geschwindigkeit verkehrt proportional.)

Zur Durchführung der grundlegenden Experimente besass ich nur ein einfaches Quecksilber-Thermometer mit gewöhnlicher Centigrad-Eintheilung und zur Bestimmung der Zeit eine gewöhnliche Taschenuhr.

Die veränderliche Wärmequelle bildete ein Gefäss mit heissem Wasser, welche durch Wärmemittheilung an die umgebende Luft ihre Temperatur nur langsam änderte, so dass $t_0 = 5$ Secunden gewählt werden konnte.

Das Thermometer wurde in die Flüssigkeit nur auf die Länge des Thermometergefässes getaucht. Bei den ersten Versuchen besorgte ich selbst sowohl die Ablesung u_t des Thermometers, als auch der Zeit t_0 und erhielt hiebei nachstehende Resultate:

$t_0 = 5$ Secunden $\qquad u_0 = 30°$ C.

u_t	u	$\frac{u_t - u_0}{u - u_0}$
$u_t = 48°$ C.	$u = 54^1/_2°$ C.	$= 0·73$
46	$52^1/_2$	0·71
45	$51^1/_2$	0·69
43	50	0·65
42	49	0·64
41	$47^1/_2$	0·63

$u_t = 41°$ C.	$u = 46°$ C.	$\frac{u_t - u_1}{u - u_0} = 0 \cdot 64$
$40^1/_4$	$45^1/_4$	$0 \cdot 67$
40	45	$0 \cdot 66$
$35^1/_2$	38	$0 \cdot 69$
		Mittel $0 \cdot 67$

Bezüglich der Verwerthung der erhaltenen Messungsresultate ging ich von der Überlegung aus, dass a priori für

$$u = u_0 \text{ auch } u_t = u_0$$

sein muss; dass ferner nach dem Gesetze der Wärmeleitung im unendlichen Stabe für

$$t = 0, \quad u_t = u_0$$

und für

$$t = \infty, \quad u_t = u$$

sein müsse. Ferner folgt aus der linearen Form der Wärmeleitungsgleichung, dass bei constantem t die Grösse $u_t - u_0$ der Grösse $u - u_0$ proportional sein muss. Es ist daher $u_t - u_0 = (u - u_0) f(t)$, dabei muss $f(0) = 0$ und $f(\infty) = 1$ sein.

Für $t = t_0$ ist der Werth der Function eine Constante, so dass

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = f(t_0) = K$$

sämmtliche Argumentenwerthe in Beziehung bringt.

Die obigen Versuchsresultate zeigen mit Rücksicht auf die unvollkommene Art der Versuchsführung mit genügender Deutlichkeit den Charakter der Constanten und geben den Mittelwerth

$$K = 0 \cdot 67.$$

Indem ich nun den vorigen Versuch bei Annahme derselben Zeit $t_0 = 5$ sec., aber einer anderen Umgebungstemperatur $u_0 = 20°$ C. wiederholte, wobei aber die Ablesung der Zeit ein Gehilfe (in Person meiner Frau) besorgte, erhielt ich nachstehende Zahlenreihen:

$u_t = 47°$ C.	$u = 60^1/_4°$ C.	$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = 0 \cdot 67.$
41	$53^1/_4$	0·65
40	50	0·67
$38^1/_4$	47	0·67
36	44	0·67
33	$41^1/_2$	0·65
33	39	0·68
28	$32^1/_2$	0·64
27	$29^3/_4$	0·72
$25^3/_4$	$28^3/_4$	0·65
		Mittel 0·67

Die Function f kann ohneweiters bestimmt werden, wenn man annimmt, dass zur Zeit t die Wärme noch so wenig tief in das Thermometergefäss eingedrungen ist, dass die Formel für die Wärmeleitung in einem cylindrischen Stabe angewendet werden darf.

Für einen solchen erhält man für die Temperatur $u_{t,x}$ in dem Querschnitte mit der Abscisse x den Ausdruck

$$u_{t,x} - u_0 = (u - u_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Für die gesammte Temperaturerhöhung u_t, welche offenbar der gesammten eingedrungenen Wärme proportional ist, ergibt sich daher

$$u_t - u_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (u - u_0) \int_0^{\infty} dx \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Setzt man

$$\frac{x}{2\sqrt{kt}} = \xi,$$

so ist

$$u_t - u_0 = (u - u_0) . 4 \sqrt{\frac{kt}{\pi}} \int_0^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta,$$

und nach durchgeführter theilweiser Integration

$$u_t - u_0 = (u - u_0)\, 2 \sqrt{\frac{kt}{\pi}}$$

oder nach Zusammenfassung der constanten Grössen in eine Constante C,

$$u_t - u_0 = (u - u_0) . C \sqrt{t}. \qquad \ldots 1)$$

Diese einfache Formel kann aber nur für sehr kleine Werthe von t benützt werden, da sie nur der einen an die Function $f(t)$ gestellten Forderung entspricht, dass $f(0) = 0$ sei, dagegen nicht mehr der Forderung $f(\infty) = 1$ Rechnung trägt.

Eine Function, welche beiden Bedingungen entspricht und als erstes Glied auch die eben abgeleitete Function enthält, ist dargestellt durch die empirische Formel

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\tau_1^2} d\tau_1,$$

worin m eine erst näher zu bestimmende Constante bedeutet.

Die Reihenentwicklung dieser Function ergibt

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot m \sqrt{t} \left(1 - \frac{m^2 t}{3} + \frac{m^4 t^2}{1.2.5} \cdots \right),$$

woraus die Beziehung zur vorhin abgeleiteten Function ersichtlich ist.

Mit Hilfe dieser letzteren Function von t erhält man die Formel für u_t

$$u_t - u_0 = (u - u_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\tau_1^2} d\tau_1, \qquad \ldots 2)$$

in welcher die Constante m durch das Experiment zu bestimmen ist. Bezüglich der Bestimmung der Constanten m ist hervorzuheben, dass die Anordnung des Experimentes bei der Wahl der Wärmequelle genau der Art der Verwendung des Thermometers bei der praktischen Anwendung entsprechen muss; es erscheint daher eine und dieselbe Constante nur bei genau bestimmter Qualität des Vergleichskörpers und bestimmt gegebener Art der Berührung zwischen dem Körper und dem Thermometer definirt.

Bei der experimentellen Bestimmung der vorhin angeführten Zahlenreihe war das Thermometer mit dem ganzen Gefässe in Wasser getaucht; die aus diesen Zahlen zu rechnende Constante m entspricht daher nur für Temperaturmessungen mit dem in Verwendung gestandenen Thermometer bei gleicher Tauchung in eine tropfbare Flüssigkeit, welche ebenso wie Wasser netzt und deren Wärmeleitungsconstante von der des Wassers nicht bedeutend differirt.

Dieselbe Constante wäre daher zur Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers nicht mehr anwendbar.

Bei nicht vollkommener Tauchung des Thermometergefässes, sondern nur theilweiser Berührung desselben mit einem festen Körper ist es nöthig, dass die Constante m aus Experimenten mit einem Vergleichskörper abgeleitet werde, welcher hiebei mit dem Thermometergefäss genau in gleicher Weise in Berührung kommt, und welcher eine nahezu gleiche Wärmeleitungsconstante besitzt.

Bei Verwerthung der früher angeführten Versuchsdaten zur Bestimmung der Constanten C in Formel 1), beziehungsweise von m in Formel 2) ergibt sich

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = C\sqrt{t} = 0\cdot 67, \quad C = 0\cdot 2996,$$

respective

$$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2} d\eta = 0\cdot 67$$

$$m\sqrt{t} = 0\cdot 69, \quad m = 0\cdot 3085.$$

Beide Constante sind daher praktisch gleich zu nennen, und man wird in vielen Fällen die einfachere Formel 1) der Formel 2) vorziehen.

Den hier verwertheten Versuchsdaten lag eine Expositionszeit des Thermometers von 5 Secunden zu Grunde.

Um den Einfluss einer geänderten Annahme der Expositionszeit t_0 kennen zu lernen, wurde die nachstehende Versuchsreihe durchgeführt — unter der Annahme von

$$t_0 = 10 \text{ Secunden}, \qquad u_0 = 20° \text{ C}.$$

$u_t = 71°$ C.,	$u = 77°$ C.,	$\frac{u_t - u_0}{u - u_0} = 0 \cdot 895$
57	61	0·902
$49^1/_2$	$53^3/_4$	0·874
$41^1/_2$	$46^3/_4$	0·795
$40^1/_2$	43	0·891
$37^1/_2$	$40^3/_4$	0·843
$34^3/_4$	$37^1/_4$	0·855
$33^3/_4$	$36^1/_2$	0·833
$32^1/_2$	$35^1/_4$	0·817
32	34	0·857
$30^3/_4$	$33^1/_4$	0·814
$29^3/_4$	$30^3/_4$	0·907
28	30	0·800
27	29	0·778
		Mittel.. 0·847

Aus diesen Zahlenreihen für $t_0 = 10$ Sec. folgt

$$C\sqrt{10} = 0 \cdot 847, \qquad C = 0 \cdot 2679$$

oder

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{10}} e^{-\eta^2} d\eta = 0 \cdot 847, \qquad m\sqrt{10} = 1 \cdot 01,$$

$$m^2 = 0 \cdot 10201, \qquad m = 0 \cdot 3194.$$

Mit Rücksicht auf die äusserst primitive Art der Durchführung der Experimente ist die erhaltene Übereinstimmung der drei Werthe von m immerhin sehr befriedigend und kann als Bestätigung der a priori angenommene Functionsformen angesehen werden. Dagegen differirt der Werth von C schon bedeutender, womit die beschränkte Anwendbarkeit der Formel 1) ersichtlich ist.

Ich habe nun den Versuch in exacterer Form in nachstehender Weise durchgeführt, um die früher abgeleiteten Resultate zu verificiren.

Da die Ablesung des Standes der Quecksilbersäule in einem bestimmten, der Zeit t_0 entsprechenden Momente ihrer Bewegung sehr schwierig und ungenau ist, so wählte ich beim folgenden

Experimente statt der angemessenen Zeit t_0 eine angemessene Temperatur u_t und bestimmte nun umgekehrt die Zeit t_0 entsprechend dem Anlangen der Quecksilbersäule bei dem betreffenden Theilstrich der Thermometerscala mit einer genau gehenden Uhr von Marenzeller, welche das momentane Auslösen und Einstellen des Zeigers am Anfang und Ende der Zeit ermöglicht und die Zeiten bis auf Hundertstel-Secunden directe abzulesen gestattet.

Die Versuche ergaben nachstehende Resultate:

$$u_0 = 20° \text{ C.}$$

u_t° C.	u° C.	t_0 Sec.	$\frac{u_t - u_0}{u - u_0}$	$m\sqrt{t_0}$	m^2
60	70	7·11	0·800	0·906	0·1155
50	$65^1/_4$	4·40	0·663	0·679	0·1047
50	$61^3/_4$	4·39	0·719	0·763	0·1327
50	$58^1/_4$	6·62	0·783	0·873	0·1151
45	$55^1/_2$	5·27	0·702	0·735	0·1024
45	54	6·12	0·733	0·785	0·1007
45	$52^1/_2$	6·18	0·769	0·847	0·1160
40	$46^3/_4$	4·72	0·747	0·808	0·1385
40	46	6·29	0·769	0·847	0·1139
40	$45^1/_4$	6·03	0·792	0·892	0·1319
				Mittel..	0·1171

Dem entspricht $m = 0·3422$, also ein etwas höherer Werth als früher, welcher einer etwas ungleichförmigen Tauchung des Thermometers in die Wärmequelle zuzuschreiben sein dürfte.

Vergleicht man die Werthe von m^2 aus den vier Versuchsreihen, so hat man

	m^2
	0·0952
	0·0952
	0·1020
	0·1171
Mittel...	0·1024

$$m = 0·32$$

Dieser Mittelwerth gehört nur zu meinem beim Versuche verwendeten Thermometer und ist daher für jedes Thermometer bei einer und derselben Berührungsart mit der Wärmequelle eine und dieselbe charakteristische Zahl, welche entweder schon bei der Construction des Thermometers auf die vorstehende Weise ermittelt und am Thermometer kennbar gemacht werden könnte, oder sie muss vor der Verwendung des Thermometers zur Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle erst ermittelt werden.

Für mein Thermometer ergibt sich nun die Formel

$$u_t = u_0 + (u - u_0)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{0\cdot 32\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta.$$

Bei der praktischen Anwendung des Thermometers handelt es sich aber nicht um die Bestimmung der Temperatur u_t, sondern der Temperatur u, welche einem stationären Temperaturzustande der Wärmequelle entsprechen würde, welche eben während der Zeit t_0 geherrscht hat.

Aus obiger Formel erhält man

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{C\sqrt{t}},$$

beziehungsweise

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t_0}} e^{-\eta^2}\,d\eta}.$$

Auf Grund der abgeleiteten Formel können durch das Experiment nachstehende praktische Fragen der Thermometrie gelöst werden:

1. Bestimmung der Temperatur einer constanten Wärmequelle, wenn nicht die ganze Quecksilbersäule, sondern nur das Gefäss oder selbst nur der Boden des Gefässes mit der Wärmequelle in Contact gebracht werden kann.

Zur Lösung dieser Aufgabe muss die Constante m so bestimmt worden sein, dass bei ihrer Ermittlung das Thermometer in derselben Weise mit der Wärmequelle in Contact gebracht wurde, wie es bei der Verwendung gefordert wird: entweder nur das Gefäss oder nur der Boden des Gefässes.

Die Formel leistet dann nicht nur dasselbe wie die Entwicklung von Wüllner für die Correctur des herausragenden Fadens, sie gibt bereits nach der beliebig klein gewählten Zeit t_0 die maximale Temperatur u an, welche die Quecksilbersäule eigentlich erst in einer viel grösseren Zeit erreichen würde, wenn die Temperatur u constant erhalten bliebe.

Ausserdem zeigt die Formel, dass es für jede Temperatur eine bestimmte Zeit t gibt, in welcher mit praktisch hinlänglicher Genauigkeit der Beharrungszustand in der Quecksilbersäule erreicht ist.

Diese Zeit wird dann erreicht sein, wenn die Ablesung in späterer Zeit keine nennbare Vermehrung der Temperatur zur Folge hat.

Nehmen wir an, dass es nicht mehr möglich wäre, eine Temperaturdifferenz von 0·01° C. zu constatiren, so dass wir setzen können

$$u-u_0 = u_t-u_0 \pm 0\cdot 01;$$

dann ist, da für die Rechnung nur das untere Zeichen verwerthbar ist,

$$\frac{u-u_0+0\cdot 01}{u-u_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta$$

oder

$$0\cdot 01 = (u-u_0)\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta\right).$$

Damit der Fehler 0·01 für alle Werthe der relativen Temperatur u nicht überschritten wird, muss t so bestimmt werden, dass

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta = \frac{0\cdot 01}{u-u_0}.$$

Setzen wir z. B. $u-u_0 = 100°$ C., so ist

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta = 0\cdot 0001,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\eta^2}\,d\eta = 0\cdot 9999,$$

daher $m\sqrt{t} = 2\cdot 75$ und $t = 73\cdot 96$ Sec.

Bei Versuchen mit einem gewöhnlichen Thermometer wird man die Temperatur höchstens bis auf 0·25° C. genau angeben können; bei einer Temperatursdifferenz $u - u_0 = 20°$ ist

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t}} e^{-\tau_1^2} d\tau_1 = 1 - \frac{0 \cdot 25}{20} = 1 - 0 \cdot 0125 = 0 \cdot 9875,$$

wofür

$$m\sqrt{t} = 1 \cdot 766 \text{ und } t = 30 \cdot 25 \text{ Sec.}$$

entspricht.

Ein diesbezüglich durchgeführter Versuch ergab für

$$u_0 = 20°, \quad u = 40 \cdot 75°, \quad t = 34 \cdot 43 \text{ Sec.}$$

Indem hiemit bei vorausgesetzter Bekanntgabe meiner Constanten m für das im Gebrauche befindliche Thermometer bei einer bestimmten Art der Berührung mit der Wärmequelle diejenige Zeit t bestimmt werden kann, in welcher scheinbar der Beharrungszustand in der Quecksilbersäule eintritt, so entfällt jetzt die bisherige Unbestimmtheit und Willkür bezüglich des richtigen Zeitpunktes für die Ablesung des Thermometerstandes bei einer constanten Wärmequelle.

2. Bestimmung der Temperatur u eines constanten Wärmezustandes in einer sehr kleinen Zeit t_0.

Das Bedürfniss, die Temperatur einer constanten Wärmequelle in einer sehr kleinen Zeit zu bestimmen, liegt im Allgemeinen nicht vor; die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich in analoger Weise wie die folgende:

3. Bestimmung der Temperatur u einer veränderlichen Wärmequelle zu einer bestimmt gegebenen Zeit.

Der einfachste Fall ist der, wenn die veränderliche Temperatur der Wärmequelle zur Zeit $t = 0$ bestimmt werden soll.

Es wird sich nämlich bei der vollkommenen Untersuchung eines veränderlichen Wärmezustandes darum handeln, entweder die Temperatur desselben in bestimmten Zeitintervallen zu messen, um den Verlauf der Abkühlung beziehungsweise der Temperaturssteigerung der Wärmequelle kennen zu lernen, oder es soll zur gleichen Zeit der Zustand einer an verschiedenen Orten verschieden temperirten Wärmequelle gemessen werden.

Die Lösung der Aufgabe besteht unter allen Umständen darin, dass ein Thermometer, welches vor der Messung die

Temperatur u_0 der umgebenden Luft besitzt, in einer hinlänglich kleinen Zeit t_0 (innerhalb welcher die veränderliche Wärmequelle nahezu constant angesehen werden kann) mit der Wärmequelle in bestimmter Weise in Berührung gebracht und nach Ablauf der Zeit t_0 die Temperatur u_t am Thermometer abgelesen wird.

Die wahre Temperatur der Wärmequelle ergibt sich dann durch Rechnung aus der Formel:

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t_0}} e^{-\tau_1^2} d\tau_1} .$$

Soll der ganze Verlauf der Wärmequelle durch Messung bestimmt werden, so muss für die folgenden Zeitintervalle wieder die Anfangstemperatur u_0 hergestellt und das kleine Zeitintervalle t_0 der Wärmequelle entsprechend angepasst werden, so dass bei gesteigerter Temperatur t_0 vermindert, bei verminderter Temperatur vermehrt wird.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung von u unter Beibehalt eines und desselben Werthes von t_0, indem dann

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{K}$$

gesetzt werden kann.

Da sich das Ablesen der Temperatur u_t während der Bewegung des Quecksilberfadens sehr schwierig gestaltet, so ist es zweckmässig, statt der Wahl einer entsprechend kleinen Zeit t_0 einen entsprechenden Werth von u_t anzunehmen und die Zeit t_0 vom Momente der Berührung der Wärmequelle bis zum Anlangen des Quecksilberfadens bei der Temperatur u_t mittelst einer genauen Uhr (Marenzeller) zu bestimmen.

Zur praktischen Anwendung des Thermometers bei der Messung der momentanen Temperatur der Bohrungswände von Geschützrohren versuchte ich es zuerst das Thermometergefäss aus Metall zu construiren, wodurch nebst der grösseren Empfindlichkeit sich auch der Vortheil ergeben würde, mit

einem gewöhnlichen Quecksilberthermometer von 50° Scalenlänge und mit Decimaleintheilung sehr hohe Temperaturen bis zu 250° C. messen zu können.

Es ergibt sich dies aus der Formel 2), wenn man die Expositionszeit z. B. 5 Sec. wählt und den Contact des Thermometergefässes mit der Wärmequelle nur durch Anlegen des Gefässes an den festen Körper herstellt, so dass die Berührung nur in einem Oberflächenelement erfolgt.

Dann ist (für ein bestimmtes Thermometer mit Glasgefäss)

$$m = 0\cdot0315,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m\sqrt{5}} e^{-\eta^2}\,d\eta = 0\cdot0788.$$

Gestattet man bei der Messung einer hohen Temperatur ein Steigen der Quecksilbersäule bis 40° C., so ist

$$u_t = 40°,$$

und sei

$$u_0 = 20°,$$

so ergibt sich

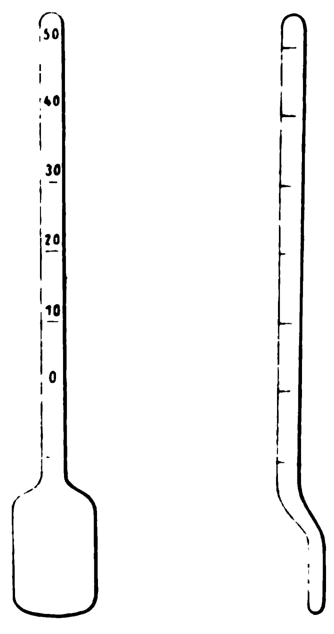
$$u = 20 + \frac{20}{0\cdot0788} = 274° \text{ C.}$$

Die Anwendung von metallenen Thermometergefässen stösst dermalen noch auf Schwierigkeiten, so dass dasselbe vorläufig noch aus Glas hergestellt werden musste. Die vorgeführten Versuchsreihen zeigten aber, dass die geringe Wärmeleitungsfähigkeit des Glases die Anwendbarkeit desselben nicht stört.

Damit eine möglichst innige Berührung des Gefässes mit einem ebenen festen Körper ermöglicht werde, wurde die Glasröhre des Thermometers am oberen Ende des Gefässes abgebogen und das letztere plattgedrückt — wie in der nachstehenden Figur angedeutet — und das Thermometer zur leichteren Handhabung in ein Korklager gebettet.

Mit einem solchen von Herrn Heinrich Kapeller in Wien ausgeführten Thermometer mit Decimaleintheilung konnte ich nun thatsächlich den experimentellen Beweis erbringen, welchen ich in meiner eingangs citirten Studie über die Wärme-

leitung in Geschützrohren theoretisch entwickelte, dass die Erwärmung der Geschützrohre beim Schusse nur zum geringsten Theile durch die Mittheilung der Verbrennungs-Temperatur der Pulvergase an die Bohrungswände, sondern hauptsächlich durch die in Wärme umgesetzte und auf die Bohrungswände übertragene Vibrationsarbeit der Pulvergase verursacht werde.



Vordere Ansicht Seitenansicht

Der experimentelle Nachweis ergab sich einfach durch nachstehende Temperaturmessungen an einem bronzenen Kanonenrohre.

Die Temperaturen wurden bei einer Expositionszeit des Thermometers von je 10 Secunden an der inneren und äusseren Bohrungswand nach je 7 Schüssen gemessen, welche in einer Zeit von circa $3^1/_2$ Minuten abgegeben wurden. Zwischen jeder Serie von 7 Schüssen verstrich eine Zwischenzeit von circa $2^1/_2$ Minuten.

Die Mittel aus mehreren Messungen ergaben:

Nach *n* Schüssen *n* =	Temperatur an der inneren Bohrungswand	Temperatur an der äusseren Bohrungswand
0	18·0° C.	18·0° C.
7	32·0	32·0
14	46·5	47·0
21	55·8	56·1
28	65·5	64·0
35	75·0	70·5
42	84·0	78·0
49	90·0	85·5

Diese Messungen zeigen, dass die Temperatursdifferenzen zwischen der inneren und äusseren Bohrungswand anfänglich verschwindend klein, für die späteren Schüsse aber ganz unbedeutend sind, so dass man behaupten könnte, die innere und äussere Bohrungswand wird durch den Schuss praktisch in gleicher Weise erwärmt.

Diese Thatsache könnte aber weder in qualitativer noch in quantitativer Weise niemals durch blosse Wärmeleitung hervorgerufen und kann nur dadurch erklärt werden, dass durch die Übertragung des Stosses der Pulvergase auf die Rohrmaterie die in der letzteren hervorgerufenen und mit der Schallgeschwindigkeit nahezu momentan bis an die äussere Bohrungswand fortgepflanzten Molecularschwingungen als Wärme zur Erscheinung gelangen, was experimentell zu beweisen war.

Über die Transcendenz der Zahlen e und π

von

F. Mertens.

1.

Wenn hier den Bearbeitungen der Beweise Hermite's und Lindemann's für die Transcendenz der Zahlen e und π von Weierstrass,[1] Hilbert,[2] Hurwitz[3] und Gordan[4] noch eine hinzugefügt wird, so geschieht dies nur, weil dieselbe mit möglichst einfachen algebraischen Sätzen auszukommen trachtet und keine zahlentheoretischen Hilfsmittel in Anspruch nimmt.

2.

Die Exponentialreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

zerfällt, wenn k, m ganze positive Zahlen bezeichnen, in die drei Theile:

$$X_k = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$Y_k = \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \dots + \frac{x^{m+k-1}}{(m+k-1)!}$$

$$Z_k = \frac{x^{m+k}}{(m+k)!} + \frac{x^{m+k+1}}{(m+k+1)!} + \dots \text{ in inf.}$$

[1] Sitzungsberichte der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1885, XLIX.

[2], [3], [4] Mathematische Annalen, XLIII.

Bezeichnet man die ganze Function $m-1^{\text{ten}}$ Grades von t

$$(t+m-1)(t+m-2)\ldots(t+1)+(t+m-1)(t+m-2)\ldots(t+2)x$$
$$+(t+m-1)(t+m-2)\ldots(t+3)x^2+\ldots+x^{m-1}$$

mit $g(t)$ und die erste, zweite, $\ldots m-1^{\text{te}}$ Differenzenreihe der Reihe

$$g(0), g(1), g(2), \ldots g(m-1)$$

beziehungsweise mit

$$g_1(0), g_1(1), g_1(2), \ldots g_1(m-2)$$
$$g_2(0), g_2(1), g_2(2), \ldots g_2(m-3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g_{m-1}(0),$$

so wird identisch

$$g(t) = g(0)+g_1(0)\frac{t}{1}+g_2(0)\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots$$
$$\ldots+g_{m-1}(0)\frac{t(t-1)\ldots(t-m+2)}{(m-1)!}$$

und man hat

$$(m+k-1)!\,Y_k = x^k g(k)$$
$$= g_0(0).x^k+\frac{g_1(0)x}{1!}.kx^{k-1}+$$
$$+\frac{g_2(0)x^2}{2!}.k(k-1)x^{k-2}+\ldots \quad (1)$$

Es sei nun

$$f(x) = a_0x^{n+1}+a_1x^n+\ldots+a_nx$$

eine ganze, durch x theilbare Function von x, deren Coëfficienten ganze oder auch ganze complexe Zahlen sind, in welcher a_0 nicht Null und welche zu ihrer Ableitung $f'(x)$ theilerfremd ist, und es werde

$$x^{\nu+1}\left(\frac{1}{x}f\right)^m = T = c_1^{(\nu)}x+c_2^{(\nu)}x^2+\ldots+c_{mn+n+1}^{(\nu)}x^{mn+n+1}$$

gesetzt, wo ν eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$ bezeichnet. Man multiplicire die Identität

$$(m+k-1)!\,e^x = (m+k-1)!\,(X_k+Y_k+Z_k)$$

mit $\frac{1}{m!} c_k^{(\nu)}$ und summire hierauf von $k=1$ bis $k=mn+n+1$. Das Resultat erscheint, wenn

$$G_\nu(x) = \frac{1}{m!}(c_1^{(\nu)} m! X_1 + c_2^{(\nu)} (m+1)! X_2 + \dots$$
$$\dots + c_{mn+n+1}^{(\nu)} (mn+n+1)! X_{mn+n+1})$$

$$R_\nu(x) = \frac{1}{m!}(c_1^{(\nu)} m! Z_1 + c_2^{(\nu)} (m+1)! Z_2 + \dots$$
$$\dots + c_{mn+n+1}^{(\nu)} (mn+n+1)! Z_{mn+n+1})$$

gesetzt wird, in der Gestalt

$$G_\nu(0) e^x = G_\nu(x) + Lf(x) + R_\nu(x), \tag{2}$$

wo L eine ganze Function von x bezeichnet. Denn die Function

$$c_1^{(\nu)} m! Y_1 + c_2^{(\nu)} (m+1)! Y_2 + \dots + c_{mn+n+1}^{(\nu)} (mn+n+m)! Y_{mn+n+1}$$

wird nach (1)

$$= g(0)(c_1^{(\nu)} x + c_2^{(\nu)} x^2 + \dots + c_{mn+n+1}^{(\nu)} x^{mn+n+1})$$
$$+ \frac{g_1(0)x}{1!}(c_1^{(\nu)} + 2c_2^{(\nu)} x + 3c_3^{(\nu)} x^2 + \dots) +$$
$$+ \frac{g_2(0)x^2}{2!}(2c_2^{(\nu)} + 3 \cdot 2c_3^{(\nu)} x + 4 \cdot 3c_4^{(\nu)} x^2 + \dots)$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$= g(0)T + g_1(0)\frac{x}{1!}T' + g_2(0)\frac{x^2}{2!}T'' + \dots + g_{m-1}(0)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}T^{(m-1)}$$

und ist demnach durch f theilbar, da T den Factor f und $T', T'', \dots T^{(m-1)}$ alle den Factor $\frac{1}{x} f$ enthalten.

3.

Der Ausdruck

$$(m+k-1)! X_k = \frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} x^{k-1} + \frac{(m+k-1)!}{(k-2)!} x^{k-2} + \dots$$
$$\dots + (m+k-1)!$$

ist die Summe der m^{ten}, $(m+1)^{\text{ten}}, \dots (mn+m+n)^{\text{ten}}$ Ableitung von x^{m+k-1}. Wird daher

$$x^{m-1} T = x^{\nu} f^{m} = f_{\nu}$$

gesetzt, so erscheint $G_{\nu}(x)$ in der Gestalt

$$G_{\nu}(x) = \frac{1}{m!}\left(f_{\nu}^{(m)} + f_{\nu}^{(m+1)} + \dots + f_{\nu}^{(mn+m+n)}\right)$$

und ist sonach eine ganze Function von x, welche ganze ganzzahlige Verbindungen von $a_0, a_1, \dots a_n$ zu Coëfficienten hat, da die Coëfficienten von $\frac{1}{m!} f_{\nu}^{(m+k)}$ Vielfache der Coëfficienten von f_{ν} sind.

Ist $g_{\nu}(x)$ der den Grad n in x nicht erreichende Rest, welcher bei der Division von $G_{\nu}(x)$ durch f bleibt, so ist die Determinante des Coëfficientensystems der $n+1$ Functionen

$$g_0, g_1, g_2, \dots g_n$$

nicht Null. Dies lässt sich, wie bei Weierstrass, in folgender Weise darthun.

Wäre die fragliche Determinante Null, so gäbe es Zahlen $c_0, c_1, \dots c_n$, welche nicht durchweg Null sind und der Identität in x

$$c_0 g_0 + c_1 g_1 + \dots + c_n g_n = 0$$

genügen, und die Function

$$G = c_0 G_0(x) + c_1 G_1(x) + \dots + c_n G_n(x)$$

wäre durch f theilbar. Setzt man aber

$$c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = (c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n) f^m = v$$

$$v + v' + v'' + \dots + v^{(mn+n+m)} = u,$$

so wird

$$m! G = v^{(m)} + v^{(m+1)} + \dots + v^{(mn+m+n)}$$

und es müsste auch u durch f theilbar sein, weil $v, v', \dots v^{(m-1)}$ den Factor f enthalten.

Wenn aber u durch f^p theilbar und $p \leqq m$ ist, so folgt aus der Identität

$$u - u' = v,$$

dass u' ebenfalls durch f^p theilbar ist. Dann muss aber f^{p+1} in u aufgehen, weil f zu seiner Ableitung theilerfremd ist. Wäre also u durch f theilbar, so müsste es auch durch $f^2, f^3, \ldots f^{m+1}$ theilbar sein. Dies ist aber unmöglich, da u von geringerem Grade als f^{m+1} ist und nicht identisch verschwindet.

Ein Ausdruck

$$C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t},$$

in welchem t eine Variable und $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ gegebene Grössen bezeichnen, verschwindet identisch, wenn in seiner Entwicklung nach Potenzen von t die Coëfficienten von $t^0, t \ldots t^n$ Null sind. Sucht man nämlich unter den Grössen $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ die numerisch verschiedenen aus und bezeichnet dieselben mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\mu$, so nimmt der genannte Ausdruck nach Zusammenziehung aller Glieder mit identischen Exponentialfactoren die Gestalt

$$B_1 e^{\gamma_1 t} + B_2 e^{\gamma_2 t} + \ldots + B_\mu e^{\gamma_\mu t}$$

an und das Fehlen der Potenzen $t^0, t, \ldots t^n$ in seiner Entwicklung wird durch die Gleichungen

$$C_0 + C_1 + \ldots + C_n = B_1 + B_2 + \ldots + B_\mu = 0$$
$$C_0\beta_0 + C_1\beta_1 + \ldots + C_n\beta_n = B_1\gamma_1 + B_2\gamma_2 + \ldots + B_\mu\gamma_\mu = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_0\beta_0^n + C_1\beta_1^n + \ldots + C_n\beta_n^n = B_1\gamma_1^n + B_2\gamma_2^n + \ldots + B_\mu\gamma_\mu^n = 0$$

ausgedrückt. Diese Gleichungen fallen aber, weil die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots & 1 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \ldots & \gamma_\mu \\ \gamma_1^{\mu-1}, & \gamma_2^{\mu-1}, & \ldots & \gamma_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist, mit den Gleichungen

$$B_1 = 0, \; B_2 = 0, \ldots B_\mu = 0$$

zusammen.

Sind demnach $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

so muss wenigstens eine der $n+1$ Grössen

$$\begin{array}{c} C_0 G_0(\beta_0) + C_1 G_0(\beta_1) + \ldots + C_n G_0(\beta_n) \\ C_0 G_1(\beta_0) + C_1 G_1(\beta_1) + \ldots + C_n G_1(\beta_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_0 G_n(\beta_0) + C_1 G_n(\beta_1) + \ldots + C_n G_n(\beta_n) \end{array}$$

von Null verschieden sein, wenn der Ausdruck

$$C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t}$$

nicht identisch verschwindet. Wären nämlich die genannten Grössen alle $= 0$, so hätte man

$$\begin{array}{c} C_0 g_0(\beta_0) + C_1 g_0(\beta_1) + \ldots + C_n g_0(\beta_n) = 0 \\ C_0 g_1(\beta_0) + C_1 g_1(\beta_1) + \ldots + C_n g_1(\beta_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_0 g_n(\beta_0) + C_1 g_n(\beta_1) + \ldots + C_n g_n(\beta_n) = 0 \end{array}$$

und daher auch, weil die Determinante des Coëfficientensystems der Functionen $g_0, g_1, \ldots g_n$ nicht Null ist,

$$\begin{array}{c} C_0 + C_1 + \ldots + C_n = 0 \\ C_0 \beta_0 + C_1 \beta_1 + \ldots + C_n \beta_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_0 \beta_0^n + C_1 \beta_1^n + \ldots + C_n \beta_n^n = 0 \end{array}$$

Dann müsste aber

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_n = 0$$

sein.

4.

Ist r der absolute Betrag von x und $m \geqq r > 0$, so hat man

$$\begin{aligned} |Z_k| &\leqq \frac{r^{m+k}}{(m+k)!}\left(1 + \frac{r}{m+k+1} + \frac{r^2}{(m+k+1)(m+k+2)} + \ldots\right) \\ &< \frac{r^{m+k}}{(m+k)!}\left(1 + \frac{m}{m+k} + \left(\frac{m}{m+k}\right)^2 + \ldots\right) \\ &< \frac{r^{m+k}}{(m+k-1)!} \end{aligned}$$

und daher

$$|R_\nu(x)| < \frac{r^m}{m!}(r|c_1^{(\nu)}| + r^2|c_2^{(\nu)}| + \dots)$$
$$< \frac{r^{n+1}}{m!} f_0(r)^m,$$

wo f_0 aus f hervorgeht, wenn alle Coëfficienten $a_0, a_1, \dots a_n$ durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden.

5.

Es sei

$$F(z) = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n$$

irgend eine gegebene ganze ganzzahlige nicht identisch verschwindende Function von z. Man setze in der Identität (2)

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$$

und der Reihe nach $x = 0, 1, 2, \dots n$. Es wird dann

$$G_\nu(0) = G_\nu(0)$$
$$G_\nu(0)e = G_\nu(1) + R_\nu(1)$$
$$G_\nu(0)e^2 = G_\nu(2) + R_\nu(2)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$G_\nu(0)e^n = G_\nu(n) + R_\nu(n).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $C_0, C_1, \dots C_n$ und addirt, so ergibt sich

$$G_\nu(0)\,F(e) = H_\nu + \rho,$$

wo

$$H_\nu = C_0 G_\nu(0) + C_1 G_\nu(1) + \dots + C_n G_\nu(n)$$
$$\rho = \quad C_1 R_\nu(1) + \dots + C_n R_\nu(n).$$

Man wähle nun m so gross, dass der Zahlenwerth von ρ unter $\frac{1}{2}$ fällt. Zu diesem Ende genügt es, wenn S die Summe der Zahlenwerthe der Coëfficienten $C_0, C_1, \dots C_n$ bezeichnet, m der Bedingung

$$S n^{n+1} \frac{(n(n+1)\dots 2n)^m}{m!} < \frac{1}{2}$$

zu unterwerfen; denn m fällt dann $> n$ aus und man hat

$$|R_\nu(k)| < \frac{k^{n+1} f_0(k)^m}{m!} \leqq n^{n+1} \frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!},$$

also

$$|\rho| < S n^{n+1} \frac{(n(n+1)\ldots 2n)^m}{m!}$$

$$< \frac{1}{2}.$$

Nach Fixirung von m muss nach 3. eine der Zahlen $H_0, H_1, \ldots H_n$, etwa H_ν, von Null verschieden sein, da der Ausdruck $F(e^t)$ nicht identisch verschwindet. Als ganze Zahl muss dann H_ν mindestens den Zahlenwerth 1 haben, und es wird daher ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$G_\nu(0) F(e) > \frac{1}{2}$$

$$F(e) > \frac{1}{2 G_\nu(0)}.$$

Es gibt also keine ganze ganzzahlige Function, welche für e verschwindet.

6.

Es seien

$$\psi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_q z^q$$

eine beliebige nicht identisch verschwindende ganze ganzzahlige Function und

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p$$

eine beliebige ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten, unter welchen b_0 und b_p von Null verschieden vorausgesetzt werden.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(z) = 0$$

und t eine Variable, so ergibt sich für das Product

$$P(t) = \psi(e^{\alpha_1 t}) \psi(e^{\alpha_2 t}) \ldots \psi(e^{\alpha_p t})$$

nach Ausführung der Multiplication eine Summe von Gliedern von der Form

$$Ae^{(\mathfrak{a}\alpha_1+\mathfrak{b}\alpha_2+\cdots+\mathfrak{e}\alpha_p)t}, \tag{3}$$

wo A ein Product von p Coëfficienten der Function ψ und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{e}$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots q$ bezeichnen. Sucht man alle in diesen Gliedern vorkommenden, unter einander numerisch verschiedenen Ausdrücke $\mathfrak{a}\alpha_1+\mathfrak{b}\alpha_2+\ldots+\mathfrak{e}\alpha_p$ auf und bezeichnet dieselben mit $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$, wo $\beta_0 = 0$ ist, so ergibt sich nach Zusammenziehung aller Glieder, welche gleiche Exponentialgrössen als Factor enthalten, ein Resultat von der Form

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots$$

Dieser Ausdruck kann nicht identisch verschwinden. Im Gegenfalle müssten nämlich in der Entwicklung eines der Factoren $\psi(e^{\alpha_1 t}), \psi(e^{\alpha_2 t}), \ldots \psi(e^{\alpha_p t})$ nach Potenzen von t die Potenzen $t^0, t, \ldots t^q$ fehlen, woraus nach 3 in Widerspruch mit der Annahme

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_q = 0$$

folgen würde. Man kann daher

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t}$$

setzen, wo entweder C_0 nicht $= 0$ ist, wenn $n = 0$ oder aber $C_1, C_2, \ldots C_n$ alle von Null verschieden sind.

Die Entwicklung von $P(t)$ nach Potenzen von t hat die Gestalt

$$P(t) = h_0 + h_1 \frac{t}{1!} + h_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

wo

$$h_0, b_0 h_1, b_0^2 h_2, \ldots$$

ganze complexe Zahlen sind. Denn der Beitrag, welchen das Glied (3) zu dem Coëfficienten h_k von $\frac{t^k}{k!}$ liefert, ist

$$A(\mathfrak{a}\alpha_1 + \mathfrak{b}\alpha_2 + \ldots + \mathfrak{e}\alpha_p)^k$$

und h_k ist demnach eine ganze ganzzahlige Function k^{ten} Grades der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$. Diese Function ist symmetrisch in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, wie sofort erhellt, wenn man die p Ausdrücke

$$\psi(e^{\alpha_1 t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \dots + qc_q)\alpha_1 t + \\ + (c_1 + 2^2 c_2 + \dots + q^2 c_q)\alpha_1^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

$$\psi(e^{\alpha_2 t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \dots + qc_q)\alpha_2 t + \\ + (c_1 + 2^2 c_2 + \dots + q^2 c_q)\alpha_2^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

. . . .

$$\psi(e^{\alpha_p t}) = \psi(1) + (c_1 + 2c_2 + \dots + qc_q)\alpha_p t + \\ + (c_1 + 2^2 c_2 + \dots + q^2 c_q)\alpha_q^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

in einander multiplicirt. Setzt man daher h_k in eine ganze Function der elementaren symmetrischen Functionen

$$-\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_0}, \dots \pm \frac{b_p}{b_0}$$

von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ um, so ist diese letztere vom Grade k und hat daher die Form $\frac{g}{b_0^k}$, wo g eine ganze complexe Zahl bezeichnet.

Die vorstehenden Schlüsse beziehen sich alle stillschweigend auf den Fall, wo $p > 1$ ist. Für $p = 1$ sind dieselben selbstverständlich, wenn man $P(t) = \psi(e^{\alpha_1 t})$ setzt.

Die elementaren symmetrischen Functionen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ von $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ sind rationale complexe Zahlen, wofern $n > 0$ ist. Zieht man nämlich die Coëfficienten von t^0, t^k in $P(t)$ in Betracht, so ergibt sich

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = h_0 - C_0$$
$$C_1\beta_1^k + C_2\beta_2^k + \dots + C_n\beta_n^k = h_k$$

und daher, wenn

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots \pm \sigma_n = u$$

gesetzt wird,

$$h_n - \sigma_1 h_{n-1} + \sigma_2 h_{n-2} - \dots \pm \sigma_n(h_0 - C_0) = 0$$
$$h_{n+1} - \sigma_1 h_n + \sigma_2 h_{n-1} - \dots \pm \sigma_n h_1 = 0$$

. . . .

$$h_{2n-1} - \sigma_1 h_{2n-2} + \sigma_2 h_{2n-3} - \dots \pm \sigma_n h_{n-1} = 0$$
$$-u + x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots \pm \sigma_n = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, so folgt

$$\begin{vmatrix} h_n, & h_{n-1}, & \dots h_0 - C_0 \\ h_{n+1}, & h_n, & \dots h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{2n-1}, & h_{2n-2}, & \dots h_{n-1} \\ -u + x^n, & x^{n-1}, & \dots 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Identität gibt für u eine ganze rationalzahlige Function von x, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} h_{n-1}, & h_{n-2}, & \dots h_0 - C_0 \\ h_n, & h_{n-1}, & \dots h_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{2n-2}, & h_{2n-3}, & \dots h_{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht Null ist. Dieselbe ist aber

$$= \pm C_1 C_2 \dots C_n (\beta_2 - \beta_1)^2 (\beta_3 - \beta_1)^2 \dots (\beta_n - \beta_{n-1})^2$$

oder $= C_1$, je nachdem $n > 1$ oder $n = 1$ ist, und daher nicht $= 0$.

Es gibt also eine Gleichung $n + 1$ten Grades

$$a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_n x = 0$$

mit ganzen complexen Coëfficienten, welche $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ zu Wurzeln hat.

Setzt man nun in der Identität (2)

$$f = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \dots + a_n x$$

und $x = \beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} G_\nu(0) &= G_\nu(\beta_0) \\ G_\nu(0) e^{\beta_1} &= G_\nu(\beta_1) + R_\nu(\beta_1) \\ &\dots\dots\dots \\ G_\nu(0) e^{\beta_n} &= G_\nu(\beta_n) + R_\nu(\beta_n) \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn mit $C_0, C_1, \dots C_n$ multiplicirt und addirt wird,

$$G_\nu(0) P(1) = \frac{1}{b_0^{mn+n}} H_\nu + \rho,$$

wo

$$H_\nu = b_0^{mn+n}(C_0 G_\nu(\beta_0) + C_1 G_\nu(\beta_1) + \ldots + C_n G_\nu(\beta_n))$$
$$\rho = C_1 R_\nu(\beta_1) + C_2 R_\nu(\beta_2) + \ldots + C_n R_\nu(\beta_n).$$

H_ν ist eine ganze complexe Zahl. Ist nämlich $G_\nu(x)$ nach Potenzen von x entwickelt,

$$= l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots + l_{mn+n} x^{mn+n},$$

so wird

$$\frac{1}{b_0^{mn+n}} H_\nu = l_0(C_0 + C_1 + \ldots + C_n) + l_1(C_0\beta_0 + C_1\beta_1 + \ldots + C_n\beta_n) + \ldots,$$

also

$$H_\nu = l_0 b_0^{mn+n} . h_0 + l_1 b_0^{mn+n-1} . b_0 h_1 + \ldots + l_{mn+n} . b_0^{mn+n} h_{mn+n}.$$

Wählt man für m einen bestimmten Werth von der Art, dass $|\rho b_0^{mn+n}| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so ist eine der Zahlen $H_0, H_1 \ldots H_n$, etwa H_ν, von Null verschieden, weil $P(t)$ nicht identisch Null ist, und man hat

$$|H_\nu| \geqq 1,$$

also

$$|G_\nu(0) P(1)| > \frac{1}{2|b_0|^{mn+n}}$$

$$|P(1)| > \frac{1}{2|b_0|^{mn+n}|G_\nu(0)|}.$$

Es sei noch

$$\psi(z) = (z - \gamma)\psi_1(z),$$

λ irgend ein bestimmter Werth des natürlichen Logarithmus von γ, σ eine Grösse, welche keiner der absoluten Beträge von $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ übersteigt, und

$$|\psi_1(e^{\alpha_1})||\psi_1(e^{\alpha_2})| \ldots |\psi_1(e^{\alpha_p})| \leqq K.$$

Man hat dann

$$P(1) = (e^{\alpha_1} - e^\lambda)(e^{\alpha_2} - e^\lambda) \ldots (e^{\alpha_p} - e^\lambda)\psi_1(e^{\alpha_1})\psi_1(e^{\alpha_2}) \ldots \psi_1(e^{\alpha_p})$$

$$|e^{\alpha_i} - e^\lambda| = |\alpha_i - \lambda| \left| 1 + \frac{\alpha_i + \lambda}{2} + \frac{\alpha_i^2 + \alpha_i\lambda + \lambda^2}{3!} + \ldots \right|$$
$$\leqq |\alpha_i - \lambda| e^\sigma$$

und daher

$$|P(1)| \leqq \left|\frac{\varphi(\lambda)}{b_0}\right| e^{p_3}.$$

Hieraus folgt

$$|\varphi(\log\gamma)| > \frac{e^{-p_3}}{2K|b_0^{mn+n-1}||G_\nu(0)|}.$$

Es gibt daher keine ganze Function mit ganzen complexen Coëfficienten, welche für $\log\gamma$ verschwindet.

Nimmt man insbesondere

$$\psi(z) = 1+z \qquad \log(-1) = i\pi \qquad \varphi(z) = F(-iz),$$

wo F irgend eine ganze ganzzahlige Function bedeutet, so wird

$$\psi_1(z) = 1 \qquad K = 1$$

und daher

$$F(\pi) > \frac{e^{-p_3}}{2|b_0|^{mn+n-1}|G_\nu(0)|}.$$

Ist x eine reelle algebraische Zahl,

$$\psi(z) = 0$$

die ganzzahlige Gleichung, welcher $\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}}$, beziehungsweise $\sqrt{1-x^2}+ix$ genügt, $F(z)$ eine beliebige ganze ganzzahlige Function und setzt man $\varphi(z) = F(-iz)$, so kann man ebenso Grenzen angeben, welche

$$F(\text{arc tg}\, x), \qquad F(\text{arc sin}\, x)$$

übersteigen müssen. Es genügt zu diesem Ende,

$$i \,\text{arc tg}\, x = \log\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}} \qquad i\,\text{arc sin}\, x = \log(\sqrt{1-x^2}+ix)$$

zu setzen.

7.

Es seien

$$\varphi(z) = b_0 z^p + b_1 z^{p-1} + \ldots + b_p$$

eine gegebene ganzzahlige Gleichung p^{ten} Grades,

ihre Wurzeln, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$
$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$

numerisch verschiedene ganzzahlige linear-homogene Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und

$$\psi(t) = A_1 e^{\xi_1 t} + A_2 e^{\xi_2 t} + \ldots + A_q e^{\xi_q t}$$

ein Ausdruck, in welchem $A_1, A_2, \ldots A_q$ von Null verschiedene ganze Zahlen bezeichnen. Man bezeichne die nicht kleinere der beiden Zahlen $qp!, 2q^{p!}-1$ mit μ, den Inbegriff aller die Potenzen $t^0, t, \ldots t^\mu$ enthaltenden Glieder in der Entwicklung von $\psi(t)$ nach Potenzen von t mit ω und mit u eine Unbestimmte. Das über alle möglichen Permutationen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ zu erstreckende Product $\Pi(u-\omega)$ ist eine ganze symmetrische Function dieser Wurzeln und hat demnach ganze rationalzahlige Functionen von t als Coëfficienten bei den einzelnen Potenzen von u. Ist U derjenige irreductible Factor dieses Productes, welcher für $u = \omega$ verschwindet, so geht derselbe aus der Multiplication von $u-\omega$ mit ähnlichen Ausdrücken $u-\omega_1, u-\omega_2, \ldots$ hervor, welche aus $u-\omega$ durch gewisse Permutationen der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ entstehen. Es seien $\psi_1, \psi_2, \ldots$ die Resultate, welche aus $\psi(t)$ durch eben diese nämlichen Permutationen hervorgehen, und man setze

$$P(t) = \psi(t)\psi_1(t)\psi_2(t)\ldots$$

$P(t)$ ist eine Summe von Gliedern von der Form $Ae^{\eta t}$, wo A eine ganze Zahl und η einen ganzzahligen linear-homogenen Ausdruck der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ bezeichnen. Sucht man alle numerisch verschiedenen Werthe von η auf und zieht alle Glieder zusammen, welche dieselbe Exponentialgrösse als Factor enthalten, so kann der resultirende Ausdruck nicht identisch verschwinden. Denn im Gegenfalle müsste das Product $\omega\omega_1\omega_2\ldots$, welches mit $P(t)$ bis zu den Gliedern mit t^μ einschliesslich übereinstimmt, durch $t^{\mu+1}$ und daher mindestens einer der Factoren $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ durch t^{q+1} theilbar sein, da die Anzahl dieser Factoren $\leqq p!$ ist. Ein solcher Factor hat aber die Gestalt

$$A_1 e^{\eta_1 t} + A_2 e^{\eta_2 t} + \ldots + A_q e^{\eta_q t},$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_q$ aus $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_q$ durch eine Permutation der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ hervorgehen, und muss nach 3 identisch verschwinden, wenn er durch t^{q+1} theilbar ist. Es wäre also $\omega\omega_1\omega_2 \ldots = 0$ und die irreductible Function U müsste sich auf u reduciren. Dann wäre aber $\omega = 0$ und nach 3 in Widerspruch mit der Annahme $\psi(t) = 0$.

Hienach ist das Product $P(t)$ in der Gestalt

$$P(t) = C_0 e^{\beta_0 t} + C_1 e^{\beta_1 t} + \ldots + C_n e^{\beta_n t}$$

darstellbar, wo $\beta_0 = 0$ und entweder C_0 nicht $= 0$ ist, wenn $n = 0$, oder aber $C_1, C_2, \ldots C_n$ alle von Null verschieden und $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ numerisch verschiedene ganzzahlige linear-homogene Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sind, wenn $n > 0$.

Entwickelt man $P(t)$ nach Potenzen von t und setzt

$$P(t) = h_0 + h_1 \frac{t}{1!} + h_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots,$$

so sind $h_0, b_0 h_1, b_0^2 h_2, \ldots$ ganze Zahlen. Denn zunächst erhellt, dass $h_0, h_1, \ldots h_\mu$ rationale Zahlen sind, da $P(t)$ mit $\omega\omega_1\omega_2 \ldots$ bis zu den Gliedern mit der Potenz t^μ übereinstimmt. Man beweist dann ganz wie in 6, dass die elementaren symmetrischen Functionen von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ in dem Falle $n > 0$ rationale Zahlen sind und dass man demzufolge eine ganzzahlige Gleichung vom Grade $n+1$

$$a_0 z^{n+1} + a_1 z^n + \ldots + a_n z = 0$$

aufstellen kann, welche $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n$ zu Wurzeln hat. Die Rationalität von $h_{\mu+1}, h_{\mu+2}, \ldots$ folgt dann aus der Formel

$$a_0 h_s + a_1 h_{s-1} + \ldots + a_n h_{s-n} = 0,$$

welche von $s = n+1$ an gilt. Dass aber $b_0^k h_k$ ganzzahlig ist, folgt daraus, dass

$$h_k = C_0 \beta_0^k + C_1 \beta_1^k + \ldots + C_n \beta_n^k$$

eine ganze ganzzahlige Function k^{ten} Grades von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$, also $b_0^k h_k$ eine ebensolche Function der Grössen $b_0\alpha_1, b_0\alpha_2, \ldots b_0\alpha_p$ ist, welche der Gleichung

$$z^p + b_1 z^{p-1} + b_0 b_2 z^{p-2} + \ldots + b_0^{p-1} b_p = 0$$

genügen, also algebraisch ganz sind.

Setzt man nun in der Identität (2)

$$f = a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_n x$$
$$x = \beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n,$$

so ergibt sich

$$G_\nu(0) = G_\nu(\beta_0)$$
$$G_\nu(0) e^{\beta_0} = G_\nu(\beta_1) + R_\nu(\beta_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_\nu(0) e^{\beta_n} = G_\nu(\beta_n) + R_\nu(\beta_n)$$

und hieraus

$$G_\nu(0) P(1) = \frac{H_\nu}{b_0^{mn+n}} + \rho,$$

wo

$$\frac{1}{b_0^{mn+n}} H_\nu = C_0 G_\nu(\beta_0) + C_1 G_\nu(\beta_1) + \ldots + C_n G_\nu(\beta_n)$$
$$\rho = C_1 R_\nu(\beta_1) + C_2 R_\nu(\beta_2) + \ldots + C_n R_\nu(\beta_n).$$

H_ν ist eine ganze Zahl, da

$$H_\nu = l_0 b_0^{mn+n} . h_0 + l_1 b_0^{mn+n-1} . b_0 h_1 + l_2 b_0^{mn+n-2} . b_0^2 h_2 + \ldots$$

wird, wenn man

$$G_\nu(x) = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \ldots$$

setzt.

Wählt man m wieder so, dass $|\rho b_0^{mn+n}| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so ist eine der Zahlen $H_0, H_1, \ldots H_n$, etwa H_ν, von Null verschieden und man hat

$$|G_\nu(0) P(1)| > \frac{1}{2 |b_0^{mn+n}|}$$

$$|P(1)| > \frac{1}{2 |G_\nu(0)| |b_0^{mn+n}|}$$

und daher

$$|\psi(1)| > \frac{1}{2K |G_\nu(0)| |b_0|^{mn+n}},$$

wenn

$$|\psi_1(1)\psi_2(1)\ldots| \leqq K.$$

Es kann also $\psi(1)$ nicht Null sein.

Sind in $\psi(t)$ die Coëfficienten $A_1, A_2, \ldots A_q$ nicht gewöhnliche ganze, sondern ganze algebraische Zahlen, so bilde man mit Hilfe von q Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots u_q$ den Ausdruck

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_q u_q$$

und die irreductible rationalzahlige Gleichung $\Gamma = 0$, welcher derselbe genügt. Ist $\pm Q(u_1, u_2, \ldots u_q)$ das constante Glied dieser Gleichung, so hat man

$$Q = (A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_q u_q)(A'_1 u_1 + A'_2 u_2 + \ldots).$$
$$.(A''_1 u_1 + A'' u_2 + \ldots)\ldots,$$

wo $A'_1, A'_2, \ldots A''_1, A''_2, \ldots$ ebenfalls ganze algebraische Zahlen sind. Setzt man nun

$$Q(e^{\xi_1 t}, e^{\xi_2 t}, \ldots e^{\xi_q t}) = \psi_0(t),$$

so hat $\psi_0(t)$ die Gestalt

$$B_1 e^{\eta_1 t} + B_2 e^{\eta_2 t} + \ldots,$$

wo $\eta_1, \eta_2, \ldots$ numerisch verschiedene ganzzahlige linear-homogene Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ und $B_1, B_2, \ldots$ ganze Zahlen bezeichnen. Die Coëfficienten $B_1, B_2, \ldots$ können nicht alle Null sein, da sonst nach 3 auch einer der Ausdrücke

$$A'_1 e^{\xi_1 t} + A'_2 e^{\xi_2 t} + \ldots$$
$$A''_1 e^{\xi_1 t} + A''_2 e^{\xi_2 t} + \ldots$$

und daher auch Q identisch verschwände, was der Irreductibilität von Γ widerspricht.

Da nun $|\psi_0(1)|$ hienach eine angebbare Grenze übersteigen muss, so gilt dasselbe von $|\psi(1)|$.

Über die Grenzen des telestereoskopischen Sehens

von

Dr. phil. **Friedrich Wächter.**

(Mit 5 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1896.)

Seit etwa zwei Jahren werden von der bekannten optischen Firma Carl Zeiss in Jena sogenannte Relieffernrohre in den Handel gebracht, welche anstatt der bisher üblichen — aus zwei galileischen Fernrohren bestehenden — Feldstecher vielfache Verwendung finden. Bei diesen Zeiss'schen Instrumenten sind zwei Prismenfernrohre derartig zu einem Binocle zusammengefügt, dass der gegenseitige Abstand der Mittelpunkte der beiden Ocularlinsen zwischen 57 und 85 *mm* variirt werden kann und sich somit dem natürlichen Abstande der beiden Augen des Beobachters anpassen lässt, während die durch Spiegelung, respective durch totale Reflexion in die beiden Objectivlinsen eintretenden optischen Axen — je nach Grösse des Instrumentes — einen Abstand von 340—420 *mm* haben.

Diese Einrichtung entspricht sonach dem Princip des Helmholtz'schen Telestereoskopes und ermöglicht ein stereoskopisches Sehen auf grössere Distanzen, als dies mit freiem Auge möglich ist. Bei dem Studium der mir wiederholt vorgelegten Frage: bis zu welchen Grenzen mit diesen Zeiss'schen Relieffernrohren noch stereoskopische Wahrnehmungen möglich seien, gelangte ich zu nachstehenden Resultaten, welche in Anbetracht ihres allgemein wissenschaftlichen Charakters Gegenstand der vorliegenden Publication sein sollen.

Bevor man die Frage erörtert, welches die mit einem bestimmten Instrumente erreichbare Grenzdistanz für stereoskopische Wahrnehmung sei, wird man wohl zuerst untersuchen müssen, welche gleiche Grenzdistanz für das unbewaffnete menschliche Auge gegeben ist?

Die Fachliteratur über das binoculare Sehen ist eine sehr umfangreiche und hat insbesonders H. v. Helmholtz in seinem Handbuch der physiologischen Optik diesen Gegenstand in eingehendster Weise behandelt.

In Bezug auf die Grenzdistanz des stereoskopischen Sehens mit freiem Auge gelangte v. Helmholtz[1] zu dem nachstehenden Satze:

»Die Vergleichung der Netzhautbilder beider Augen zum Zweck des stereoskopischen Sehens geschieht mit derselben Genauigkeit, mit welcher die kleinsten Abstände von ein und demselben Auge gesehen werden.«

Dieser Satz wurde aus einem eigens hiezu angestellten Experimente abgeleitet, bei welchem drei Nadeln in Entfernungen von je 12 *mm* von einander aufgestellt waren und aus einer Entfernung von 340 *mm* darauf hin beurtheilt wurden, ob sich dieselben genau in derselben Ebene befanden oder nicht.

Um auf Grund dieses Satzes für einen gegebenen Fall einen Grenzwerth bestimmen zu können, ist jedoch eine nähere Interpretation und eine Zahlenangabe erforderlich; v. Helmholtz stellt diesbezüglich für das Gesetz der stereoskopischen Tiefenwahrnehmung die Formel auf:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} > \frac{1}{f},$$

worin ρ die Distanz des näher gelegenen Punktes, r die Distanz eines entfernteren Punktes und f eine Constante ist, welche die Genauigkeit der Wahrnehmung bestimmt. Diese Constante f fand v. Helmholtz aus dem vorerwähnten Versuche mit den Nadeln $= 240$ *m*.

Bei näherer Betrachtung dieser Formel erkennt man, dass bei kleinen Distanzen schon ein geringer Unterschied von r

[1] Handbuch der physiologischen Optik. Leipzig, 1887, S. 645.

und ρ eine stereoskopische Wahrnehmung der Tiefendimension ermöglicht, während für grössere Distanzen diese Unterschiede rapid zunehmen. Für $f = 240\ m$ und $\rho = 5\ m$ erhält man beispielsweise (wenn als Grenzwerth $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{f}$ gesetzt wird) $r = 5{\cdot}1\ m$, also nur um $^1/_{50}$ grösser als ρ, während für $\rho = 200\ m$ r schon 1205 m oder circa $6 \times \rho$ wird, d. h. also in Worten ausgedrückt, ein 5 m weit entfernter Gegenstand muss in der Sehrichtung eine Tiefenausdehnung von 0·1 m haben, um stereoskopisch wahrnehmbar zu sein, während ein 200 m weit entfernter Gegenstand eine Tiefenausdehnung von 1205 m haben müsste.

Wie schon erwähnt, hat v. Helmholtz die obige, als Maass der Genauigkeit dienende Zahl $f = 240$ aus einem Versuche mit Nadeln ermittelt. Nun ist aber bekannt, dass glitzernde Gegenstände, wie Nadeln, Glassplitter u. dergl. unter einem viel geringeren Gesichtswinkel noch sichtbar sind als andere weniger gut reflectirende Objecte. Bei Untersuchung der Frage, auf welche Grenzdistanzen man mit Fernrohren noch stereoskopische Wahrnehmungen machen könne, kommen aber im Allgemeinen nicht glitzernde Gegenstände in Betracht, sondern Objecte von minderen Helligkeits- und Farbencontrasten, wie Dächer und Mauern, Wälder und Wiesen oder Fels- und Gebirgspartien in allen Abstufungen von grün, blau, grauer Farbe. Um daher einen, diesen Verhältnissen besser anpassenden Mittelwerth der Zahl f bestimmen zu können, habe ich nachstehende einfache Versuche ausgeführt.

Auf einem entsprechenden Stative wurde ein würfelförmiger oder prismatischer Körper *abcd* (Fig. 1) so aufgestellt, dass dessen parallele Seitenkanten *ab* und *cd* genau senkrecht gegen die Mitte eines langen Tisches T gerichtet waren. Die mit Pfeilen bezeichnete Distanz D betrug bei verschiedenen Versuchen 5, 10 oder 15 m. Brachte der Beobachter seinen Kopf nun in solche Stellung, dass die Sehrichtung der beiden Augen genau in die Verlängerung der Kanten *ab* und *cd* fiel, die Augen also die Stellung A_l und A_r hatten, so konnte nur die vordere Fläche des Würfels, welche in der Zeichnung durch *bc* dargestellt wird, erblickt werden. Es wurde nun ermittelt,

wie weit man den Kopf längs der Tischkante nach rechts oder links bewegen müsse, um mit dem rechten oder linken Auge die Fläche cd, respective ab eben noch wahrnehmen zu können Es sei dies nun in den Punkten s_r und s_l möglich gewesen.

Aus den bekannten Grössen D, $A_r s_r$ und cd, respective $A_l s_l$ und ab, liess sich dann leicht und mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen, welche Grösse der Gesichtswinkel $cs_r d$,

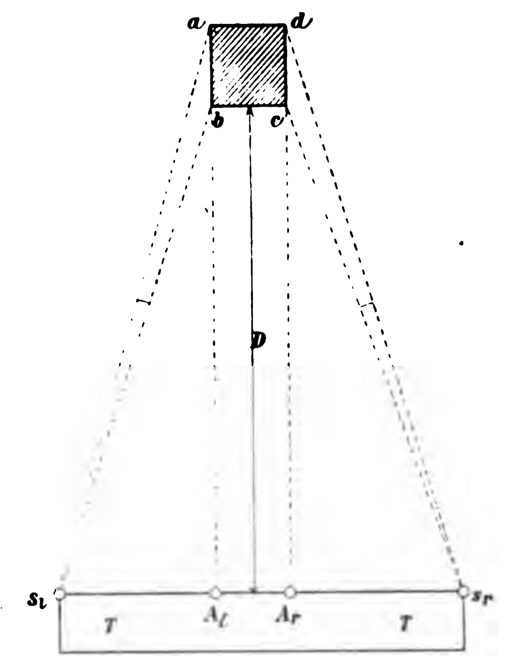


Fig. 1.

respective $bs_l a$ haben muss, damit die Fläche cd oder ab an der äussersten Grenze der Wahrnehmbarkeit sei.

Die zu dem Experimente dienenden Würfel bestanden aus verschiedenem Materiale, und zwar wurden verwendet: ein Würfel aus Sandstein von gelblicher Farbe, ein braun politirter Holzwürfel, ein Holzwürfel in Naturfarbe, ein graublau gestrichener und ein mit laubgrünem Tuche überzogener Würfel, endlich ein schwarz und weiss gestrichener Würfel.

Als Resultat dieser Versuche, welche — wie dies in der Natur der Sache liegt — allerdings nur relative Werthe liefern

können, ergaben sich für den kleinsten Sehwinkel $cs_r d$, respective $bs_l a$ nachstehende Zahlen:

Weiss-schwarzer Würfel auf schwarzem Hintergrund	0′ 33″
» » » weissem »	1′ 42″
Holzwürfel, naturfarbig, Hintergrund gelbe Mauer	2′ 2″
Sandsteinwürfel, gelblich, » » »	2′ 25″
Holzwürfel, braun polirt, » » »	2′ 49″
Holzwürfel, blaugrau gestrichen, Hintergrund gelbe Mauer	2′ 58″
Würfel mit grünem Tuche, Hintergrund gelbe Mauer	3′ 30″
» » » », » grüne Wand	2′ 20″

Zugleich machte sich hiebei die bekannte Erscheinung geltend, dass die Grösse jenes Sehwinkels, unter welchem ein bestimmter Gegenstand noch gerade sichtbar ist, nicht nur von der Distanz und der Grösse des Gegenstandes abhängt, sondern auch von der Farbe desselben, der Intensität, mit welcher derselbe beleuchtet wird, dem Reflexionsvermögen seiner Begrenzungsflächen (bei grossen Distanzen auch von der mehr oder minder guten Durchsichtigkeit der Atmosphäre) und endlich insbesondere von dem Contraste zwischen der Farbe des Gegenstandes selbst und seiner Umgebung, sowie jener des Hintergrundes. Je nachdem diese Factoren variiren, erhält man also auch verschiedene Werthe für den Sehwinkel.

Die kleinsten Werthe für diesen Winkel, welchen wir mit α bezeichnen wollen, ergaben sich, wie obige Angaben zeigen, bei Beobachtung des schwarz-weissen Würfels, und zwar bei schwarzer Vorderfläche, weissen Seitenflächen und schwarzem Hintergrund als $\alpha = 0' \, 33''$; den grössten Werth für $\alpha = 3' \, 30''$ erhielt man für den allseitig mit grünem Tuch überzogenen Würfel, wenn den Hintergrund eine 80 *m* weit entferte, gelb getünchte Mauer bildete.

Eliminirt man die für den schwarz-weissen Würfel gefundenen kleinsten Werthe von $\alpha = 0' \, 33''$ bis $1' \, 42''$, weil so starke Farbencontraste bei einer Landschaft kaum vorkommen, so kommen also nur Werthe von $\alpha = 2'$ bis $3^1/_2{}'$ in Betracht. Aus diesen Zahlenwerthen $\alpha = 2'$ bis $3^1/_2{}'$ lässt sich nun aber die Grenzdistanz des stereoskopischen Sehens für normale

unbewaffnete Augen in folgender höchst einfacher Weise bestimmen.

Wie schon eingangs bei der Besprechung der Helmholtzschen Formel für die stereoskopische Tiefenwahrnehmung bemerkt wurde, ist ein Gegenstand von sehr grossen Tiefendimensionen auf grössere Distanzen stereoskopisch sichtbar, als ein kleiner Gegenstand.

Als theoretische oder absolute Grenzdistanz für das stereoskopische Sehen kann daher füglich nur jene bezeichnet werden, bei welcher selbst Gegenstände von unendlich grosser Ausdehnung aufhören, stereoskopisch wahrnehmbar zu sein.

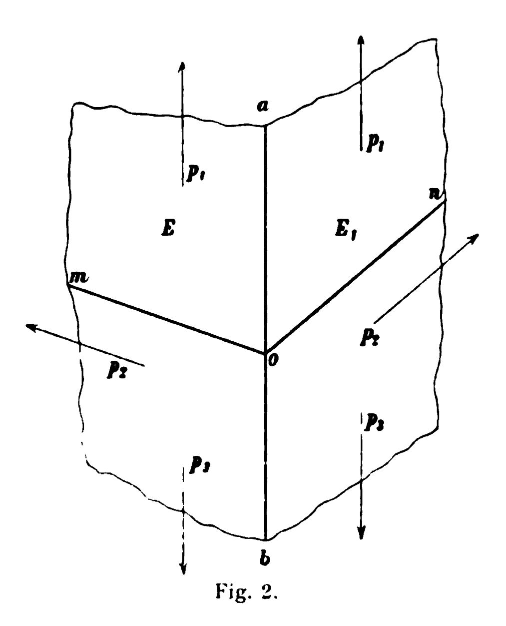


Fig. 2.

Es möge nun die perspectivische Zeichnung (Fig. 2) zwei sich rechtwinkelig in der Linie ab schneidende Ebenen E und E_1 darstellen, welche Ebenen in der Richtung der Pfeile p_1, p_2, p_3 sich unendlich weit ausdehnen und sonach eine körperliche Kante von unendlich grosser Dimension bilden. Denkt man sich diese beiden Ebenen rechtwinkelig zu ab in den Linien mon durch eine dritte (Zeichnungs-) Ebene geschnitten, so stellt sich die Horizontalprojection der beiden Ebenen E und E_1 in der Zeichnungsebene als zwei sich rechtwinkelig treffende Linien mo und no in Fig. 3 dar, welche Linien man sich von dem Schnittpunkt o aus gegen m und n hin unendlich weit verlängert denken muss.

Befindet sich nun in dem Punkte z (Fig. 3), welcher von der Ebene E einen Abstand $= f$ hat, ein Beobachter, so kann derselbe nur die Ebene E allein wahrnehmen, nicht aber auch

die Ebene E_1, und ist somit nicht im Stande, eine körperlich-plastische oder stereoskopische Wahrnehmung zu machen.

Stellt sich der Beobachter hingegen so auf, dass sein linkes Auge genau in die Verlängerung der Linie *no* nach A_l kommt, so wird er mit seinem rechten Auge A_r die unendlich grosse Ebene E_1 unter der Voraussetzung eben noch wahrnehmen können, wenn der Sehwinkel oA_rx einen Werth hat, der — je nach Farbe und Beleuchtung der Flächen — zwischen 2 und $3^1/_2{}'$ liegt.

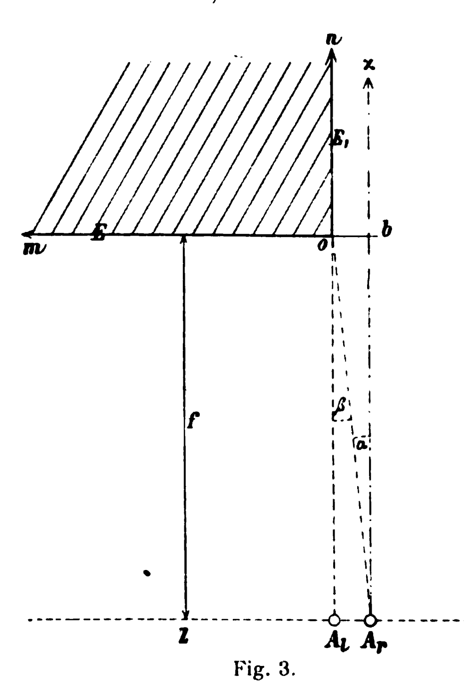


Fig. 3.

Es ist nun klar, dass die Linie A_rx parallel zu A_lo sein muss, da deren Schnittpunkt *x* im Unendlichen liegt; weiters ergibt sich auch sofort — ohne eines weiteren Beweises zu bedürfen —, dass die beiden rechtwinkeligen Dreiecke A_lA_ro und obA_r congruent sind und daher $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\beta$ und Linie $A_lA_r = ob$ ist.

Die unendlich grosse Fläche E_1 projicirt sich also dem rechten Auge des Beobachters als ein unendlich langer Verticalstreifen von der scheinbaren Breite $ob = A_lA_r$. Die Strecke A_lA_r ist aber eine von der Natur gegebene und bestimmte Grösse, nämlich der Augenabstand des Beobachters, welchen man im Mittel mit ungefähr 65 *mm* annehmen kann.

Die theoretische Grenzdistanz *(f)* für das stereoskopische Sehen ist also jene, für welche der Augenabstand des Beobachters unter jenem kleinsten Winkel erscheint, welcher überhaupt noch eine Wahrnehmung ermöglicht.

Um $f = A_l o$ zu berechnen, hat man also nur das rechtwinkelige Dreieck $A_l A_r o$, in welchem $A_l A_r$ und $\sphericalangle \beta = \alpha$ bekannt sind, aufzulösen und daraus $A_l o$ zu suchen.

Für den mittleren Augenabstand $= 65$ *mm* und den Sehwinkel $\alpha = 2'$ ergibt sich danach die Grenzdistanz $f = 111$ *m*, während für $\alpha = 3\,^1/_2{}'$ $f = 64$ *m* wird.

Die theoretische Grenze des stereoskopischen Sehens für das unbewaffnete Auge liegt also ungefähr zwischen 64 *m* und 111 *m*. Diese Zahlen sind, wie man sieht, erheblich kleiner als die von Helmholtz mit 240 *m* bestimmte Zahl, was sich dadurch erklärt, dass Helmholtz den Sehwinkel mit glitzernden Stahlnadeln bestimmte, wobei er einen Werth von $60\,^1/_2{}''$ fand, während man bei Beobachtung von Gegenständen aus Holz, Stein etc. mit grösseren Winkeln rechnen muss.

In Wirklichkeit oder praktisch genommen wird man jedoch nur auf noch geringere Distanzen stereoskopisch sehen, denn während für die theoretische Grenze die Helmholtz'sche Formel die Gestalt

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f}$$

annimmt, wo $\rho = f$ ist, ist diese Formel für endliche Distanzen

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} > \frac{1}{f},$$

weil einerseits r nicht unendlich gross sein kann, sondern stets einen endlichen, und zwar meist nicht sehr grossen Werth hat, anderseits, weil $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$ nicht gleich $\frac{1}{f}$, sondern grösser sein muss, da es sich um thatsächliche und deutliche Wahrnehmung der Tiefendimensionen handelt und nicht um deren Verschwindungspunkt; folglich muss ρ kleiner als f sein, d. h. der näher gegen den Beobachter gelegene Punkt des stereoskopisch wahrnehmbaren Gegenstandes muss eine geringere Distanz als 64—111 *m* haben.

Es mag nun auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, dass man nur auf so geringe Distanzen solle stereoskopisch sehen können, da doch die tägliche Erfahrung lehrt, dass

grössere Gebäude schon auf Entfernungen von 400—500 *m* noch in allen Details plastisch und körperlich sichtbar sind, während hohe Gebirge schon auf viele Kilometer weit noch vollkommen plastisch erscheinen.

Nach den vorstehenden Darlegungen kann aber gar keine Rede davon sein, dass mit freiem Auge eine stereoskopische Wahrnehmung auf so grosse Distanzen möglich sei. Diesbezüglich muss darauf hingewiesen werden, dass bekanntlich nicht nur ein stereoskopisches Sehen auf rein optischem Wege, sondern auch auf Grund physiologischer und psychologischer Vorgänge stattfindet. Man ist nämlich, wie von Brewster, Wheastone, Dove, Helmholtz, Brücke, Wundt, Meyer u. v. A. dargelegt wurde, von Kindheit an gewöhnt, entfernte Gegenstände, wie Häuser, Berge etc. nicht nur von einem einzigen Standpunkte zu betrachten, sondern auch während des Gehens von mehreren, weit auseinander gelegenen Standpunkten. Indem sich aber durch Gehirnthätigkeit der zuerst erhaltene Eindruck mit den späteren Wahrnehmungen zu einem einzigen Bilde vereint, gewinnt man durch Betrachtung desselben Gegenstandes von verschiedenen Standpunkten körperliche oder stereoskopische Vorstellungen.

Desgleichen erhält man mittelst des Gefühls für die jeweils erforderliche Accommodation der Augen Vorstellungen für die Tiefendimension und die gegenseitige Distanz entfernter Objecte; ebenso durch die Vergleichung der scheinbaren Grösse verschiedener Gegenstände, deren wirkliche Grösse durch frühere Erfahrungen annähernd bekannt ist.

Am wesentlichsten trägt aber die Schattenbildung durch die Sonnenbeleuchtung zur plastischen Wahrnehmung bei, da man durch Erfahrung — nicht aber durch directes stereoskopisches Sehen — aus der Art und Form der Schlag- und Halbschatten, die Raum- und Tiefendimensionen des entfernten Gegenstandes erkennt.

Diese Erscheinungen, welche in dem Helmholtz'schen Handbuche der physiologischen Optik in eingehendster Weise erörtert werden, wurden hier nur aus dem Grunde erwähnt, um den scheinbaren Widerspruch zwischen Theorie und Praxis des stereoskopischen Sehens zu erklären.

Wir kommen nun erst zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung, nämlich der Bestimmung der Grenzdistanzen für die telestereoskopische Beobachtung mit Instrumenten. Auf Grund des Vorhergesagten gestaltet sich diese Untersuchung sehr kurz und ohne jede Schwierigkeit.

Betrachten wir zunächst das einfachste Instrument dieser Art, nämlich das Telestereoskop von Helmholtz. Dasselbe besteht, wie bekannt, aus zwei Spiegelpaaren bb_1 und cc_1 (Fig. 4), welche senkrecht in einem gemeinsamen hölzernen Kasten und unter 45° gegen die längsten Kanten desselben geneigt befestigt sind. Das von dem fernen Objecte kommende

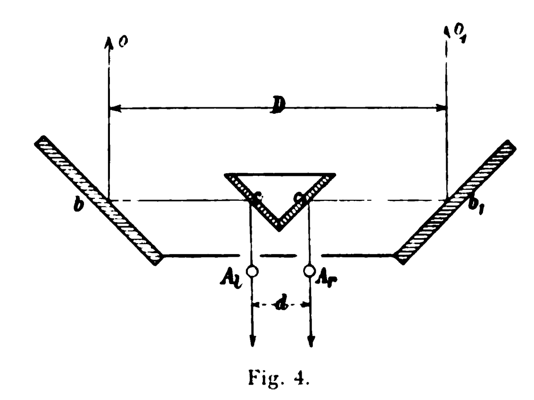


Fig. 4.

Licht wird auf den Wegen $obcA_l$ und $o_1b_1c_1A_r$ zweimal unter rechten Winkeln reflectirt und fällt bei A_l und A_r in die beiden Augen des Beobachters. Der natürliche Augenabstand d wird daher, wie ohneweiters ersichtlich ist, durch das Instrument auf den Abstand D vergrössert oder in dem Verhältnisse $\frac{D}{d}$ erweitert.

Bei dem von Helmholtz beschriebenen Exemplare eines solchen Telestereoskopes betrug der Abstand $D = 4$ Schuh, $d = 3$ Zoll; $\frac{D}{d}$ ist daher $= 16$, d. h. der natürliche Augenabstand erscheint durch dieses Instrument um das 16fache vergrössert.

Die Grenzdistanz für stereoskopische Wahrnehmung mit diesem Instrumente ist daher theoretisch 16mal so gross wie

mit freiem Auge, also 16×64 bis 16×111 oder 1024 bis 1776 *m*. Praktisch wird jedoch eine erheblich geringere Grenze gegeben sein, und zwar aus drei Gründen: 1. weil, wie schon oben bemerkt, $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$ nicht gleich $\frac{1}{f}$, sondern grösser als $\frac{1}{f}$ sein muss, 2. weil bei diesem Instrumente Spiegel in Anwendung kommen, welche eine Lichtabsorption und somit eine Helligkeitsverminderung herbeiführen, und zwar nach meinen photometrischen Messungen eine solche von circa $10^0/_0$ pro Spiegel, also gegenüber der directen Beobachtung durch das Auge eine Helligkeitsabnahme um $20^0/_0$, weil für jedes Auge der beobachtete Gegenstand zweimal gespiegelt wird; endlich 3. weil selbst die besten planparallelen Spiegel eine Verminderung der Deutlichkeit oder »Definition« der Bilder veranlassen, dies aber um so mehr der Fall ist, wenn — wie bei dem Helmholtz-schen Instrumente — nicht planparallele, sondern gewöhnliche, ungeschliffene Spiegel verwendet werden, welche geradezu eine Verzerrung der Bilder bewirken.

Die praktische oder thatsächliche Grenze für stereoskopische Wahrnehmungen mit dem Helmholtz'schen Instrumente der angegebenen Dimension muss daher noch erheblich unter 1000 *m* liegen. Dieses Resultat steht allerdings nicht ganz in Übereinstimmung mit den diesbezüglichen Mittheilungen von Helmholtz, welcher über die Leistung seines Instrumentes Folgendes sagt: [1]

»Dem Beobachter erscheint die Landschaft durch das Telestereoskop wie ein verkleinertes Modell. Alle nicht zu entfernten Theile der Landschaft bekommen dasselbe körperliche Aussehen wie im Stereoskop, und behalten dabei den ganzen Reichthum ihrer natürlichen Farben, so dass Bilder von überraschender Zierlichkeit und Eleganz entstehen. Fernere Gegenstände erscheinen allerdings platt, lösen sich aber doch noch von ihrem Hintergrunde ab, so z. B. Berge, die eine halbe Meile entfernt sind, vom Himmel.«

Die stereoskopische Wahrnehmung auf eine halbe Meile würde also ungefähr eine Distanz von 3700 *m* ergeben, oder

[1] Pogg. Ann., Bd. CII, S. 171, 1857.

mehr als dreimal so viel als wir vorstehend dafür berechnet haben. Es ist nun allerdings möglich, dass bei so scharfen Contrasten, wie selbe zwischen einem dunklen Bergrücken und dem hellen Horizonte sich ergeben, auch Wahrnehmungen unter einem geringeren Sehwinkel als 1′ gemacht werden können; anderseits ist es aber vielleicht nicht ausgeschlossen, dass hiebei eine optische Täuschung mitspielt. Da nämlich sämmtliche Objecte des Vordergrundes bis auf etwa 600 *m* hin thatsächlich in auffälliger Weise plastisch erscheinen, ist man leicht geneigt, diese Plastik der Bilder durch eine Art Suggestion auch auf die entfernteren Theile des Hintergrundes zu übertragen, ohne dass sie wirklich dort vorhanden wäre.

Bei den Relieffernrohren von Zeiss kommt für die Berechnung der Grenzdistanz stereoskopischer Wahrnehmungen eine Complication hinzu. Bei diesen Instrumenten ist nämlich nicht nur der Abstand D der optischen Axen grösser als die Augendistanz d (Fig. 5), sondern es geschieht zugleich die Beobachtung durch Fernrohre R R_1, welche eine acht- bis zehnmalige Vergrösserung haben und daher eine schärfere Definition der Bilder ergeben als das unbewaffnete Auge.

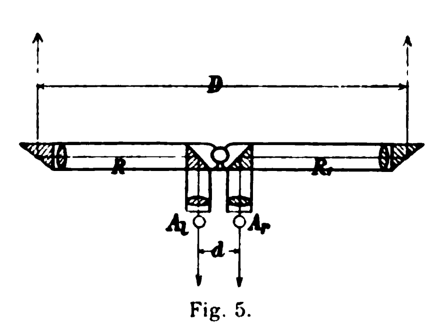


Fig. 5.

Der Einfluss der schärferen Definition macht sich aber in folgender Weise geltend. Würde man in Fig. 3 die unendlich gross gedachte Ebene E_1 von den Punkten $A_l A_r$ aus nicht mit freiem Auge, sondern mit irgend einem gewöhnlichen Binocle betrachten, so würde die Strecke ob (d. i. die Projection der Ebene E_1) aus der Entfernung $f = 111$ *m* — wo selbe für das unbewaffnete Auge gerade an der Grenze der Wahrnehmbarkeit ist — mit dem Binocle noch sehr gut sichtbar sein und man müsste sich bedeutend weiter von E entfernen, um die Strecke ob auch bei Beobachtung mit dem Binocle an der Grenze der Wahrnehmbarkeit zu finden. Die Grenzdistanz f_1 für die Beob-

achtung mit Fernrohren wird also in demselben Masse grösser als f (= die Grenzdistanz für das unbewaffnete Auge) als das Fernrohr kleinere Sehwinkel ergibt, wie das freie Auge.

Die definirende Kraft eines Fernrohres, vermöge welcher Gegenstände in der Entfernung wahrnehmbar werden, die dem freien Auge wegen des zu kleinen Sehwinkels unsichtbar bleiben, hängt aber bekanntlich von mehrfachen Umständen ab, und zwar 1. von der vergrössernden Kraft des Fernrohres, 2. von der mehr oder weniger vollkommenen Beseitigung der sphärischen und chromatischen Aberration, 3. von der Exactheit des Schliffes, respective der Politur der Glaslinsen, 4. von der Helligkeit der Bilder im Fernrohr und endlich von der Art, Beleuchtung, Entfernung und den Farbencontrasten des beobachteten Gegenstandes.

Diese verschiedenen Factoren können hinsichtlich ihres zusammenwirkenden Einflusses auf die definirende Kraft eines Fernrohres nicht leicht theoretisch berechnet werden, lassen sich aber in sehr einfacher Weise praktisch ermitteln. Bekanntlich geschieht dies gewöhnlich in der Art, dass man eine Tafel mit verschiedenen schwarzen Liniensystemen auf weissem Grunde aus einer bestimmten Entfernung mit dem Fernrohre beobachtet und daraus jenen kleinsten Sehwinkel bestimmt, welcher noch eine Auflösung der Systeme in einzelne Linien ermöglicht. Auch durch Beobachtung von Doppelsternen von bekanntem Winkelabstande kann diese Bestimmung geschehen.

Beide Methoden ergeben jedoch Messungen unter günstigeren Umständen, d. h. bei Vorhandensein schärferer Contraste als solche im Durchschnitt bei Betrachtung einer Landschaft vorzukommen pflegen. Ich habe daher in analoger Weise wie für das freie Auge auch für die Beobachtung mit einem Zeiss-schen Relieffernrohr, welches mir von der k. k. Hof- und Universitäts-Buchhandlung R. Lechner in Wien freundlichst zur Verfügung gestellt wurde, Messungen jener kleinsten Sehwinkel vorgenommen, unter welchen Gegenstände von verschiedenen minder contrastreichen Farben eben noch wahrnehmbar waren. Hiezu wurden die bereits früher erwähnten Würfel benützt und ergaben als Grenzwerthe für den Sehwinkel $\alpha = 0' 30''$ bis $0' 58''$.

Die Abmessungen des Instrumentes, soweit selbe hier in Betracht kommen, waren:

Distanz der optischen Axen = 400 *mm*, Vergrösserung = 10 fach.

Definirende Kraft gegen schwarz-weisse Liniensysteme = 12″.

Hieraus ergibt sich, dass in Folge der besseren Definirung die Grenzdistanz f sich berechnet:

$$f = \frac{400\ mm}{\mathrm{tg}\ 30''} = 2750\ m,$$

während für $\alpha = 58''$, $f = 1422\ m$ wird.

Die theoretischen Grenzdistanzen für stereoskopische Wahrnehmungen mit dem Zeiss'schen Relieffernrohre des vorbezeichneten Typus liegen daher rund zwischen 1400 und 2700 *m*; praktisch genommen werden diese Distanzen allerdings noch etwas geringer sein. Es kommt hiebei aber noch ein Umstand in Betracht, auf welchen schon Helmholtz[1] hingewiesen hat.

Infolge der zehnfachen Vergrösserung erscheinen nämlich alle Gegenstände zehnmal näher gerückt, die Entfernung der optischen Axen der beiden Fernrohre ist aber nicht zehnmal grösser als der natürliche Augenabstand, sondern nur $\frac{400}{65} = 6 \cdot 1$ mal grösser. Daher erscheinen die Gegenstände dem Beobachter nach der Tiefendimension platt gedrückt, denn ein zehnmal näherer Gegenstand würde von dem unbewaffneten Auge unter einem grösseren Gesichtswinkel der Tiefendimensionen wahrgenommen werden. Dieser Umstand hat allerdings auf die Vollkommenheit der Bilder des Zeiss'schen Relieffernrohres keinen merkbaren Einfluss, da man ja an das Beobachten mit gewöhnlichen Binocles und Doppelfernrohren gewöhnt ist, welche die Tiefendimensionen noch in viel höherem Grade platt drücken.

Wir wollen schliesslich noch eine dritte Art telestereoskopischer Wahrnehmung erörtern, welche ganz bedeutend

[1] Pogg. Ann., CII. Bd., S. 174, 1857.

grössere Grenzdistanzen erreichen lässt als die vorbesprochenen Instrumente. Es ist dies die stereoskopische Darstellung mit Hilfe der Photographie.

Die gebräuchlichen photographischen Stereoskopbilder werden, wie bekannt, in der Regel mittelst sogenannter Stereoskopcameras angefertigt, bei welchen zwei genau gleichartige Objectivgläser zur Verwendung kommen, deren Mittelpunkte einen Abstand von circa 80—100 *mm* haben, also einen solchen, der nicht wesentlich grösser ist als der natürliche Augenabstand. Es gibt aber auch Apparate, bei welchen die beiden Cameras getheilt sind und sich auf einen Abstand bis zu etwa 1 *m* auseinanderrücken lassen. Solche Apparate beruhen also auch auf dem Principe des Telestereoskopes, da der natürliche Augenabstand hiedurch in sehr erheblichem Masse vergrössert und damit eine erhöhte Plastik der Bilder erzielt wird.

Aus praktischen Gründen ist es nicht wohl thunlich, den Abstand der beiden Cameras, also die Basislinie für die beiden gleichzeitigen Aufnahmen, in einem einzigen Instrumente noch grösser zu machen, weil das Instrument sonst unbequem grosse Ausmasse erhalten müsste. Es unterliegt aber gar keinem Anstande, zwei vollkommen getrennte Cameras zu verwenden und dieselben so weit auseinander zu stellen als dies irgend wünschenswerth und erforderlich ist.

Man kann sonach unbeschränkt die Basis der Aufnahme gleich $\frac{D}{n}$ derjenigen Distanz D wählen, auf welche noch stereoskopisch wirkende Bilder erzielt werden sollen und ist dafür nur durch die mindere Durchsichtigkeit der Atmosphäre auf grosse Entfernungen eine Grenze gegeben.

Es ist aber nicht ohne praktische Bedeutung, die Frage zu erörtern, welche Art photographischer Objective, d. h. Objective welcher Brennweite man anwenden müsse, um ein naturgetreues Bild zu erhalten, nämlich ein solches, welches weder zu geringe Tiefendimensionen, noch auch übertriebene Plastik liefert?

Wie schon vorstehend erwähnt wurde, erscheinen bei Binocles und Doppelfernrohren, welche in dem Abstande der natürlichen Augenweite parallel zu einander combinirt sind,

die Tiefendimensionen verkürzt oder plattgedrückt. Bei photographischen Objectiven kann aber ebensowohl eine Verkürzung, wie auch eine ganz erhebliche Verlängerung der Tiefendimensionen bewirkt werden, je nach der Bildweite der Objective, und zwar ist meistens letzteres der Fall, da man sich mit Vorliebe der Objective mit kurzen Brennweiten bedient, weil hiedurch die Apparate kleiner und leichter transportabel werden.

Während aber eine Verkürzung der Tiefendimensionen sich dem Auge nicht besonders bemerkbar macht, ist dies in hohem Grade bei einer Verlängerung derselben der Fall. Betrachtet man beispielsweise zwei photographische Aufnahmen derselben Landschaft, Häusergruppe oder dergl., wovon die eine Aufnahme etwa mit einem Objective von 6 *cm* Brennweite, die andere mit einem Objective von 50 *cm* Brennweite hergestellt wurde, so ist man mitunter kaum im Stande, in beiden Bildern die nämliche Landschaft zu erkennen, und auch sehr genau bekannte Örtlichkeiten machen — insbesonders in dem Bilde mit kurzer Brennweite — einen ganz fremden Eindruck.

Dies rührt bekanntlich davon her, dass die in dem Bilde zum Ausdruck kommende Perspective eine ganz andere ist als jene für das Sehen mit freien Augen. Wenn man sich nun aber die Frage vorlegt, welche Brennweite das Objectiv haben müsse, um die natürliche Perspective wiederzugeben, so dürfte dies etwa folgend zu beantworten sein.

Wenn ein Zeichner oder Maler eine Landschaft nach der Natur skizzirt, so bringt er die verschiedenen Gegenstände — mehr oder weniger unwillkürlich — in jener Grösse zu Papier, in welcher sie ihm wirklich erscheinen, d. h. er projicirt sie unter gleichem Sehwinkel auf eine Ebene von solcher Entfernung, als man gewöhnt ist, die Zeichenfläche vom Auge entfernt zu halten, also etwa auf eine Distanz von 30—50 *cm*. Die Front eines 100 *m* weit entfernten Hauses, welche 10 *m* hoch und 10 *m* breit ist, wird daher in der Zeichnung als ein Quadrat von etwa 4 oder 5 *cm* Seitenlänge erscheinen. In dem gleichen Verhältnisse werden auch die näher und weiter liegenden Gegenstände dargestellt und ergeben dadurch die natürliche Perspective, da nicht nur die senkrecht zur Seh-

richtung verlaufenden Linien, sondern auch die Tiefendimensionen in der gleichen Weise projicirt werden.

Aber nicht nur beim Zeichnen selbst, sondern auch beim blossen Betrachten einer Landschaft verlegt man unbewusst das gesehene Bild in eine Ebene von der Entfernung der deutlichen Sehweite, und man findet daher ein photographisches Landschaftsbild nur dann naturgetreu, wenn es mindestens annähernd gleiche Verhältnisse wiedergibt, wie das freie Auge sie wahrnimmt. Aus den Gesetzen für die Bilder von Convexlinsen berechnet sich aber einfach, dass ein photographisches Objectiv von circa 40 *cm* Brennweite die gleiche Perspective liefert wie das freie Auge.

Mit Objectiven von so grosser Brennweite werden aber selten Stereoskopbilder angefertigt; deshalb zeigen die meisten photographischen Stereoskopbilder eine übertriebene Plastik, was zwar die Wirkung erhöht, aber auf Kosten der Naturtreue geschieht. Auch kommt der Umstand dazu, dass Bilder, welche in gewöhnlichen Stereoskopen verwendet werden sollen, nicht grösser als circa 7 *cm* im Quadrat sein dürfen; mit Objectiven von 40 *cm* Brennweite kommen aber von näher gelegenen Gegenständen nur Bruchtheile auf eine so kleine Bildfläche. Man wäre daher genöthigt, die mit Objectiven von grosser Brennweite aufgenommenen Bilder nachträglich auf das Mass von 7 *cm* Höhe und Breite zu verkleinern, welche Bildgrösse dem natürlichen Augenabstand entspricht. Die grössere Umständlichkeit bei der Herstellung solcher Bilder mag meistens die Ursache sein, dass man sich gewöhnlich nur der Objective mit kurzer Brennweite bedient, und daher leiden die meisten Stereoskopbilder, wie bemerkt, an Naturtreue hinsichtlich der Tiefendimensionen.

Bei Aufnahme von Bildern mit Teleobjectiven erhält man hingegen — wie sich aus dem oben Gesagten ergibt — eine Verkürzung der Tiefendimensionen, welche aber viel weniger störend ist als eine Verlängerung.

Um der Meinung zu begegnen, es seien vorstehende Erörterungen lediglich theoretische Speculationen, aus welchen

weitere Consequenzen nicht zu ziehen sind, sei es gestattet, in Kürze noch auf einige Nutzanwendungen hinzuweisen.

Was zunächst die Zeiss'schen Relieffernrohre anbelangt, so werden dieselben insbesonders für militärische Zwecke in grossem Umfange benützt. Eine wichtige militärische Verwendung — ausser jener zur allgemeinen Beobachtung und Recognoscirung — ist aber jene zur Schussbeobachtung beim Artilleriefeuer. Hiebei handelt es sich um die Entscheidung der Frage, ob die Hohlgeschosse vor, hinter oder an dem Ziele selbst auftreffen. Dies wird gegenwärtig aus der Erscheinung der Explosionswolke im Verhältniss zum Ziele mit mehr weniger Verlässlichkeit beurtheilt. Es wäre aber wünschenswerth, noch auf andere Weise diesbezügliche Beobachtungen machen zu können, und daher kann die Frage vorgelegt werden: Welche Beschaffenheit müsste ein Zeiss'sches Relieffernrohr haben, um auf die gewöhnlichen Schussdistanzen, d. i. 3000 bis 4000 *m* den Geschossaufschlag noch stereoskopisch oder der Tiefendimension nach beobachten und danach erkennen zu können, in welcher Lage zum Ziele sich derselbe befindet?

Auf Grund der vorstehend erörterten Principien ist die Beantwortung dieser Frage nicht schwer, und man findet beispielsweise, wenn die Forderung gestellt wird, dass an dem 4000 *m* weiten Ziele die Wahrnehmungen äquivalente Genauigkeit hinsichtlich der Beurtheilung der Tiefendimensionen haben sollen, wie bei Beobachtungen mit freiem Auge unter Sehwinkeln von 5′, dass bei Anwendung von Fernrohren mit zwanzigfacher Vergrösserung die optischen Axen einen Abstand von $77\,^1/_2$ *cm* haben müssten, während bei zehnfacher Vergrösserung dieser Abstand 116 *cm* sein müsste, etc.

Man ist also nicht nur in der Lage, die dem angestrebten Zwecke entsprechende Leistungsfähigkeit des Instrumentes bestimmen zu können, sondern kann gleichzeitig die vom Standpunkte des Optikers und Mechanikers günstigsten Bedingungen hinsichtlich Brennweite der Linsen, respective Länge des Instrumentes, vergrössernder Kraft des Fernrohres, Dimension der Glasprismen etc. im Vorhinein ermitteln.

Eine andere praktische Anwendung obiger Darlegungen ergibt sich dann, wenn die Aufgabe gestellt wird, von Gegen-

ständen, welche weiter als 200 *m* entfernt sind, stereoskopische Aufnahmen zu machen. Mit den gewöhnlichen Stereoskop-Cameras ist dies nicht möglich, man kann jedoch nach den obigen Darlegungen mit einem einzigen photographischen Apparate solche Stereoskopbilder erzeugen, wenn man die Aufnahmen von zwei Standpunkten bewirkt, welche eine Entfernung $B = D \operatorname{tg} \alpha$ haben, wo D die Entfernung dss Gegenstandes ist, α aber jener Winkel, unter welchem man die Tiefendimensionen wahrnehmen will und welcher zweckmässigerweise eine Grösse von mindestens 5—15′ haben soll.

Desgleichen geben die obigen Auseinandersetzungen Anhaltspunkte dafür, unter welchen Umständen photographische Aufnahmen die analoge Erkennung der Tiefendimensionen ermöglichen wie bei Betrachtung mit freiem Auge, somit die natürliche Perspective wiedergeben.

Endlich sei darauf hingewiesen, dass aus obigen Darlegungen hervorgeht, es müsse bei photographischen Aufnahmen des Mondes von zwei circa 75 geographischen Meilen entfernten Orten aus schon möglich sein, ein stereoskopisches Bild desselben zu erhalten, und dass solche Bilder daher auch ohne Zuhilfenahme der Libration desselben herstellbar wären.

Die vorstehenden Erörterungen über die Grenzen des telestereoskopischen Sehens lassen daher, wie ersichtlich, verschiedene Nutzanwendungen zu.

Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen

von

Dr. R. Daublebsky von Sterneck in Wien.

Die folgende Arbeit behandelt die Frage, unter welchen nothwendigen und hinreichenden Bedingungen gewisse additive Darstellungsanzahlen der Zahl n ungerade ausfallen. Dies wird mit Zugrundelegung einer äusserst einfachen Recursionsformel und mit Benützung bekannter Sätze, namentlich des Satzes von Legendre, dass die Anzahl der geraden Zerlegungen in verschiedene Summanden gleich jener der ungeraden ist, sobald n keine Pentagonalzahl ist, und eines allgemeineren, von Herrn K. Th. Vahlen im 112. Bande des Crelle'schen Journals mitgetheilten Satzes durchgeführt. Hiebei zeigt sich ein Zusammenhang mit der Anzahl der Darstellungen der Zahl $24n+1$ durch gewisse quadratische Formen, welch letztere wieder von der Primzahlzerlegung der Zahl $24n+1$ abhängig ist. In dieser Hinsicht sind die im Folgenden mitgetheilten Sätze zugleich als arithmetische additive Kriterien zu betrachten, indem sie einen Schluss aus den möglichen additiven Erzeugungen der Zahl n auf einen gewissen Typus der Primzahlzerlegung von $24n+1$ gestatten.

1.

Es seien bestimmte ganzzahlige positive Elemente $a_1, a_2 \dots$ in endlicher oder unendlicher Anzahl vorgegeben. Aus denselben soll die ganze positive Zahl n additiv erzeugt werden. Hiebei soll ein und dasselbe Element a_i auch mehrmals verwendet werden können, doch soll für jedes Element a_i eine obere Grenze k_i festgesetzt sein, derart, dass das Element a_i nicht

öfter als k_i-mal bei einer und derselben Darstellung der Zahl n verwendet werden darf. Es handelt sich also um alle Darstellungen der Zahl n in der Form

$$n = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots$$

$$0 \leqq \mu_1 \leqq k_1, \quad 0 \leqq \mu_2 \leqq k_2, \ldots$$

Es werde mit $[n]$ die Anzahl aller möglichen derartigen Darstellungen bezeichnet; mit $[n]_{a_i}$ die Anzahl jener Darstellungen von n, in denen das Element a_i mindestens einmal zur Verwendung kommt; mit $[n]_{(a_i)}$ die Anzahl jener Darstellungen, in denen das Element a_i nicht zur Verwendung gelangt.

Man sieht dann folgende Recursionsformel leicht ein:

$$[n]_{a_i} = [n-a_i]-[n-(k_i+1)a_i]_{(a_i)};$$

ferner ist selbstverständlich

$$[n-(k_i+1)a_i]_{(a_i)} = [n-(k_i+1)a_i]-[n-(k_i+1)a_i]_{a_i};$$

also, eingesetzt, und dasselbe Verfahren öfters wiederholt:

$$[n]_{a_i} = [n-a_i]-[n-(k_i+1)a_i]+[n-(k_i+2)a_i]-$$
$$-[n-2(k_i+1)a_i]+[n-(2(k_i+1)+1)a_i]-[n-3(k_i+1)a_i]+\ldots$$

Setzt man zur Abkürzung

$$k_i+1 = k'_i,$$

so wird

$$[n]_{a_i} = \sum_\lambda [n-(\lambda k'_i+1)a_i] - \sum_\lambda [n-\lambda k'_i a_i]$$

und es ist die Summation in der ersten Summe von $\lambda = 0$, in der zweiten von $\lambda = 1$ an so weit fortzusetzen, so lange die in der eckigen Klammer stehende Zahl nicht negativ ist. Das Symbol $[0]$ ist gleich 1 zu setzen.

Wir wollen nun aus sämmtlichen Darstellungselementen einen bestimmten Inbegriff auswählen, bezüglich jedes einzelnen desselben die letzte Summenformel aufgestellt denken und summiren. Dann erhalten wir links offenbar jede Darstellung von n so oft gezählt, so viele verschiedene Elemente dieses

Inbegriffs in ihr zur Verwendung gelangen, welche Anzahl mit $\{n\}$ bezeichnet werde, rechts aber einen Ausdruck der Form

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)[n-\lambda],$$

wobei, wie leicht zu sehen ist, die Function $\zeta(\lambda)$ den Überschuss der zu dem Darstellungselement a_i complementären Theiler von λ, welche die Form $\rho k'_i + 1$ haben, über jene der Form $\rho k'_i$ bedeutet, über alle Elemente a_i des betreffenden Inbegriffs summirt. Die so erhaltene Formel

$$\{n\} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)[n-\lambda] \tag{1}$$

wird uns als Grundlage für das Folgende dienen.

2.

Zunächst sollen einige additiv gebildete Kriterien für Primzahlen abgeleitet werden. Dieselben sollen uns in den Stand setzen, wenn die s ersten Primzahlen als bekannt angenommen werden, jede einzelne der auf die s^{te} Primzahl folgenden ganzen Zahlen daraufhin zu prüfen, ob sie die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Zu diesem Zwecke wollen wir obige Voraussetzungen etwas specialisiren; und zwar soll zunächst jedes Element nur einmal zur Verwendung kommen können, also alle Zahlen $k_i = 1$, respective die Zahlen $k'_i = 2$ sein. Ferner soll der herausgegriffene Inbegriff von Elementen mit der Gesammtheit der Elemente identisch sein, so dass also $\{n\}$ die Anzahl bedeutet, die man erhält, wenn man jede Darstellung von n so oft zählt, so viele Darstellungselemente darin auftreten, $\zeta(\lambda)$ aber den Überschuss der Anzahl der ungeraden über die der geraden Theiler von λ, welche zu einem Darstellungselement complementär sind.

Von den folgenden Primzahlkriterien ist das erste von Herrn K. Zsigmondy[1] bereits auf anderem Wege abgeleitet worden.

[1] Monatshefte für Math. und Phys. 5. Jahrg., 1894, S. 127.

1. Wählt man die Einheit und die als Producte aufgefassten Combinationen der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, so ist die Anzahl der additiven Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$ durch eine beliebige Anzahl verschiedener Elemente eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Ist nämlich λ kleiner als die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl und gehen etwa r der Primzahlen $p_1, \ldots p_s$ darin auf, so gibt es 2^r zu Darstellungselementen complementäre Theiler von λ; also ist in diesem Falle auch der Überschuss $\zeta(\lambda)$ eine gerade Zahl; $\zeta(1) = 1$; also nimmt die Formel (1) die Gestalt an:

$$\{n\} + [n-1] \equiv \zeta(n) \text{ (mod. 2)}.$$

Da $\zeta(p_{s+1}) = 1$ ist, weil p_{s+1} nur einen, zum Darstellungselemente 1 complementären Theiler besitzt, folgt

$$\{n\} + [n-1] \equiv 0 \text{ (mod. 2), wenn } n < p_{s+1}.$$

$$\{n\} + [n-1] \equiv 1 \text{ (mod. 2), wenn } n = p_{s+1}.$$

In $\{n\}$ ist jede Darstellung so oft gezählt, so viele Darstellungselemente in ihr vorkommen; Modulo 2 ist es also die Anzahl der aus einer ungeraden Anzahl von Elementen bestehenden Darstellungen.

Aus diesem Kriterium kann man einen einfachen Beweis für die Thatsache ableiten, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Nehmen wir nämlich an, es sei mit den Primzahlen $p_1 \ldots p_s$ die Gesammtheit aller Primzahlen bereits erschöpft, so könnte es keine Zahl $> p_s$ geben, für welche das Kriterium zutrifft. Es ist aber leicht zu sehen, dass die Zahl

$$(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_s+1)-2$$

die Bedingungen des Kriteriums erfüllt.

Diese Zahl lässt sich nämlich nur auf eine Art durch obige Elemente darstellen, nämlich als Summe aller Elemente mit Weglassung des Elementes 2. Hiebei werden 2^s-1, also eine ungerade Anzahl Elemente verwendet.

Die Zahl

$$(p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_s+1)-3$$

lässt sich auf zwei Arten durch dieselben Elemente additiv erzeugen, indem einmal die Elemente 1 und 2, das anderemal das Element 3 aus der Summe aller Elemente weggelassen werden. Also erhält man als Summe die Anzahl 3, in der That eine ungerade Zahl, und das Kriterium trifft somit zu. Es wäre also $(p_1+1)\ldots(p_s+1)-2$ eine neue Primzahl.

2. Nimmt man die Combinationen aus den s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen (mit Ausschluss der Einheit), so ist die Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$ durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente, weiters vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-2$ durch eine beliebige Anzahl von Elementen einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

$\zeta(\lambda)$ ist nämlich in diesem Falle immer ungerade, wenn $\lambda < p_{s+1}$ ist, und $\equiv 0$, wenn $\lambda = p_{s+1}$ ist, ebenso $\equiv 0$ für $\lambda = 1$ Aus (1) ergibt sich daher

$$\{n\}+\zeta(n) \equiv [n-2]+[n-3]+\ldots+[1] \pmod{2}$$

und analog, weil $\zeta(n-1) \equiv 1 \pmod{2}$ ist:

$$\{n-1\}+1 \equiv [n-3]+\ldots+[1] \pmod{2}$$

oder addirt

$$\zeta(n)+1+\{n\}+\{n-1\} \equiv [n-2] \pmod{2};$$

also

$$\begin{aligned}\{n\}+\{n-1\}+[n-2] &\equiv 0 \pmod{2}, \text{ wenn } n < p_{s+1},\\ &\equiv 1 \pmod{2}, \text{ wenn } n = p_{s+1},\end{aligned}$$

womit der obige Satz bewiesen ist.

3. Nimmt man die Combinationen aus den s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einmal in einer und derselben Darstellung verwendet werden soll, die Einheit aber als Element mit beliebig ofter Verwendbarkeit in einer und derselben Darstellung, so ist die Anzahl der

Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine gerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Für das Element 1 wird nämlich $k_1 = \infty$, $k_1' = \infty$, also kann der zum Element 1 complementäre Theiler, welcher die Form $pk_1'+1$ oder pk_1' haben muss, nur gleich 1 sein. Er tritt folglich nur bei der Zahl 1 selbst auf; also ist $\zeta(1) = 1$, $\zeta(\lambda) \equiv 1 \pmod{2}$ für $\lambda < p_{s+1}$, $\zeta(p_{s+1}) = 0$.

Hieraus ergibt sich analog dem vorhergehenden Falle

$$\{n\} + \{n-1\} + [n-1] \equiv 0 \pmod{2}, \text{ wenn } n < p_{s+1},$$
$$\equiv 1 \pmod{2}, \text{ wenn } n = p_{s+1}.$$

$\{n-1\} + [n-1]$ ist aber Modulo 2 der Anzahl jener Darstellungen von $n-1$ congruent, welche eine gerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten (wobei das vielleicht mehrfach verwendete Element 1 natürlich nur als e i n Element zu zählen ist); hieraus folgt obiger Satz.

4. Nimmt man die Einheit und die Combinationen aus einer geraden Anzahl der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einmal verwendet werden darf, dann noch die sämmtlichen Potenzen der s ersten Primzahlen zu Elementen, deren jedes beliebig oft in einer und derselben Darstellung zur Verwendung kommen kann, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$ einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

Der zu einer der Primzahlpotenzen, welche beliebig oft vorkommen können, complementäre Theiler von λ muss nämlich wieder gleich 1 sein, wenn er in $\zeta(\lambda)$ mitgezählt werden soll, also muss in diesem Falle λ selbst eine Primzahlpotenz sein.

Ist $\lambda = p_1^{\pi_1} \dots p_r^{\pi_r}$, so gibt es $\binom{r}{0} + \binom{r}{2} + \dots = 2^{r-1}$ zu den geraden Primzahlcombinationen complementäre Theiler.

Ist nun $r > 1$, so ist $\zeta(\lambda)$ gerade; ist $r = 1$, so kommt der zur Primzahlpotenz complementäre Theiler 1 in Betracht und $\zeta(\lambda)$ wird wieder gerade; man erhält daher

$$\{n\} + \zeta(n) \equiv [n-1] \pmod{2},$$

was obigen Satz ausdrückt.

Man kann natürlich auf Grund der Formel (1) noch sehr zahlreiche analoge Kriterien aufstellen; es seien etwa noch die folgenden hier angeführt:

5. Wählt man die Combinationen aus einer geraden Anzahl der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, welche nur einfach verwendet werden dürfen, die Einheit und sämmtliche Potenzen der s ersten Primzahlen aber zu Elementen, welche beliebig oft verwendet werden können, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine gerade Anzahl verschiedener Darstellungselemente enthalten, eine ungerade oder gerade Zahl, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

6. Kommt unter den eben angenommenen Elementen die Einheit gar nicht vor, so wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, weiters vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-2$, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

7. Wählt man die Einheit und die Combinationen aus den Quadraten der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einmal verwendet werden darf, die Combinationen aus den Primzahlen selbst aber zu Darstellungselementen, deren jedes beliebig oft verwendet werden kann, so wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n gleich der $s+1^{\text{ten}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

8. Schliesst man aus den Darstellungselementen in (7) die Einheit aus, so wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Darstellungselemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, weiters vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-2$ einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

9. Unter denselben Voraussetzungen wie in (7), aber bei beliebig ofter Verwendbarkeit der Einheit wird die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Anzahl der Darstellungen von $n-1$, welche eine gerade Anzahl von verschiedenen Elementen enthalten, einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

10. Wählt man allgemein die Einheit und die Combinationen aus den σ^{ten} Potenzen der s ersten Primzahlen zu Darstellungselementen, deren jedes nur einfach zur Verwendung gelangen darf, ferner alle jene aus den s ersten Primzahlen zusammengesetzten Zahlen, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, zu Darstellungselementen, deren jedes beliebig oft verwendet werden kann, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$, eine ungerade, respective gerade Zahl, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

11. Nimmt man die Einheit und die Combinationen aus den $s-1$ Primzahlen, die man erhält, wenn man aus den s ersten Primzahlen eine beliebige weglässt, zu Darstellungselementen, deren jedes nur einfach verwendet werden darf, ferner die sämmtlichen Potenzen dieser weggelassenen Primzahl zu Elementen mit beliebig ofter Verwendbarkeit, so ist die Anzahl der Darstellungen von n, welche eine ungerade Anzahl verschiedener Darstellungselemente enthalten, vermehrt um die Gesammtzahl der Darstellungen von $n-1$ einer ungeraden oder geraden Zahl gleich, je nachdem n die $s+1^{\text{te}}$ Primzahl oder kleiner als dieselbe ist.

3.

Wir betrachten jetzt die Zerlegungen der ganzen Zahl n in lauter verschiedene Summanden. Ferner sei irgend ein Inbegriff von bestimmten Elementen a definirt. Den allgemeinen Überlegungen des 1. Abschnittes entsprechend ist dann $\zeta(\lambda)$ der Überschuss der Anzahl der ungeraden über die geraden Theiler von λ, deren complementäre Theiler Elemente a sind; Modulo 2 wird also $\zeta(\lambda)$ der Gesammtzahl der zu Elementen a complementären Theiler von λ congruent. $\{n\}$ wird mod. 2 der Anzahl jener Darstellungen von n congruent, in welchen eine ungerade Anzahl von Elementen a vorkommt; $[n-\lambda]$ wird nach dem Satze von Legendre dann und nur dann ungerade sein, wenn $n-\lambda$ eine Pentagonalzahl ist.

Als Elemente a wollen wir jetzt sämmtliche durch die ganze Zahl L theilbaren ganzen Zahlen wählen. Dann wird $\zeta(\lambda)$ nur für $\lambda = Lz^2$ ungerade ausfallen, wo z^2 ein beliebiges Quadrat ist. Wir erhalten also in unserer Formel

$$\{n\} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)[n-\lambda]$$

rechter Hand so oft einen ungeraden Summanden, soviele ganzzahlige Lösungen die Gleichung

$$n = Lz^2 + \frac{3x^2 \pm x}{2}; \quad z > 0, \quad x \geqq 0,$$

respective

$$24n+1 = 24Lz^2 + (6x \pm 1)^2, \quad z > 0, \quad x \geqq 0,$$

oder

$$24n+1 = 24Lz^2 + y^2; \quad z > 0, \quad y > 0$$

zulässt.

Ist L nicht durch 4 theilbar, so kann man noch die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 6Lz^2 + y^2; \quad z > 0, \quad y > 0$$

verwenden, da $y^2 \equiv 1$ (mod. 8) ist und daher das z der letzteren

Gleichung nothwendigerweise gerade sein muss, was auf die frühere Form zurückführt.

Die Zahl $24n+1$ soll also durch die quadratische Form $(6L, 0, 1)$, d. i. durch eine der reducirten Formen der Determinante $-6L$ dargestellt werden und es soll entschieden werden, wann die Anzahl aller möglichen Darstellungen durch diese Form ungerade ist. Trifft es sich nun bei specieller Wahl des L, dass überhaupt keine andere reducirte Form der Determinante $-6L$ Zahlen der Form $24n+1$ darzustellen im Stande ist, so handelt es sich um die Darstellung der Zahl $24n+1$ durch die Gesammtheit aller reducirten Formen und bietet die Bestimmung dieser Anzahl daher gar keine Schwierigkeiten. Dieser vereinfachende Umstand trifft bei den hier durchgeführten Fällen $L = 1, 2, 3, 5, 7$ in der That zu.

L = 1.

Hier wird der Inbegriff der Elemente a mit der Gesammtheit aller ganzen Zahlen identisch. Die linke Seite der Gleichung (1) bedeutet jetzt mod. 2 die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden.

Für die Determinante -6 gibt es zwei reducirte Formen $(6, 0, 1)$ und $(3, 0, 2)$, von welchen nur die erstere, wie man sofort sieht, Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Die Anzahl der eigentlichen Darstellungen, bei welchen beide Unbestimmte positive Werthe haben, ist bekanntlich $2^{\mu-1}$, wenn in $24n+1$ μ Primzahlen aufgehen, für welche -6 quadratischer Rest ist, und keine, für welche es Nichtrest ist. Da wir auch die uneigentlichen Darstellungen haben wollen, müssen wir $24n+1$ successive durch $\frac{24n+1}{d^2}$ ersetzen, wo d^2 alle quadratischen Theiler von $24n+1$ zu durchlaufen hat, und die erhaltenen Anzahlen summiren.

Vor Allem erkennt man, dass wir dabei in Summe gewiss eine gerade Zahl erhalten, wenn in $24n+1$ mehr als eine Primzahl in ungerader Potenz aufgeht. Denn dieser Umstand bleibt auch für alle Zahlen $\frac{24n+1}{d^2}$ bestehen. Die Anzahl der Dar-

stellungen durch die Form (6, 0, 1) ist daher entweder $= 0$ (wenn sich eine Primzahl in $\frac{24n+1}{d^2}$ findet, für welche -6 Nichtrest ist) oder jedenfalls gerade, weil $\mu > 1$ ist. Also wird auch die Summe aller dieser Zahlen gerade ausfallen.

Ist ein und nur ein Exponent in der Primzahlzerlegung von $24n+1$ ungerade, so gibt es in der That Zahlen $\frac{24n+1}{d^2}$, für welche $\mu = 1$ ist. Ist $p_\lambda^{\pi_\lambda}$ die ungerade Primzahlpotenz, so sind es offenbar die Zahlen $p_\lambda, p_\lambda^3, \ldots p_\lambda^{\pi_\lambda}$, für welche $\mu = 1$ ist. Ist also -6 quadratischer Rest von p_λ und hat π_λ die Form $4l+1$, so wird die Gesammtzahl der gesuchten Darstellungen ungerade ausfallen.[1]

Ist endlich kein Exponent ungerade, also $24n+1$ einer Quadratzahl gleich, so gibt es, wenn $p_1^{\pi_1} \ldots p_\lambda^{\pi_\lambda}, q_1^{\kappa_1} \ldots q_\tau^{\kappa_\tau}$ die Primzahlzerlegung von $24n+1$ darstellt, wo für $p_1, \ldots p_\lambda$ -6 quadratischer Rest, für $q_1, \ldots q_\tau$ aber Nichtrest ist, folgende Zahlen $\frac{24n+1}{d^2}$, für welche $\mu = 1$ ist:

$$\begin{array}{l} p_1^2, p_1^4, \ldots \ldots p_1^{\pi_1}, \\ p_2^2, p_2^4, \ldots \ldots p_2^{\pi_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_\lambda^2, p_\lambda^4, \ldots \ldots p_\lambda^{\pi_\lambda}. \end{array}$$

Ist also die Summe $\frac{\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_\lambda}{2}$ eine ungerade Zahl, so wird die Gesammtzahl unserer Darstellungen ungerade ausfallen.

In Verbindung mit der früheren Bemerkung können wir also folgenden Satz aussprechen:

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe einer ungeraden Anzahl verschiedener Summanden ist dann und nur dann ungerade, wenn bei

[1] Die Bedingung, dass -6 quadratischer Rest von p_λ ist, ist hier von selbst erfüllt, denn da $24n+1$ das Product aus einer Quadratzahl und p_λ ist, muss, wie man sofort sieht, sowohl das Quadrat, als auch p_λ die Form $24l+1$ haben.

[illegible]

[illegible] Theiler vermindert um [illegible] stellt [illegible] Theiler von [illegible] eine gerade Zahl, nur wenn [illegible] eine Ausnahme [illegible] gerade Anzahl Theiler besitzt [illegible]

[illegible] Seite unserer Gleichung

$$\zeta(n) = \sum_{i=1}^{n} \zeta(i)\,\zeta(n-i)$$

jede Darstellung so oft, so viele Elemente darin durch ein Qua[illegible] als 1, theilbar sind, so werden wir rechts mod. 2 die Anzahl der [illegible] von n in der Form n [illegible]^2 + ω erhalten, wobei ω irgend eine Pe[illegible] bedeutet. Diese Darstellungsanzahl ist aber mit jener durch die [illegible] Form (0, 0, 1) identisch, also mod. 2 der eben betrachteten An[illegible] stellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Sum[illegible] [illegible]. Nur ist hier die Annahme $z = 1$ ausgeschlossen, al[illegible] [illegible] n einer um 1 vermehrten Pentagonalzahl gleich ist.

Wir haben somit den Satz:

[illegible] Anzahl der additiven Darstellungen der Za[illegible] [illegible] ganze Zahlen, unter denen ein[illegible]

$$L = 2.$$

Hier handelt es sich um die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 12z^2+y^2; \quad z > 0, \quad y > 0.$$

Statt dieser können wir die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 3z^2+y^2; \quad z > 0, \quad y > 0,$$

verwenden, da z als Lösung der zweiten Gleichung nothwendigerweise gerade sein muss.

Hier ist die Lösung unserer Aufgabe also sehr einfach. Für die Determinante —3 gibt es zwei reducirte Formen, (3, 0, 1) und (2, 1, 2), von denen nur die erstere ungerade Zahlen dartellen kann. Ganz analog dem früheren Falle gelangen wir lso zu folgendem Satze:

Die Anzahl jener Darstellungen von n durch auter verschiedene Summanden, bei welchen eine ngerade Anzahl gerader Summanden auftritt, ist ann und nur dann ungerade, wenn entweder bei er Primzahlzerlegung von $24n+1$ ein einziger unerader Exponent auftritt und dieser die Form $4t+1$ at, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, also $4n+1$ ein Quadrat ist, dabei aber die halbe Summe er Exponenten der Primzahlen von der Form $3h+1$ ne ungerade Zahl ist.

ızahl durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, ist mod. 2 r Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anhl verschiedener Summanden congruent, falls n nicht einer 1 vermehrten Pentagonalzahl gleich ist. In letzterem Falle die um 1 vermehrte erstere Anzahl der letzteren congruent.

Ferner liefert obige Formel unmittelbar folgenden Satz:

Die Anzahl der Darstellungen von n durch lauter verschieıe Elemente, unter welchen eine ungerade Anzahl durch kein adrat, grösser als 1, theilbar sind, ist mod. 2 der Anzahl der rstellungen von $n-1$ durch lauter verschiedene Elemente ıgruent.

der Zerlegung von $24n+1$ in seine Primfactoren entweder ein einziger Exponent ungerade ist und die Form $4t+1$ hat, oder gar kein Exponent ungerade, also $24n+1$ einem Quadrate gleich, dabei aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, welche die Form $24k+1, 5, 7, 11$[1] haben, eine ungerade Zahl ist.

Die Anzahl der Darstellungen von n durch eine gerade Anzahl verschiedener Summanden ist nach dem Legendre'schen Satze jener durch eine ungerade Anzahl gleich, nur wenn n eine Pentagonalzahl ist, übertrifft die eine dieser beiden Anzahlen die andere um eine Einheit. Durch den vorstehenden Satz ist uns also die Gesammtzahl der Zerfällungen der Zahl n in lauter verschiedene Summanden Modulo 4 bekannt.[2]

---

[1] Für diese ist nämlich -6 quadratischer Rest.

[2] Nebenbei sei hier ein Zusammenhang der eben betrachteten Anzahl mit einer anderen Darstellungsanzahl angemerkt. Wenn die Anzahl der in n aufgehenden verschiedenen Primzahlen r beträgt, so gibt es 2^r Theiler von n, welche die Eigenschaft haben, durch keine Quadratzahl, grösser als 1, theilbar zu sein. Die Anzahl sämmtlicher Theiler, vermindert um 2^r, stellt also die Anzahl der durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbaren Theiler von n dar; diese Anzahl ist offenbar im Allgemeinen eine gerade Zahl, nur wenn n eine Quadratzahl ist, ist sie ungerade. Doch macht hievon die Zahl 1 eine Ausnahme, welche, obwohl Quadratzahl, keinen, also eine gerade Anzahl Theiler besitzt, die durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind.

Zählen wir also in der linken Seite unserer Gleichung

$$\{n\} = \sum_{\lambda=1}^{n} \zeta(\lambda)\,[n-\lambda]$$

jede Darstellung so oft, so viele Elemente darin durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, so werden wir rechts mod. 2 die Anzahl der Darstellungen von n in der Form $n = z^2+\omega$ erhalten, wobei ω irgend eine Pentagonalzahl bedeutet. Diese Darstellungsanzahl ist aber mit jener durch die quadratische Form $(6, 0, 1)$ identisch, also mod. 2 der eben betrachteten Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden congruent. Nur ist hier die Annahme $z = 1$ ausgeschlossen, also der Fall, in welchem n einer um 1 vermehrten Pentagonalzahl gleich ist.

Wir haben somit den Satz:

Die Anzahl der additiven Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene ganze Zahlen, unter denen eine ungerade

$$L = 2.$$

Hier handelt es sich um die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 12z^2+y^2; \quad z > 0, \quad y > 0.$$

Statt dieser können wir die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 3z^2+y^2; \quad z > 0, \quad y > 0,$$

verwenden, da z als Lösung der zweiten Gleichung nothwendigerweise gerade sein muss.

Hier ist die Lösung unserer Aufgabe also sehr einfach. Für die Determinante —3 gibt es zwei reducirte Formen, (3, 0, 1) und (2, 1, 2), von denen nur die erstere ungerade Zahlen darstellen kann. Ganz analog dem früheren Falle gelangen wir also zu folgendem Satze:

Die Anzahl jener Darstellungen von n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl gerader Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn entweder bei der Primzahlzerlegung von $24n+1$ ein einziger ungerader Exponent auftritt und dieser die Form $4t+1$ hat, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, also $24n+1$ ein Quadrat ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen von der Form $3h+1$ eine ungerade Zahl ist.

Anzahl durch ein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, ist mod. 2 der Anzahl der Darstellungen von n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden congruent, falls n nicht einer um 1 vermehrten Pentagonalzahl gleich ist. In letzterem Falle ist die um 1 vermehrte erstere Anzahl der letzteren congruent.

Ferner liefert obige Formel unmittelbar folgenden Satz:

Die Anzahl der Darstellungen von n durch lauter verschiedene Elemente, unter welchen eine ungerade Anzahl durch kein Quadrat, grösser als 1, theilbar sind, ist mod. 2 der Anzahl der Darstellungen von $n-1$ durch lauter verschiedene Elemente congruent.

L = 3.

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 18z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0$$

soll bestimmt werden, statt welcher man wieder die einfachere Gleichung

$$24n+1 = 2z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0$$

verwenden kann, da das z der letzteren Gleichung offenbar durch 3 theilbar sein muss.

Da für die Determinante —2 nur die reducirte Form (2, 0, 1) existirt, findet man folgenden Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl durch 3 theilbarer Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn bei der Primzahlzerlegung von $24n+1$ entweder nur ein ungerader Exponent vorkommt, dieser überdies die Form $4t+1$ hat, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, also $24n+1$ ein Quadrat ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Formen $8h+1$ und $8h+3$ eine ungerade Zahl ist.

L = 5.

Hier muss die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 30z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0$$

bestimmt werden.

Für die Determinante —30 gibt es die vier reducirten Formen: (30, 0, 1), (15, 0, 2), (10, 0, 3), (6, 0, 5), von welchen nur die erste Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Somit werden wir auch hier einen analogen Satz erhalten. Aber es ist störend, dass in $24n+1$ jetzt auch die Primzahl 5 in irgend einer Potenz aufgehen kann und dann $24n+1$ nicht mehr zur Determinante theilerfremd ist. Doch lässt sich dieser Fall leicht erledigen; ist

$$24n+1 = 30z^2+y^2 \equiv 0 \pmod{5},$$

so muss $y \equiv 0 \pmod{5}$ oder $y = 5y'$ sein, und folglich

$$24u + 1 = 30z^2 + 25y'^2.$$

Daraus folgt

$$\frac{24n+1}{5} = 6z^2 + 5y'^2;$$

es ist also jetzt $\frac{24n+1}{5}$, eine Zahl, welche $\equiv 5 \pmod{24}$ ist, durch die Form $(6, 0, 5)$ darzustellen; da nun diese Form, wie man leicht erkennt, wieder die einzige ist, welche solche Zahlen darstellen kann, handelt es sich wieder um die Zahl der Darstellungen durch die Gesammtheit der reducirten Formen, wie früher. Man wird also an Stelle von $24n+1$ einfach $\frac{24n+1}{5}$ setzen. Ist noch immer Theilbarkeit durch 5 vorhanden, also

$$\frac{24n+1}{5} = 6z^2 + 5y'^2 \equiv 0 \pmod{5},$$

so muss $z = 5z'$ sein; es wird dann

$$\frac{24n+1}{25} = 30z'^2 + y'^2;$$

dann wird also $\frac{24n+1}{25}$, welches $\equiv 1 \pmod{24}$ ist, durch die Form $(30, 0, 1)$ darzustellen sein, welche wieder die einzige ist, welche unsere Zahl darzustellen im Stande ist; so kann man fortfahren, bis man die ganze Potenz von 5, welche in $24n+1$ aufgeht, entfernt hat und die übrig bleibende Zahl wird dann entweder durch $(30, 0, 1)$ oder $(6, 0, 5)$ darzustellen sein, also wieder durch die Gesammtheit der reducirten Formen. Also folgender Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen die durch 5 theilbaren Summanden in ungerader Anzahl vorkommen, ist dann und nur dann ungerade, wenn die Zahl, die man erhält, nachdem man $24n+1$ durch die höchste darin enthaltene Potenz von 5 dividirt hat, in ihre Primfactoren zerlegt,

nur einen ungeraden Exponenten aufweist, der die Form $4t+1$ hat und überdies einer Primzahl zugehört, für welche -30 quadratischer Rest ist,[1] oder, wenn alle Exponenten gerade sind, dabei aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, für welche -30 quadratischer Rest ist, eine ungerade Zahl ist.

L = 7.

Wir suchen die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$24n+1 = 42z^2+y^2; \quad z > 0, \; y > 0.$$

Für die Determinante -42 gibt es die vier reducirten Formen: (42, 0, 1), (14, 0, 3), (7, 0, 6), (21, 0, 2), von denen wieder nur die erste Zahlen der Form $24n+1$ darstellen kann. Auch hier kann der Fall eintreten, dass $24n+1$ durch 7 theilbar ist; in diesem Falle ist ganz analog dem früheren Falle $L = 5$ zu verfahren; ist

$$24n+1 = 42z^2+y^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

so muss $y = 7y'$ sein, also

$$\frac{24n+1}{7} = 6z^2+7y'^2;$$

diese Zahl ist aber $\equiv 7 \pmod{24}$ und kann daher, wie man leicht sieht, nur durch die dritte der obigen reducirten Formen dargestellt werden. Ist auch noch

$$\frac{24n+1}{7} = 6z^2+7y'^2 \equiv 0 \pmod{7},$$

so muss $z = 7z'$ sein, also

$$\frac{24n+1}{49} = 42z'^2+y'^2,$$

und da diese letztere Zahl $\equiv 1 \pmod{24}$ ist, also überhaupt nur durch (42, 0, 1) darstellbar ist, kommt es auch hier wieder

---

[1] Es sind dies die in den arithmetischen Reihen $120K+1$, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 49, 59, 67, 79, 101, 113 enthaltenen Primzahlen.

in allen Fällen auf die Darstellungen durch das gesammte Formensystem an. Wir haben somit den Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen eine ungerade Anzahl durch 7 theilbarer Summanden auftritt, ist dann und nur dann ungerade, wenn die Primzahlzerlegung jener Zahl, die man aus $24n+1$ durch Unterdrückung der höchsten darin enthaltenen Potenz von 7 erhält, entweder nur einen ungeraden Exponenten aufweist, welcher überdies die Form $4t+1$ hat und einer Primzahl zugehört, für welche -42 quadratischer Rest ist, oder, wenn alle Exponenten gerade sind, aber die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, für welche -42 quadratischer Rest ist, eine ungerade Zahl ist.

4.

Man kann auch leicht entscheiden, unter welchen Bedingungen die Zahl n auf eine ungerade Anzahl von Arten derart als Summe von lauter verschiedenen Summanden darstellbar ist, dass sich darunter eine ungerade Anzahl durch L nicht theilbarer Summanden findet.

Bezeichnet nämlich M die Anzahl der Darstellungen von n, bei welchen eine ungerade Anzahl durch L theilbarer Elemente auftritt. N die Anzahl jener, bei welchen eine ungerade Anzahl durch L untheilbarer Summanden auftritt, so ist eine Darstellung, welche überhaupt aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht, entweder in beiden oder in keiner der beiden Zahlen M und N mitgezählt; eine Darstellung hingegen, welche aus einer ungeraden Anzahl von Summanden besteht, in einer und nur einer der beiden Zahlen M und N gezählt; also ist $M+N$ mod. 2 der Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch eine ungerade Anzahl verschiedener Elemente congruent. Da uns diese letztere Anzahl, sowie M bereits mod. 2 bekannt sind, können wir auch N mod. 2 als bekannt betrachten.

Setzen wir z. B. $L = 3$. Nach Früherem ist in diesem Falle M dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, entweder nur einen ungeraden Exponenten

aufweist und dieser überdies die Form $4t+1$ hat, oder $24n+1$ einem Quadrate gleich ist und die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen, welche die Form $8h+1$, 3 (d. i. $24K+1$, 11, 17, 19) haben, eine ungerade Zahl ist; $M+N$ ist dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, nur einen ungeraden Exponenten aufweist und dieser die Form $4t+1$ hat, oder, wenn $24n+1$ einem Quadrate gleich ist, dabei aber die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Formen $24K+1$, 5, 7, 11 ungerade ist. N wird dann und nur dann ungerade ausfallen, wenn eine und nur eine der beiden Zahlen M und $M+N$ ungerade ist. Daraus ergibt sich unmittelbar folgender Satz:

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, unter welchen sich eine ungerade Anzahl nicht durch 3 theilbarer findet, ist dann und nur dann ungerade, wenn $24n+1$ ein Quadrat ist (also n selbst eine Pentagonalzahl) und dabei die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Formen $12t\pm 5$,[1] ungerade ist.

5.

Zu einer anderen Art additiver Erzeugungen der Zahl n gelangen wir auf folgende Weise: Fassen wir die ungerade Zahl n als Summe zweier Zahlen λ und $n-\lambda$ auf und stellen jede derselben als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen dar. Jede Darstellung von λ in Verbindung mit jeder von $n-\lambda$ wird dann eine additive Erzeugung der Zahl n liefern, bei welcher die Elemente aber auch doppelt zur Verwendung kommen können; es kann sich nämlich ein bestimmtes Element sowohl in der Darstellung von λ als auch in jener von $n-\lambda$ vorfinden.

Wir kommen also auf Darstellungen von n, in denen einige Elemente einfach, andere aber doppelt auftreten. Bilden wir die Summe:

[1] Nämlich $24K+5$, 7, 17, 19.

$$\sum_{\lambda=0}^{n} [\lambda][n-\lambda],$$

so ist in derselben eine Darstellung von n, in welcher genau r Elemente einfach auftreten, offenbar 2^rmal gezählt; denn von den paarweise in der Darstellung von n auftretenden Elementen muss offenbar je eines als Darstellungselement von λ, das andere als solches von $n-\lambda$ aufgefasst werden, während jedes der in n einfach auftretenden Elemente sowohl als Darstellungselement von λ wie auch von $n-\lambda$ aufgefasst werden kann, was 2^r verschiedene Möglichkeiten ergibt. In der halben Summe

$$\sum_{\lambda=0}^{\frac{n-1}{2}} [\lambda][n-\lambda]$$

wird eine solche Darstellung also 2^{r-1}mal gezählt sein; mod. 2 werden wir also in letzterer Summe die Anzahl jener Darstellungen erhalten, in welchen $r=1$ ist.[1] Anderseits wird diese Summe im Allgemeinen gerade Summanden enthalten, nur jene Glieder in denen sowohl λ als $n-\lambda$ Pentagonalzahlen sind, werden ungerade ausfallen, so dass wir unsere Summe mod. 2 der Anzahl der Darstellungen von n als Summe zweier verschiedener Pentagonalzahlen congruent setzen können.

Letztere Anzahl ist aber wieder auf Grund der Theorie der quadratischen Formen leicht zu ermitteln.

Aus der Gleichung

$$n = \frac{3\alpha^2 \pm \alpha}{2} + \frac{3\beta^2 \pm \beta}{2}$$

folgt nämlich

$$24n+2 = (6\alpha \pm 1)^2 + (6\beta \pm 1)^2.$$

Zahlen der Form $24n+2$ können aber, wie man sofort sieht, nicht anders als Summe zweier Quadrate dargestellt

[1] Weil n ungerade angenommen ist, gibt es keine Darstellung, in der alle Elemente paarweise auftreten und ist das isolirte Element nothwendig eine ungerade Zahl.

werden, als wenn beide darstellende Zahlen die Form $6\alpha \pm 1$ haben, so dass es hier auf die gesammte Zahl der Darstellungen von $24n+2$ als Summe zweier Quadrate ankommt: diese Anzahl ist aber mit der Darstellungsanzahl von $12n+1$ als Summe zweier Quadrate identisch.[1]

Die Frage, wann $12n+1$ auf eine ungerade Anzahl von Arten als Summe zweier Quadrate dargestellt werden kann, ist ganz analog den früher behandelten Fällen zu erledigen. Da überdies, weil wir n als ungerade vorausgesetzt haben, $12n+1$ niemals ein Quadrat werden kann, kommen wir zu folgendem einfachen Satze:

Die ungerade Zahl n lässt sich dann und nur dann auf eine ungerade Anzahl von Arten als Summe von lauter verschiedenen geraden Zahlen[2] und einer ungeraden Zahl, welch letztere nicht mit der Hälfte einer jener geraden Zahl übereinstimmen darf, darstellen, wenn $12n+1$, in seine Primfactoren zerlegt, nur einen ungeraden Exponenten aufweist und dieser überdies die Form $4t+1$ hat.

6.

Die im Vorigen abgeleiteten Sätze beruhen im Wesentlichen auf dem Satze von Legendre über die Anzahl der Darstellungen der Zahl n durch eine gerade und durch eine ungerade Anzahl von Summanden; in dem folgendem Abschnitte sollen zum Schlusse noch einige analoge Folgerungen aus dem von Herrn K. Th. Vahlen[3] aufgestellten allgemeineren Satze gezogen werden, welcher folgendermassen lautet:

»Unter denjenigen Zerlegungen einer Zahl in lauter verschiedene Summanden, in welchen die Summe der absolut kleinsten Reste (Modulo 3) der Summanden einer gegebenen

[1] Denn aus jeder Darstellung $12n+1 = x^2+y^2$ folgt:

$$24n+2 = (x+y)^2+(x-y)^2$$

und umgekehrt.

[2] Die Zahlenpaare können wir uns nämlich zu geraden Zahlen vereinigt denken; nur darf dann eben die eine ungerade Zahl nicht mit der Hälfte einer der so entstehenden geraden Zahlen übereinstimmen.

[3] Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 112.

positiven oder negativen Zahl h gleich ist, gibt es im Allgemeinen ebenso viele gerade wie ungerade; allein ausgenommen ist die Pentagonalzahl $\bar{\omega}_h = \frac{3h^2-h}{2}$, für welche es eine mit h zugleich gerade oder ungerade überzählige Zerlegung der betrachteten Art gibt.«

Die Gesammtzahl aller (geraden und ungeraden) derartigen Zerlegungen ist also immer gerade, nur für $\bar{\omega}_h$ ist sie ungerade.

Es bezeichne $[n]^h$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von lauter verschiedenen Summanden, bei welchen die absolut kleinsten Reste (Modulo 3) der Summanden h zur Summe geben und $[n]^h_a$ die Anzahl derjenigen unter diesen Darstellungen, in welchen das bestimmte Element a auftritt.

Die evidente Recursionsformel

$$[n]^h_a = [n-a]^{h-\alpha} - [n-a]^{h-\alpha}_a,$$

wobei α den absolut kleinsten Rest der Zahl a mod. 3 bedeutet, führt leicht zu den weiteren:

$$[n]^h_a = [n-a]^{h-\alpha} - [n-2a]^{h-2\alpha} + [n-3a]^{h-3\alpha} - \ldots$$

Wir denken uns nun wieder einen Inbegriff A von Elementen a definirt und summiren die letztere Formel über alle Elemente dieses Inbegriffs.

$$\sum [n]^h_a = \sum [n-a]^{h-\alpha} - \sum [n-2a]^{h-2\alpha} + \sum [n-3a]^{h-3\alpha} - \ldots$$

Hiebei ist nun offenbar in der Summe linker Hand jede Darstellung so oft gezählt, so viele Elemente a in ihr vorkommen, also mod. 2 alle Darstellungen mit ungerader Anzahl von Elementen a; die Darstellungsanzahlen rechts sind auf Grund des Satzes von Vahlen im Allgemeinen gerade Zahlen; es ist $[n-\lambda a]^{h-\lambda\alpha}$ dann und nur dann ungerade, wenn

$$n-\lambda a = \frac{3(h-\lambda\alpha)^2-(h-\lambda\alpha)}{2}$$

ist.

Wir theilen nun die Elemente a in drei Gruppen, nach ihren Modulo 3 absolut kleinsten Resten α; den Werthen

$\alpha = 0, 1, -1$ entsprechen die Zahlformen $a = 3b$, $a = 3b_1+1$, $a = 3b_2+2$.

Die linke Seite unserer Gleichung ist also Modulo 2 der Gesammtzahl der ganzzahligen Lösungen folgender drei Gleichungen congruent

$$n-3\lambda b = \frac{3h^2-h}{2} = \bar{\omega}_h; \quad \lambda > 0, \tag{1}$$

$3b$ dem Inbegriffe A angehörig;

$$n-\lambda_1(3b_1+1) = \frac{3(h-\lambda_1)^2-(h-\lambda_1)}{2}; \quad \lambda_1 > 0, \tag{2}$$

$3b_1+1$ dem Inbegriffe A angehörig;

$$n-\lambda_2(3b_2+2) = \frac{3(h+\lambda_2)^2-(h+\lambda_2)}{2}; \quad \lambda_2 > 0, \tag{3}$$

$3b_2+2$ dem Inbegriffe A angehörig.

Wir machen nun über A specielle Annahmen. Nehmen wir zunächst als Inbegriff A die Gesammtheit aller durch $3L$ theilbaren ganzen Zahlen, wobei L irgend eine gegebene positive ganze Zahl ist, so kann überhaupt nur die erste der obigen drei Gleichungen Lösungen zulassen. Die Anzahl ihrer Lösungen ist der Anzahl der durch L theilbaren Theiler von $\frac{n-\bar{\omega}_h}{3}$ gleich, also dann und nur dann ungerade, wenn $\frac{n-\bar{\omega}_h}{3} = Lz^2$, wobei z^2 ein beliebiges Quadrat ist. Wir haben also folgenden Satz:

Die Anzahl jener Darstellungen der Zahl n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, bei welchen erstens die Summe der Modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden gleich h ist, und bei welchen zweitens eine ungerade Anzahl von Summanden durch $3L$ theilbar sind, ist dann und nur ungerade, wenn n die Form $3Lz^2+\bar{\omega}_h$ hat.

Zweitens bestehe A aus allen nicht durch 3 theilbaren ganzen Zahlen. In diesem Falle hat die erste der obigen drei Gleichungen keine Lösung; die zweite und dritte Gleichung zusammen haben aber, wie sich sofort zeigen wird, im All-

gemeinen eine gerade Zahl von Lösungen. Wir schreiben die Gleichungen (2) und (3) in folgender Form:

$$\frac{n-\bar{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda_1(\lambda_1+1-2h+2b_1)}{2} \qquad 2)$$

$$\frac{n-\bar{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda_2(\lambda_2+1+2h+2b_2)}{2} \qquad 3)$$

Es ist nun klar, dass für einen und denselben Werth $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ sich $b_1 - b_2 = 2h$ ergibt, dass also aus jeder Lösung (λ, b_1) der zweiten Gleichung eine Lösung $(\lambda, b_1 - 2h)$ der dritten Gleichung und aus jeder Lösung (λ, b_2) der dritten Gleichung eine Lösung $(\lambda, b_2 + 2h)$ der zweiten folgt. Isolirt bleiben aber bei positivem h die dem Intervalle $0, 1, 2 \ldots 2h-1$ angehörigen Werthe von b_1, bei negativem h die dem Intervalle $0, 1, 2 \ldots (-2h-1)$ angehörigen Werthe von b_2, soweit sie Lösungen der betreffenden Gleichungen bilden.

Was nun diese isolirt stehenden Lösungen betrifft, so sieht man leicht, dass dieselben im Allgemeinen wieder in gerader Anzahl auftreten; ist h positiv, so hat die Gleichung (2) isolirt stehende Lösungen, deren Anzahl man erhält, wenn man abzählt, wie viele von folgenden Darstellungen:

$$\frac{n-\bar{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda(\lambda-2h+1)}{2}, \quad \frac{\lambda(\lambda-2h+3)}{2}, \ldots \frac{\lambda(\lambda-3)}{2},$$

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}, \quad \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}, \ldots \frac{\lambda(\lambda+2h-1)}{2}$$

möglich sind für ganzzahlige nicht negative Werthe von λ. Nun folgt aber aus jeder Darstellung von $\frac{n-\bar{\omega}_h}{3}$ in der Form $\frac{\lambda(\lambda-i)}{2}$ eine solche in der Form $\frac{\lambda'(\lambda'+i)}{2}$, wenn man nur in ersterer $\lambda - i = \lambda'$ setzt; dies führt zu einer gegenseitigen Zuordnung dieser isolirt stehenden Lösungen; diese Zuordnung ist jedenfalls vollständig durchführbar, wenn auch noch die letzte Formel:

$$\frac{n-\bar{\omega}_h}{3} = \frac{\lambda(\lambda+2h-1)}{2}$$

Die Anzahl der Darstellungen der Zahl n als Summe einer ungeraden Anzahl verschiedener ganzer Zahlen, bei welchen die Modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden h zur Summe geben, ist dann und nur dann ungerade, wenn $\frac{n-\tilde{\omega}_h}{3}$ einer Quadratzahl, grösser als 0, gleich ist; oder wenn $n = \tilde{\omega}_h$ ist und h ungerade.

Indem wir den ersteren dieser beiden Sätze auf alle möglichen Werthe von h beziehen und summiren, erhalten wir den Satz:

Die Gesammtzahl der Darstellungen von n als Summe von lauter verschiedenen ganzen Zahlen, unter welchen eine ungerade Anzahl nicht durch 3 theilbarer sich findet, ist dann und nur dann eine ungerade Zahl, wenn n einer Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_k$ mit ungeradem Index k gleich ist.

Wir sind hiemit auf ein Resultat zurückgekommen, das wir bereits in Abschnitt 4 gefunden haben; die dort erhaltene nothwendige und hinreichende Bedingung, dass in $24n+1$ die halbe Summe der Exponenten der Primzahlen der Form $12t \pm 5$ ungerade ist, ist mit der hier gefundenen identisch. Wenn nämlich n eine Pentagonalzahl $\tilde{\omega}_k$ mit ungeradem Index k ist, so ist $24n+1 = (6k-1)^2 = (12l \pm 5)^2$; es muss daher die halbe Summe der Exponenten jener Primzahlen in $24n+1$, welche die Form $12t \pm 5$ haben, ungerade sein, weil sonst $24n+1$ die Form $(12s \pm 1)^2$ hätte; und anderseits hat die zweite dieser Bedingungen die erstere zur Folge.

Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme

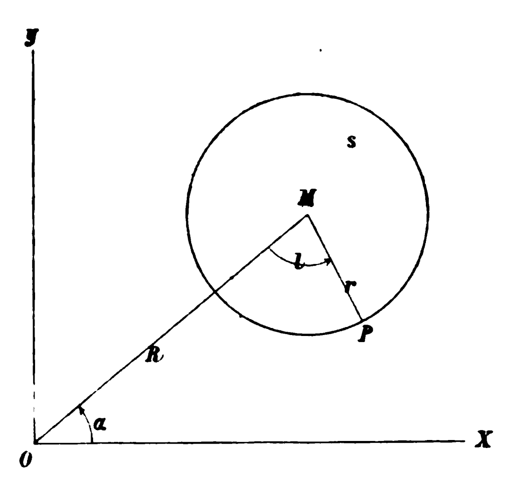
von

Fritz Hasenoehrl.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1896.)

1. Sei O ein im Raume fest gegebener Punkt. An demselben sei eine massenlose, absolut starre Stange OM so befestigt, dass sich letztere um O reibungslos in der Ebene der Zeichnung drehen kann. An dem anderen Ende der Stange, in M,



befinde sich eine kreisförmige Scheibe s, welche um diesen Punkt ebenfalls reibungslos in der Ebene der Zeichnung drehbar sei. Die momentane Lage der Stange OM sei durch den Winkel α gegeben, welchen sie mit einer fixen Geraden OX bildet, während ein Punkt P an der Peripherie der Scheibe

durch den Winkel $OMP = l$ definirt sein soll. Ferner sei

$$OM = R; \quad MP = r; \quad \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}; \quad \frac{dl}{dt} = \dot{l}.$$

Und zwar soll der positive Sinn dieser Drehungen für ein oberhalb der Zeichenebene befindliches Auge dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt sein.

Die Scheibe s sei im Innern massenlos; bloss an ihrer Peripherie sei die Masse m gleichmässig mit der Liniendichte σ vertheilt, dass also $m = 2r\pi\sigma$.

2. Wir wollen nun die lebendige Kraft dieser Masse berechnen. Die rechtwinkeligen Coordinaten des Punktes P sind

$$x = R\cos\alpha - r\cos(\alpha + l),$$

$$y = R\sin\alpha - r\sin(\alpha + l);$$

daher ist das Quadrat der Geschwindigkeit von P

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = R^2\dot{\alpha}^2 + r^2(\dot{\alpha} + \dot{l})^2 - 2Rr\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + \dot{l})\cos l.$$

Im Punkte P befindet sich das Massenelement $r\sigma dl$; die lebendige Kraft desselben ist $\frac{1}{2} v^2 r\sigma dl$. Daher ist die lebendige Kraft der ganzen Scheibe

$$T = \frac{1}{2} r\sigma \int_0^{2\pi} v^2 dl,$$

$$= \frac{1}{2} r\sigma [2\pi R^2\dot{\alpha}^2 + 2\pi r^2(\dot{\alpha} + \dot{l})^2]$$

(da ja $\dot{\alpha}$ und $\dot{l}$ für alle Punkte der Scheibe denselben Werth haben) oder

$$T = \frac{m}{2} [R^2\dot{\alpha}^2 + 2\pi r^2(\dot{\alpha} + \dot{l})^2] \tag{1}$$

— und aus diesem Ausdruck erkennen wir sofort, dass wir es mit einer cyklischen Bewegung zu thun haben, was übrigens von vorneherein klar ist.

3. Wir wenden nun die Lagrange'schen Gleichungen an und erhalten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m R^2 \ddot{\alpha} + m r^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{l}).$$

Dieser Ausdruck gibt negativ genommen die Kraft, welche das System scheinbar auf α ausübt. Sie kann als Quotient $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$ definirt werden, wobei δA die Arbeit ist, die bei Vergrösserung von α um $\delta\alpha$ geleistet wird. Nehmen wir aber an, dass der Veränderung von α weder äussere Kräfte, noch etwa Bewegungshindernisse entgegenwirken, so ist $\delta A = 0$, und daher auch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m R^2 \ddot{\alpha} + m r^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{l}) = 0,$$

daraus

$$\ddot{\alpha} = -\frac{r^2}{R^2 + r^2} \cdot \ddot{l}$$

und wenn wir nach t integriren

$$\dot{\alpha} = -\frac{r^2}{R^2 + r^2} \cdot \dot{l} + \text{Const.}$$

Wir können die Constante gleich Null setzen, wenn wir voraussetzen, dass zur Zeit $t = -\infty$, $\dot{l} = \dot{\alpha} = 0$ war und dass seither niemals äussere Kräfte auf α gewirkt haben.

Setzen wir nun zur Kürze $\frac{r^2}{R^2 + r^2} = c$ und setzen den Werth $\dot{\alpha} = -c\dot{l}$ in den Ausdruck für die lebendige Kraft (1) ein, so erhalten wir:

$$T = \frac{m}{2}[R^2 c^2 \dot{l}^2 + r^2 (\dot{l} - c\dot{l})^2]$$

$$= \frac{1}{2} A . \dot{l}^2,$$

wenn wir zur Kürze

$$m \frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2} = A$$

setzen.

Die Kraft, welche die cyklische Bewegung von l antreibt, ist dann

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = \frac{d}{dt}(A\dot{l}) = A\ddot{l}.$$

Natürlich könnten wir auch hier leicht Gegenkräfte der Bewegungshindernisse einführen, die sowohl $\dot{l}$ als auch l proportional sein können. Dann hätten wir

$$L = A\ddot{l} + \omega\dot{l} + \vartheta l$$

(Analogie mit einem elektrischen Stromkreise).

4. Die gegebene Anordnung lässt sich nun leicht verallgemeinern. Statt der einen Stange, die im Punkte O drehbar befestigt ist, nehmen wir $(n+1)$ Stangen an, die jedoch untereinander fix verbunden sein sollen, so dass α für alle denselben Werth hat. Ferner soll wieder am Ende einer jeden Stange eine Scheibe drehbar befestigt sein. Und zwar sollen alle diese Stangen und Scheiben stets in der Ebene der Zeichnung liegen.

Die Grössen R_i, r_i, m_i, l_i sollen für jede einzelne Scheibe s_i dieselbe Bedeutung haben, wie früher die Grössen R, r, m, l.

Die lebendige Kraft des ganzen Systems ergibt sich jetzt durch Summirung des Ausdruckes (1) über alle Theile, respective Scheiben. Wir haben also jetzt

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i[R_i^2\dot{\alpha}^2 + r_i^2(\dot{\alpha}+\dot{l}_i)^2]. \tag{2}$$

Wenden wir jetzt wieder die Lagrange'schen Gleichungen an, so haben wir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \sum_{i=0}^{n} m_i[R_i^2\ddot{\alpha} + r_i^2(\ddot{\alpha}+\ddot{l}_i)].$$

Machen wir nun dieselben Voraussetzungen wie früher (Art. 3), so können wir diesen Ausdruck gleich Null setzen. Daraus erhalten wir dann

$$\ddot{\alpha}\sum_{i=0}^{n} m_i(R_i^2 + r_i^2) = -\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \ddot{l}_i.$$

Setzen wir nun zur Kürze

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (R_i^2 + r_i^2) = S,$$

so erhalten wir durch Integration

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{S} \cdot \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}$$

(die Integrationsconstante können wir aus denselben Gründen weglassen, wie früher).

Gleichung (2) können wir auch in folgender Form schreiben:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 . S + \dot{\alpha} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i^2,$$

wobei zur Kürze

$$S = \sum_{i=0}^{n} m_i (r_i^2 + R_i^2);$$

hierin setzen wir nun den Werth von $\dot{\alpha}$ ein und erhalten

$$T = \frac{1}{2S} \left[\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i \right]^2 - \frac{1}{S} \left[\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i^2$$

oder

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i^2 - \frac{1}{2S} \left[\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \dot{l}_i^2 \left[m_i r_i^2 - \frac{1}{S} m_i^2 r_i^4 \right] - \frac{1}{S} \sum_{i=0}^{n}{}' \sum_{k=0}^{n} m_i m_k \dot{l}_i \dot{l}_k r_i^2 r_k^2,$$

wobei das Symbol $\Sigma'\Sigma$ bedeutet, dass in der Doppelsumme die Glieder, wo $i = k$ ist, auszulassen sind.

Wir scheiden nun aus den Summen die Glieder, die $\dot{l}_0$ enthalten, aus und lassen zur Kürze den Index 0 einfach weg. Dann ist

$$T = \frac{1}{2}\dot{l}^2\left(mr^2 - \frac{1}{S}m^2r^4\right) - \dot{l}.\frac{1}{S}mr^2\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i + N,$$

wo N eine Grösse bedeutet, in der $\dot{l}$ ohne Index nicht mehr vorkommt. Setzen wir nun

$$mr^2 - \frac{1}{S}m^2r^4 = A$$

$$-\frac{mr^2}{S}\sum_{i=0}^{n} m_i r_2^2 \dot{l}_2 = J(s),$$

so erhalten wir

$$T = \frac{A}{2}\dot{l}^2 + \dot{l}.J(s) + N \tag{3}$$

(siehe Boltzmann, Vorles. I., S. 52, Gl. [25]).

Vielleicht ist es erlaubt, die Scheibe s, auf die sich die Grössen ohne Index beziehen, die »Aufscheibe« zu nennen. Ferner wollen wir $J(s)$ ihr Moment nennen.

Diese Grösse ist dann offenbar abhängig:

Erstens von der Lage (R_i), der Gestalt $(r_i,\ m_i)$ und der Drehungsgeschwindigkeit sämmtlicher anderen Scheiben.

Zweitens von der Lage und Gestalt der »Aufscheibe«, jedoch nicht von ihrer Drehungsgeschwindigkeit.

5. Die Gleichung (3) zeigt eine Analogie mit einer bekannten Grundgleichung des elektromagnetischen Feldes, wenn wir unter $\dot{l}$ statt einer Drehungsgeschwindigkeit eine Stromstärke verstehen.

Nun müssen wir uns klar werden, ob wir uns unter einer solchen Scheibe das Analogon eines Stromelementes oder eines geschlossenen Stromes o. dergl. vorstellen sollen. Dazu wollen wir unsere allgemeinen Betrachtungen auf ein System von zwei Scheiben s_1, s_2 beschränken. Dann ist die lebendige Kraft

$$T = \frac{1}{2}\dot{l}_1^2\left(m_1r_1^2 - \frac{m_1^2r_1^4}{m_1(r_1^2+R_1^2)+m_2(r_2^2+R_2^2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\dot{l}_2^2\left(m_2 r_2^2-\frac{m_2^2 r_2^4}{m_1(r_1^2+R_1^2)+m_2(r_2^2+R_2^2)}\right)-$$

$$-l_1 l_2 \frac{m_1 m_2 r_1^2 r_2^2}{m_1(r_1^2+R_1^2)+m_2(r_2^2+R_2^2)}.$$

Der wechselseitige Inductionscoëfficient ist hier wesentlich negativ — d. h. es wird eine Drehung inducirt, die der inducirenden gleichgerichtet ist.

Wir dürfen daher nicht etwa als Analogon der beiden Scheiben zwei parallele Stromelemente nehmen, sondern vielmehr zwei geschlossene Stromkreise, die in derselben Ebene nebeneinanderliegen.

Endlich verlohnt es sich vielleicht zu bemerken, dass bei diesem Polycykel die lebendige Kraft nicht stets integrirender Nenner des Differentials der zugeführten Arbeit ist.

Natürlich erhalten die Scheiben gegen ein fix im Raume gezogenes Coordinatensystem keine Drehung.

Über die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft

von

Prof. **Ludwig Boltzmann,**

w. M. k. Akad.

Ausser der Atomistik in ihrer heutigen Form ist noch eine zweite Methode in der theoretischen Physik üblich, nämlich die Darstellung eines möglichst eng begrenzten Thatsachengebietes durch Differentialgleichungen. Wir wollen sie die Phänomenologie auf mathematisch-physikalischer Grundlage nennen. Da dieselbe ein neues Bild der Thatsachen gibt und es selbstverständlich vortheilhaft ist, möglichst viele Bilder zu besitzen, so ist sie natürlich neben der Atomistik in deren heutiger Gestalt von hohem Werthe. Eine andere Phänomenologie, welche ich die energetische nennen möchte, wird später zur Sprache kommen. Man hat nun oft die Ansicht ausgesprochen, dass die nach der phänomenologischen Methode erhaltenen Bilder aus inneren Gründen den Vorzug vor denen der Atomistik verdienen.

Ich pflege solchen allgemein philosophischen Fragen aus dem Wege zu gehen, solange sie keine praktischen Consequenzen haben, da sie nicht so scharf gefasst werden können wie Specialfragen und daher ihre Beantwortung mehr Geschmackssache ist. Doch scheint es mir, als ob gegenwärtig die Atomistik aus dem oben angeführten, kaum stichhaltigen Grunde praktisch zurückgesetzt würde, und da glaubte ich, das Meine thun zu sollen, um den Schaden zu verhüten, der, wie ich glaube, der Wissenschaft daraus erwachsen könnte, wenn nun die Phänomenologie, wie früher die Atomistik, zum Dogma erhoben würde.

Um Missverständnisse zu vermeiden, will ich gleich zu Anfang die Beantwortung ganz bestimmter Fragen als den Zweck der folgenden Betrachtungen bezeichnen. Da der Nutzen, welchen die Atomistik in ihrer Entwicklung der Wissenschaft geleistet hat, von Niemandem bezweifelt wird, so können wir die Fragen so formuliren: Hat die Atomistik in ihrer gegenwärtigen Form nicht auch hohe Vorzüge vor der heute üblichen Phänomenologie? Ist irgend eine Wahrscheinlichkeit vorhanden, dass sich in absehbarer Zeit aus der Phänomenologie eine Theorie entwickeln könne, welche diese, gerade der Atomistik eigenthümlichen Vorzüge ebenfalls besitzt? Besteht nicht neben der Möglichkeit, dass die heutige Atomistik einmal verlassen werden wird, auch die, dass in ihr die Phänomenologie mehr und mehr aufgehen wird? Endlich wäre es nicht ein Schaden für die Wissenschaft, wenn man nicht noch heute die gegenwärtigen Anschauungen der Atomistik mit gleichem Eifer pflegte, wie die der Phänomenologie? Die Beantwortung dieser Fragen in dem der Atomistik günstigen Sinne bezeichne ich schon hier als das Resultat der folgenden Betrachtungen.

Die Differentialgleichungen der mathematisch-physikalischen Phänomenologie sind offenbar nichts als Regeln für die Bildung und Verbindung von Zahlen und geometrischen Begriffen, diese aber sind wieder nichts anderes als Gedankenbilder, aus denen die Erscheinungen vorhergesagt werden können.[1] Genau dasselbe gilt auch von den Vorstellungen der Atomistik, so dass ich in dieser Beziehung nicht den mindesten Unterschied zu erkennen vermag. Überhaupt scheint mir von einem umfassenden Thatsachengebiete niemals eine directe Beschreibung, stets nur ein Gedankenbild möglich. Man darf daher nicht mit Ostwald sagen, du sollst dir kein Bild machen, sondern nur, du sollst in dasselbe möglichst wenig willkürliches aufnehmen.

Die mathematisch-physikalische Phänomenologie verbindet manchesmal die Voranstellung der Gleichungen mit einer gewissen Geringschätzung der Atomistik. Ich glaube nun, dass

[1] Vergl. Principien der Wärmelehre, Leipzig, bei J. A. Barth, 1896, S. 363, von Mach, dessen einschlägige Schriften wesentlich zur Klärung meiner eigenen Weltanschauung beitrugen.

die Behauptung, die Differentialgleichungen giengen weniger über die Thatsachen hinaus, als die allgemeinste Form atomistischer Ansichten, auf einem Zirkelschlusse beruhen würde. Wenn man schon von vorneherein der Ansicht ist, dass unsere Wahrnehmungen durch das Bild eines Continuums dargestellt werden, dann gehen allerdings nicht die Differentialgleichungen, wohl aber die atomistischen Ansichten über die vorgefasste Ansicht hinaus. Ganz anders, wenn man atomistisch zu denken gewohnt ist; dann kehrt sich die Sache um und die Vorstellung des Continuums scheint über die Thatsachen hinauszugehen.

Analysiren wir z. B. einmal die Bedeutung der hiebei classischen Fourier'schen Wärmeleitungsgleichung! Dieselbe drückt nichts anderes aus, als eine aus zwei Theilen bestehende Regel:

1. Man denke sich im Inneren des Körpers (oder noch allgemeiner regelmässig angeordnet in einer entsprechend begrenzten dreidimensionalen Mannigfaltigkeit) zahlreiche kleine Dinge (nennen wir sie Elementarkörperchen), deren jedes zu Anfang eine beliebige Temperatur hat. Nach Verlauf einer sehr kleinen Zeit (respective bei einem kleinen Zuwachse einer vierten Variabeln) sei die Temperatur jedes Körperchens das arithmetische Mittel der Temperaturen, welche vorher die dasselbe unmittelbar umgebenden Körperchen hatten.[1] Nach einer zweiten gleich grossen Zeit hat man diesen Process zu wiederholen u. s. f.

2. Man denke sich sowohl die Elementarkörperchen als auch die Zeittheilchen immer kleiner und kleiner, ihre Anzahl im entsprechenden Verhältnisse immer grösser und grösser und bleibe bei jenen Temperaturwerthen stehen, wo die weitere Verkleinerung das Resultat nicht mehr merkbar beeinflusst.

Ebenso können bestimmte Integrale, welche die Lösung der Differentialgleichung darstellen, im Allgemeinen nur durch mechanische Quadraturen berechnet werden, erfordern also wieder zuerst eine Zerlegung in eine endliche Anzahl von Theilen.

Man glaube doch nicht, dass man sich durch das Wort Continuum oder das Hinschreiben einer Differentialgleichung

[1] Maxwell, treatise on electricity, 1873, vol. I, art. 29, Mach. l. c., S. 118.

auch einen klaren Begriff des Continuums verschafft habe! Bei näherem Zusehen ist die Differentialgleichung nur der Ausdruck dafür, dass man sich zuerst eine endliche Zahl zu denken hat; dies ist die erste Vorbedingung, dann erst muss die Zahl wachsen, bis ihr weiteres Wachsthum nicht mehr von Einfluss ist. Was nützt es, die Forderung, sich eine grosse Zahl von Einzelwesen zu denken, jetzt zu verschweigen, wenn man bei Erklärung der Differentialgleichung den durch dieselbe ausgedrückten Werth durch jene Forderung definirt hat? Man verzeihe den etwas banalen Ausdruck, wenn ich sage, dass derjenige, welcher die Atomistik durch Differentialgleichungen losgeworden zu sein glaubt, den Wald vor Bäumen nicht sieht. Eine Erklärung der Differentialgleichung durch complicirtere, geometrische oder andere physikalische Begriffe würde aber erst recht die Wärmeleitungsgleichung im Lichte einer Analogie, statt einer directen Beschreibung erscheinen lassen. Wir vermögen in Wirklichkeit die benachbarten Theile nicht zu unterscheiden. Ein Bild aber, in welchem wir von allem Anfange her die benachbarten Theile nicht unterscheiden, wäre verschwommen; wir könnten daran die vorgeschriebenen Rechnungsoperationen nicht vornehmen.

Erkläre ich also die Differentialgleichung oder eine Formel, die bestimmte Integrale enthält, für das zweckmässigste Bild, so gebe ich mich einer Illusion hin, wenn ich glaube, damit die atomistische Vorstellung aus meinem Gedankenbilde entfernt zu haben, ohne welche der Limitenbegriff sinnlos ist; ich mache dann vielmehr bloss die weitere Behauptung, dass, wie sehr auch die Beobachtungsmittel verfeinert werden mögen, niemals Unterschiede zwischen den Thatsachen und den Limitenwerthen beobachtbar sein werden.

Geht da nicht das Bild, welches eine sehr grosse, aber endliche Zahl von Elementarkörperchen voraussetzt, weniger über die Thatsachen hinaus? Hat sich nicht die Sache umgekehrt? Während früher die Annahme einer bestimmten Grösse der Atome als eine rohe, willkürlich über die Thatsachen hinausgehende Vorstellung galt, so erscheint sie jetzt gerade als die natürlichere, und die Behauptung, dass niemals Unterschiede zwischen den Thatsachen und den Limitenwerthen entdeckt

werden könnten, weil solche bis heute (vielleicht nicht einmal in allen Fällen) noch nicht entdeckt wurden, fügt dem Bilde etwas Neues, Unerwiesenes bei. Warum durch diese hinterher angeflickte Behauptung das Bild klarer, einfacher oder wahrscheinlicher werden sollte, ist mir unbegreiflich.[1] Die Atomistik scheint vom Begriffe des Continuums untrennbar. Offenbar gingen Laplace, Poisson, Cauchy etc. desshalb von atomistischen Betrachtungen aus, weil man sich damals noch klarer bewusst war, dass Differentialgleichungen nur Symbole für atomistische Vorstellungen sind und daher auch noch lebhafter das Bedürfniss empfand, letztere einfach zu gestalten.

Wie die Wärmeleitungsgleichung so können auch die Grundgleichungen der Elasticität allgemein nur gelöst werden, indem man sich zuerst eine endliche Zahl von Elementarkörperchen denkt, welche nach gewissen einfachen Gesetzen aufeinander wirken und dann wieder die Limite bei Vermehrung der Zahl derselben sucht. Diese Limite ist also wieder die eigentliche Definition der Grundgleichungen, und das Bild, welches von vorneherein eine grosse, aber endliche Zahl annimmt, erscheint abermals einfacher.

Wir können so, indem wir den betreffenden Atomen nur gerade soviele Eigenschaften beilegen, als nothwendig sind, um ein kleines Thatsachengebiet in der einfachsten Weise zu beschreiben, für jedes solche Thatsachengebiet eine besondere Atomistik erhalten,[2] welche zwar, wie mir scheint, ebensowenig

[1] Die Gesichtswahrnehmungen entsprechen der Erregung einer endlichen Zahl von Nervenfasern, werden also wahrscheinlich durch ein Mosaik besser dargestellt, als durch eine continuirliche Fläche. Ähnliches gilt auch von den übrigen Sinnesempfindungen. Ist es da nicht wahrscheinlich, dass auch die Modelle für Complexe von Wahrnehmungen besser aus discreten Theile zusammengesetzt werden?

[2] Wenn Hertz ehrlich ist, so kann er seiner Behauptung, dass ein gewisses System von Differentialgleichungen seine Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen ausmache, nur den Sinn beilegen, dass er sich diese Erscheinungen durch das Bild von zweierlei, den Raum dicht erfüllenden Gedankendingen darstellt, welche beide den Charakter von Vectoren haben und deren zeitliche Änderung, die sich aber jetzt auf Intensität und Richtung bezieht, wie bei der Wärmeleitung nur durch die unmittelbare Umgebung bedingt ist, aber in complicirterer, leicht anzugebender Weise

als das, was man gewöhnlich Atomistik nennt, eine directe Beschreibung, aber doch ein von Willkür möglichst freies Bild ist.

---

davon abhängt. Hiedurch ist eine atomistische Theorie des Elektromagnetismus gegeben, die möglichst wenig Willkürliches enthält. Die Forderung, diesen mechanisch zu erklären, fällt mit dem Bedürfnisse nach Beseitigung der Complicirtheit dieses Bildes und dessen Inhomogenität mit den in den übrigen Thatsachengebieten verwendeten Bildern zusammen, welche Inhomogenität Demjenigen freilich nicht auffällt, der bloss den Anblick der Differentialgleichungen vergleicht. Dieser Inhomogenität und der Wahrscheinlichkeit, dass es einfachere Bilder gibt, will man offenbar Ausdruck geben, wenn man sagt man weiss nicht, was Elektricität ist.

Die gewöhnlichen Gleichungen der Elasticitätslehre stellen, sobald darin noch die Verschiebungen u, v, w und die elastischen Kräfte $X_x, X_y \ldots$ enthalten sind, wenn man sich der Bedeutung des Limitenbegriffs entsinnt, ziemlich complicirte Regeln für die Veränderung der Coordinaten $x+u, y+v, z+w$ von gewöhnlichen Punkten und gleichzeitige Änderung von Vectoratomen dar. Auch die durch Elimination der elastischen Kräfte entstehenden Gleichungen bedürfen noch einiger Reductionen, um das übliche atomistische Bild der elastischen Erscheinungen zu liefern. Um letzteres zu erhalten, hat man also an den Gleichungen oder an den mit den Gleichungen identischen Bildern gewisse Zusammensetzungen und Zerlegungen vorgenommen, gerade wie man in der Mechanik die Kräfte zusammensetzt und zerlegt, um eine möglichst einfache Beschreibung zu erhalten.

Auch die Differentialquotienten nach der Zeit sprechen natürlich die Forderung aus, dass man in dem Bilde der Natur die Zeit zunächst in sehr kleine, endliche Zeittheile (Zeitatome) zerlegt denken muss. Lasse ich also die Vorstellung, dass niemals eine Abweichung von der Limite entdeckt werden könne, der sich das Bild bei immer kleiner werdenden Zeitatomen nähert, als durch die Erfahrung noch nicht erwiesen, fallen, so müsste ich mir vorstellen, dass schon die Gesetze der Mechanik des materiellen Punktes nur angenähert richtig sind. Bloss um eine Ahnung zu geben, wie verschiedenartig die Bilder gewählt werden können, will ich hier ein specielles Bild erwähnen. Man denkt sich im Raume (besser in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit) sehr viele sich berührende Kugeln. Die Anordnung derselben wechselt nach einem zu suchenden Gesetze A von einem Zeitatom zum anderen sehr wenig, aber um endliches. Die verschieden gestalteten Lücken zwischen den Kugeln treten an Stelle der Atome des alten Bildes, das Gesetz A ist so zu wählen, dass die zeitliche Änderung der Lücken ein Weltbild liefert. Wäre es möglich, ein solches Bild zu finden, welches umfassendere Übereinstimmung zeigt, als die gewöhnliche Atomistik, so wäre damit auch dessen Berechtigung erwiesen. Die Auffassung der Atome als materieller Punkte und der Kräfte als Functionen ihrer Entfernung ist also wohl eine provisorische, die aber in Ermanglung einer besseren, heute noch beizubehalten ist.

Die Phänomenologie versucht nun, alle diese speciellen Atomistiken ohne vorhergehende Vereinfachung derselben zu combiniren, um die wirklichen Thatsachen darzustellen, d. h. ihnen alle in diesen Atomistiken enthaltenen Vorstellungen anzupassen; allein da sie eine Unzahl von Begriffen, die je einem kleinen Erscheinungsgebiete entnommen sind und wenig zueinanderpassen, sowie eine Unzahl von Differentialgleichungen mitbringt, von denen jede, trotz mannigfaltiger Analogien, doch wieder viele Besonderheiten hat, so ist von vorneherein zu erwarten, dass sich die Darstellung sehr complicirt gestalten muss. In der That zeigt sich, dass schon ganz unübersichtliche und enorm complicirte Gleichungen nothwendig sind, wenn die Phänomenologie auch nur das Ineinandergreifen einiger weniger Erscheinungsgebiete bei noch immer nahe stationären Vorgängen darstellen will (elastische Deformation mit Erwärmung und Magnetisirung etc.). Auch muss man (z. B. wenn man die Dissociation der Gase nach Gibbs, die der Elektrolyte nach Planck darstellen will) doch wieder Hypothetisches, also über die Thatsachen Hinausgehendes einführen.

Dazu kommt noch der Umstand, dass alle Begriffe der Phänomenologie nahe stationären Erscheinungen entlehnt sind und bei turbulenter Bewegung nicht mehr Stich halten. So können wir die Temperatur eines ruhenden Körpers mittelst eines eingesenkten Thermometers definiren. Wenn sich der Körper als Ganzes bewegt, mag sich das Thermometer mitbewegen. Hat aber jedes Volumelement des Körpers eine verschiedene Bewegung, so wird die Definition gegenstandslos, und es ist wahrscheinlich oder doch möglich, dass sich dann die verschiedenen Energieformen (was Wärme, was sichtbare Bewegung ist etc.) nicht mehr scharf scheiden lassen.

Bedenkt man dies, sowie die Complication, welche die phänomenologischen Gleichungen schon in den wenigen Fällen annehmen, wo man das Ineinandergreifen mehrerer Erscheinungsgebiete darstellte, so wird man eine Ahnung von den Schwierigkeiten erhalten, beliebige turbulente, auch mit chemischen Umsetzungen verbundene Erscheinungen nach dieser Methode zu beschreiben, also ohne vorher die den einzelnen

Thatsachengebieten entsprechenden Atomistiken durch freilich willkürliche Vereinfachungen in bessere Übereinstimmung zu bringen.

Eine specielle Phänomenologie, welche ich die energetische (im weitesten Sinne) nennen will, hofft durch weitere Verfolgung des allen Erscheinungsgebieten Gemeinsamen die verschiedenen, den einzelnen Erscheinungsgebieten entsprechenden Atomistiken einander näher zu bringen. Zwei Gattungen solcher gemeinsamer Züge sind bekannt. Der ersten Gattung gehören gewisse allgemeine Sätze an, wie das Energie-, Entropieprincip etc., ich möchte sagen allgemeine Integralsätze, welche in allen Erscheinungsgebieten gelten. Die zweite Gattung besteht in Analogien, welche sich durch die verschiedensten Erscheinungsgebiete durchziehen können. Die letzteren haben ihren Grund oft nur in der Gleichheit der Form, welche gewisse Gleichungen bei einem gewissen Grade der Annäherung immer annehmen müssen, während in den feineren Details die Analogien oft aufzuhören scheinen. (Angenäherte Proportionalität kleiner Änderungen der Function mit denen des Argumentes, Übrigbleiben der ersten oder zweiten Differentialquotienten mit annähernd constanten Coëfficienten, Linearität bezüglich kleiner Grössen und daher Superposition. Auch die Analogien im Verhalten der verschiedenen Energieformen scheinen theilweise solche rein algebraische Gründe zu haben). Allein trotz der enormen Wichtigkeit der Integralsätze, wegen ihrer allgemeinen Giltigkeit und der daraus entspringenden hohen Sicherheit und der Analogien wegen der vielfachen Rechnungsvortheile und neuen Gesichtspunkte, welche sie bieten, liefern sowohl die Integralsätze, als auch die Analogien doch immer nur einen kleinen Theil des gesammten Thatsachenzusammenhanges, man musste daher selbst zur genauen Darstellung jedes einzelnen Erscheinungsgebietes noch so viele specielle Bilder hinzunehmen (Naturgeschichte des betreffenden Erscheinungsgebietes), dass, wie ich andernorts nachgewiesen zu haben glaube, bisher nicht einmal die eindeutige und umfassende Beschreibung eines einzigen Gebietes stationärer Erscheinungen nach dieser Methode gelang, geschweige denn eine Übersicht aller, sogar auch der turbulenten Phänomene. Die Frage, ob einmal auf

diesem Wege umfassende Naturbilder gelingen, hat daher vorläufig nur einen rein akademischen Werth.

Um dem letzteren Ziele näher zu kommen, sucht die heutige Atomistik schon die Fundamente der verschiedenen phänomenologischen Atomistiken einander anzupassen, indem sie die Eigenschaften der für die verschiedenen Thatsachengebiete erforderlichen Atome willkürlich so ergänzt und abändert, dass sie zur gleichzeitigen Darstellung vieler Gebiete taugen.[1] Sie zerlegt gewissermassen die Eigenschaften der für ein einzelnes Thatsachengebiet erforderlichen Atome so in Componenten (vgl. drei Seiten vorher in der Anmerkung), dass dieselben auf mehrere Thatsachengebiete passen. Dies ist selbstverständlich gerade so, wie die Zerlegung der Kräfte in Componenten nicht ohne eine gewisse, über die Thatsachen hinausgehende Willkürlichkeit möglich.[2] Allein sie erreicht dafür den

[1] Obige Darstellung will natürlich nicht sagen, dass die phänomenologischen Gleichungen immer zeitlich den Fortschritten der heutigen Atomistik vorangegangen seien. Die meisten phänomenologischen Gleichungen wurden vielmehr selbst durch Betrachtungen an specialisirten, einem anderen Erscheinungsgebiete (der Mechanik) entnommenen Atomen gewonnen und erhielten erst später durch Loslösung von diesen Betrachtungen den Charakter phänomenologischer Gleichungen. Dieser Umstand kann uns nicht wundern, da wir erkannt haben, dass der Sinn dieser Gleichungen in Wahrheit immer die Forderung atomistischer Bilder ist und er wird nur noch mehr zu Gunsten der Atomistik sprechen.

[2] Ein derartiger, dem Bilde der Atome willkürlich beigelegter Zug ist deren Unveränderlichkeit. Der Vorwurf, dass hier eine unberechtigte Verallgemeinerung der beobachteten, nur begrenzte Zeit dauernden Unveränderlichkeit der festen Körper vorliege, wäre sicher gerechtfertigt, sobald man, wie es wohl ehedem geschah, die Unveränderlichkeit der Atome a priori zu beweisen suchte. Wir nehmen sie aber bloss desshalb in unser Bild auf, damit dasselbe den Inbegriff möglichst vieler Erscheinungen darzustellen vermag, wie man den ersten Differentialquotienten nach der Zeit und die zweiten nach den Coordinaten desshalb in die Wärmeleitungsgleichung aufnimmt, damit sie auf die Thatsachen passt. Wir sind bereit, die Unveränderlichkeit in jenen Fällen fallen zu lassen, wo eine andere Annahme die Erscheinungen besser darstellen würde. So wären in der That die vier Seiten vorher in der Anmerkung erwähnten Vectoratome des Äthers nicht mit der Zeit unveränderlich.

Die Unveränderlichkeit der Atome gehört also zu jenen Vorstellungen, welche sich als sehr brauchbar erwiesen, obwohl die metaphysischen Betrachtungen, durch welche man dazu gelangte, einer vorurtheilslosen Kritik

Vortheil, dass sie ein einfaches und übersichtliches Bild einer weit grösseren Summe von Thatsachen zu geben vermag.

Während die Phänomenologie schon für die Mechanik der Schwerpunktsbewegungen und der starren Körper, für die Elasticität, Hydrodynamik etc. separate, unter sich wenig zusammenhängende Bilder braucht, ist die heutige Atomistik ein vollkommen zutreffendes Bild aller mechanischen Erscheinungen und es ist bei der Abgeschlossenheit dieses Gebietes kaum zu erwarten, dass auf demselben noch Erscheinungen entdeckt werden könnten, welche sich nicht in den Rahmen des Bildes fügen. Dieses umfasst ferner auch die Wärmeerscheinungen. Dass der letztere Umstand nicht so sicher nachgewiesen werden kann, liegt lediglich in der Schwierigkeit, welche die Berechnung der Molekularbewegungen bietet. Jedenfalls finden sich alle wesentlichen Thatsachen in den Zügen unseres Bildes wieder. Dieses erwies sich auch zur Darstellung der krystallographischen Thatsachen, der constanten Proportionen der Massen bei chemischen Verbindungen,[1] der chemischen Isomerien und der Beziehungen zwischen der Drehung der Polarisationsebene und der chemischen Constitution etc. äusserst nützlich.

Die Atomistik ist dabei noch grosser Weiterentwicklung fähig. Man kann sich unter den Atomen complicirtere, mit beliebigen Eigenschaften begabte Individuen denken, wie z. B. die Vectoratome, von denen wir fünf Seiten vorher in der Anmerkung

nicht Stand halten. Gerade wegen dieser vielfachen Brauchbarkeit muss man aber doch eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass sich die sogenannte strahlende Energie durch ähnliche Bilder wie die Materie darstellen lasse (dass der Lichtäther ein Stoff sei), zugeben.

[1] Keine chemische Verbindung entsteht momentan, jede pflanzt sich mit endlicher, wenn auch grosser Geschwindigkeit im Raume fort. Macht man daher von der obigen Analyse des Continuitätsbegriffes Gebrauch, so würde das Mach-Ostwald'sche Bild des Chemismus (Mach, l. c. S. 359) aussagen, dass immer *a* Elementarkörperchen des einen, *b* des anderen Stoffes verschwinden und dafür *c* eines neuen Stoffes zum Vorschein kommen. Der Unterschied zwischen dieser und den landläufigen Anschauungen der Chemie ist offenbar nicht mehr wesentlich. Daran würde nichts Wesentliches geändert, wenn erst die in bekannter Weise zu findende Limite die Thatsachen darstellen würde.

sahen, dass sie momentan die einfachste Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen liefern.[1]

Den der Phänomenologie noch ganz unzugänglichen, turbulenten Erscheinungen tritt nun die heutige Atomistik freilich mit bestimmten vorgefassten Meinungen entgegen; allein sie besitzt dafür werthvolle Fingerzeige, wie jene Erscheinungen wohl darstellbar sein dürften, ja kann sie in manchen Fällen geradezu voraussagen. So vermag die Gastheorie den Verlauf aller mechanischen und thermischen Erscheinungen in Gasen auch bei turbulenter Bewegung vorauszusagen und gibt so Anhaltspunkte, wie für diese Erscheinungen die Temperatur, der Druck etc. zu definiren sein werden. Gerade das aber ist die Hauptaufgabe der Wissenschaft, die zur Darstellung einer Reihe von Thatsachen dienenden Bilder so zu gestalten, dass daraus der Verlauf anderer ähnlicher vorhergesagt werden kann. Es versteht sich freilich, dass die Vorhersagung noch durch das Experiment geprüft werden muss. Wahrscheinlich wird sie sich nur theilweise bestätigen. Es ist dann Hoffnung vorhanden, die Bilder so abzuändern und zu vervollständigen, dass sie auch den neuen Thatsachen entsprechen. (Wir erfahren Neues über die Beschaffenheit der Atome).

Natürlich ist die Forderung berechtigt, dass man dem Bilde nicht mehr willkürliches (das möglichst allgemein zu halten ist) hinzufüge, als zur Beschreibung grösserer Erscheinungsgebiete unumgänglich nothwendig ist, dass man stets bereit

[1] Wenn man unter einer mechanischen Naturerklärung eine solche versteht, welche auf den Gesetzen der heutigen Mechanik beruht, so muss es als durchaus unsicher bezeichnet werden, dass die Atomistik der Zukunft eine mechanische Naturerklärung sein werde. Nur insoferne, als sie immer möglichst einfache Gesetze für die zeitliche Veränderung zahlreicher, in einer Mannigfaltigkeit von wohl drei Dimensionen vertheilter Einzeldinge wird angeben müssen, kann man sie jedenfalls im übertragenen Sinne als eine mechanische Theorie bezeichnen.

Sollte z. B. wirklich keine einfachere Beschreibung der elektromagnetischen Erscheinungen gefunden werden, so müsste man die oben im Texte besprochenen Vectoratome beibehalten. Ob man nun die Gesetze, nach denen sich diese mit der Zeit verändern, als mechanische bezeichnen will oder nicht, das dürfte vollkommen von unserem Belieben abhängen.

sei, das Bild abzuändern, ja die Möglichkeit im Auge behalte, einmal zu erkennen, dass an Stelle des Bildes besser ein ganz neues, grundverschiedenes treten müsse. Schon deshalb, weil dann die Construction des neuen Bildes auf Grund der unberührt gebliebenen Specialbilder der Phänomenologie geschehen müsste, sind auch diese neben der Atomistik sorgfältig zu pflegen.

Zum Schlusse möchte ich noch weiter gehend, mich fast bis zur Behauptung versteigen, dass es in der Natur des Bildes liege, dass dasselbe gewisse willkürliche Züge behufs der Abbildung beifügen muss und dass man strenge genommen jedesmal über die Erfahrung hinausgehe, sobald man aus einem gewissen Thatsachen angepassten Bilde auch nur auf eine einzige neue Thatsache schliesst. Ist es mathematisch gewiss, dass man nicht, um alle Thatsachen darzustellen, an Stelle der Fourier'schen Wärmeleitungsgleichung eine ganz andere setzen müsste, die sich gerade nur in den bisher beobachteten Fällen auf die Fourier'sche reducirt, so dass man bei der nächstbesten neuen Beobachtung sofort das Bild und in Folge dessen auch die Vorstellung über den Wärmeaustausch der kleinsten Theilchen total ändern müsste? Es könnten z. B. alle bisher untersuchten Körper zufällig gerade gewisse Regelmässigkeiten zeigen, bei deren Wegfall die Fourier'sche Gleichung falsch wird.

Ähnlich wie Fourier das Gesetz der specifischen Wärme und die Proportionalität des Wärmeaustausches zwischen zwei sich berührenden Körpern mit der Temperaturdifferenz, so überträgt die Gastheorie die allgemeinen Gesetze der Mechanik und die Thatsache, dass die Körper sich bei der Berührung verdrängen, in etwas grösserer Entfernung aber nicht mehr aufeinander wirken, auf die kleinsten Theilchen, die man, wie wir sehen, gar nicht entbehren kann, wenn man ausgedehnte Körper darstellen soll. Auch die Annahme, dass ein- und dieselben kleinsten Theilchen zur Darstellung des tropfbaren und gasförmigen Aggregatzustandes genügen, scheint mir bei der Continuität beider Aggregatzustände wohl begründet und entspricht allein der Forderung nach Einfachheit der Naturbeschreibung. Die Berechtigung der beiden letzteren Annahmen

zugegeben, können wir aber der Consequenz gar nicht entgehen, dass die kleinsten Theile in eine dem Auge unsichtbare relative Bewegung gerathen, welche sichtbare, lebendige Kraft verschluckt und deren Wahrnehmbarkeit durch gewisse Nerven sicher nicht unwahrscheinlich ist (specielle mechanische Wärmetheorie), sowie dass sie in sehr verdünnten Körpern meist nahe gerade Bahnen beschreiben (kinetische Gastheorie). Das Bild, durch welches wir die mechanischen Erscheinungen darstellen, würde durch Weglassen dieser Folgerungen nur complicirter, wenn nicht widersprechend. Die weitere Annahme, dass die Molecularbewegungen nicht aufhören, während erregte, sichtbare Bewegungen allmälig in Molecularbewegungen übergehen, ist ebenfalls den anerkannten mechanischen Gesetzen vollkommen conform.

Sämmtliche Folgerungen der speciellen mechanischen Wärmetheorie, sie mochten den disparatesten Gebieten angehören, wurden durch die Erfahrung bestätigt, ja ich möchte sagen, sie stimmten bis in ihre feinsten Nuancen merkwürdig mit dem Pulsschlage der Natur.[1]

[1] Unter Vielem erwähne ich da nur die Erklärung der drei Aggregatzustände und deren Übergänge ineinander, ferner die Übereinstimmung des Entropiebegriffes mit dem mathematischen Ausdrucke der Wahrscheinlichkeit oder Ungeordnetheit einer Bewegung. Die Behauptung, ein bewegtes System sehr vieler Körperchen strebe, von unbeobachtbar wenigen Ausnahmen abgesehen, einem Zustande zu, für den ein angebbarer mathematischer, die Wahrscheinlichkeit des Zustandes messender Ausdruck ein Maximum wird, scheint mir doch über den fast tautologischen, es strebe dem stabilsten Zustande zu, hinauszugehen. Übrigens vermuthet Mach (l. c. S. 381) mit Recht, dass ich bei Abfassung einer populären Rede über dieses Thema die von ihm citirten, das Streben nach Stabilität behandelnden Schriften nicht kannte, von denen alle bis auf eine erst Jahre nach meiner Rede, alle nach Publication derjenigen Abhandlungen erschienen sind, von denen jene Rede nur eine populäre Darstellung gibt.

Wenn das Energieprincip die einzige Begründung der speciellen mechanischen Wärmelehre und die Erklärung desselben ihr einziger Zweck wäre, dann wäre sie freilich nach der allgemeinen Erkenntniss desselbe überflüssig. Wir sahen aber, dass noch viele andere Gründe für sie sprechen und dass sie auch von zahlreichen anderen Erscheinungen ein Bild liefert.

Die Theorie der elektrischen Fluida war von vorneherein in ganz anderer Weise unnatürlich und wurde von zahlreichen Forschern seit jeher als eine provisorische erkannt.

Freilich sind die Fourier'schen Annahmen über die Wärmeleitung so ausserordentlich einfach und die Thatsachen, welche man aus denselben noch berechnen könnte, den schon durch die Beobachtung geprüften so conform, dass die Behauptung, Fourier's Annahme und seine Gleichung wären (als erste Annäherung) nicht absolut gewiss, vielleicht als Haarspalterei erscheint. Ich aber finde es nicht verwunderlich, dass man mit recht einfachen plausiblen Annahmen auskommt, sobald man das Thatsachengebiet so willkürlich beschränkt und dass dann auch bald die von den bestätigten Fällen wesentlich verschiedenen ausgehen.

Sollte es je gelingen, eine ebenso umfassende Theorie, wie die heutige Atomistik zu construiren, welche auf ebenso klarer und unanfechtbarer Grundlage beruht, wie die Fourier'sche Wärmeleitungstheorie, so wäre dies natürlich ein Ideal. Ob dies eher durch nachherige Vereinigung der vorher unvereinfachten phänomenologischen Gleichung oder dadurch möglich sein wird, dass die Anschauungen der heutigen Atomistik durch fortwährende Anpassung und stete Bestätigung durch die Erfahrung endlich der Evidenz der Fourier'schen Theorie sich assymptotisch nähern, scheint mir heute noch völlig unentschieden.[1] Denn wenn man auch die schon vor-

[1] Bedeutende Ausgestaltungen und weitere Anpassungen (vergl. Mach l. c. S. 380) werden aber bei beiden Theorien nothwendig sein.

Die Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{du}{dt} = k \Delta u$$

ist bei constantem k entschieden falsch. Dass sie bei veränderlichem k die Form

$$h \frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}\left(k \frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(k \frac{du}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(k \frac{du}{dz}\right)$$

annehmen müsse, ist kaum durch die Erfahrung genügend bestätigt. Die Rückwirkung der von der nicht stationären Wärmeleitung untrennbaren Compressionen und Dilatationen auf die Wärmevertheilung, die directe Wirkung der heissen Volumelemente auf andere entfernte durch Wärmestrahlung in einem diathermanen Körper (und wer weiss, ob nicht alle Körper für gewisse, natürlich auch Energie, also Wärme übertragende Strahlen diatherman sind) stellt sie gar nicht dar. Man sagt freilich, diese gehören nicht zur reinen Wärmeleitung; allein eine solche reine Wärmeleitung wäre wieder ein metaphysischer, hypostasirter Begriff.

liegenden Beobachtungen, wobei eine Molecularbewegung in tropfbaren Flüssigkeiten und Gasen direct beobachtet worden zu sein scheint, für nicht beweisend hält, so kann doch die Möglichkeit künftiger beweisender Beobachtungen nicht geläugnet werden. Ganz verfehlt scheint es mir daher, wenn man sicher behauptet, dass Bilder, wie die specielle mechanische Wärmetheorie oder die Atomtheorie des Chemismus und der Krystallisation, einmal aus der Wissenschaft verschwinden müssten. Es kann nur gefragt werden, ob die Übereilung, welche in der Cultivirung solcher Bilder liegt, oder die zu grosse Vorsicht, welche empfiehlt, sich derselben zu enthalten, für die Wissenschaft unvortheilhafter wäre.

Wieviel die Vorstellungen der Atomistik durch Förderung der Anschaulichkeit und Übersicht der Physik, Chemie und Krystallographie genützt haben, ist bekannt; dass sie besonders zur Zeit, als sie noch den Erscheinungen viel weniger als jetzt angepasst waren und mehr von metaphysischen Gesichtspunkten betrachtet wurden, auch hemmend wirkten und daher in einigen Fällen wie ein unnützer Ballast erscheinen, soll nicht geläugnet werden. Man wird, ohne die Übersicht aufzugeben, nichts von der Sicherheit verlieren, wenn man die Phänomenologie der möglichst sichergestellten Resultate strenge von den zur Zusammenfassung dienenden Hypothesen der Atomistik trennt und beide als gleich unentbehrlich mit gleichem Eifer fortentwickelt, aber nicht unter blosser einseitiger Beachtung der Vorzüge der Phänomenologie behauptet, dass diese jedenfalls einmal die heutige Atomistik verdrängen werde.

Wenn auch die Möglichkeit, die Bilder der Phänomenologie auf einem anderen Wege, als dem der heutigen Atomistik zu einer umfassenden Theorie zu vereinen, besteht, so ist doch Folgendes sicher:

1. Diese Theorie kann kein Inventar in dem Sinne sein, dass jede einzelne Thatsache mit einem besonderen Zeichen bezeichnet wäre; es wäre ja dann ebenso umständlich sich darin zurechtzufinden, als die Thatsachen alle zu erleben. Sie kann also, wie die heutige Atomistik, blos eine Anweisung sein, sich ein Weltbild zu construiren.

2. Will man sich keiner Illusion über die Bedeutung einer Differentialgleichung oder überhaupt einer continuirlich ausgedehnten Grösse hingeben, so kann man nicht in Zweifel sein, dass dieses Weltbild in seinem Wesen wieder ein atomistisches sein muss, d. h. eine Vorschrift sich die zeitlichen Veränderungen einer überaus grossen Anzahl von in einer Mannigfaltigkeit von wohl drei Dimensionen angeordneten Dingen nach bestimmten Regeln zu denken. Die Dinge können natürlich gleichartig oder von verschiedener Art, unveränderlich oder veränderlich sein. Das Bild könnte bei der Annahme einer grossen endlichen Zahl oder es könnte dessen Limite bei stets wachsender Zahl alle Erscheinungen richtig darstellen.

Denkt man sich ein allumfassendes Weltbild, in dem jeder Zug die Evidenz der Fourier'schen Wärmeleitungstheorie hat, möglich, so ist es noch unentschieden, ob es nach der phänomenologischen Methode oder durch stete Weiterbildung und erfahrungsmässige Bestätigung der Bilder der heutigen Atomistik leichter zu erreichen ist. Man könnte sich dann ebenso gut auch denken, dass es mehrere Weltbilder geben könnte, die alle die gleiche ideale Eigenschaft besässen.

XXIII. SITZUNG VOM 12. NOVEMBER 1896.

Herr Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung, betitelt: »Die Stromlinie beim Abfluss einer Flüssigkeit durch eine kleine Öffnung im Boden des Gefässes«.

Das w. M. Herr Prof. G. Ritter v. Escherich überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. O. Biermann an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, betitelt: »Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Dr. Richard Heller und Dr. Hermann v. Schrötter in Wien, betitelt: »Die Carina tracheae, ein Beitrag zur Kenntniss der Bifurcation der Luftröhre nebst vergleichend anatomischen Bemerkungen über den Bau derselben«.

Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische

von

Dr. **O. Biermann,**

Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

Ist durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ ein irreductibles, algebraisches Gebilde p^{ten} Ranges definirt und sind

$$I(x, y)_1, \ldots I(x, y)_p$$

irgend p zugehörige und von einander linear unabhängige Integrale erster Gattung, so müssen zwischen den Constanten der vorgegebenen Gleichung besondere Beziehungen bestehen, wenn es möglich sein soll, ein Integral erster Gattung

$$c_1 I(x, y)_1 + \ldots + c_p I(x, y)_p$$

in der Art auf ein elliptisches

$$\int \frac{d\xi}{\eta}$$

zurückzuführen, dass ξ und η, d. i. die Quadratwurzel aus einer ganzen rationalen Function dritten oder vierten Grades in ξ rational durch x und y darstellbar sind.

Diese Beziehungen sind zuerst von Herrn Weierstrass, und zwar in transcendenter Form, abgeleitet worden. Herr Königsberger theilte die von Herrn Weierstrass ermittelten Relationen für den Fall mit, dass $f(x, y) = 0$ ein hyperelliptisches Gebilde vom Range 2 darstellt,[1] und Frau Kowalewski

---

[1] Borchardt's J., Bd. 67, S. 72.

theilte nicht allein das auf ein beliebiges algebraisches Gebilde p^{ten} Ranges bezügliche Resultat mit, sondern auch den Gang des Beweises von Herrn Weierstrass.[1] Den ersten Beweis für das durch Herrn Königsberger mitgetheilte Resultat habe ich in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie[2] dadurch geliefert, dass ich die von Herrn Weierstrass herrührende Darstellung der zu einem hyperelliptischen Gebilde gehörenden Integrale erster Gattung durch Logarithmen eindeutiger, transcendenter und an keiner Stelle (x, y) verschwindender Functionen, der Primfunctionen, benützte.

Da ich seither bei anderem Anlasse in den Monatsheften für Mathematik und Physik (Jahrgang III) die Darstellung der zu einem allgemeinen, irreductiblen algebraischen Gebilde p^{ten} Ranges gehörigen Integrale erster und zweiter Gattung durch Logarithmen nicht verschwindender Primfunctionen angeben konnte, will ich nun auch den hierauf zu gründenden Beweis für die allgemeinen Weierstrass'schen Relationen entwickeln, der mir wegen seiner Einfachheit einer Veröffentlichung werth erscheint.

Doch sei es wegen eines in der Folge nöthigen Satzes über Primfunctionen, der an dem letztgenannten Orte noch nicht vorkommt, aber eine Verallgemeinerung eines Satzes ist, den ich in den Sitzungsberichten (l. c. S. 967) vorbrachte, gestattet, kurz von den Primfunctionen zu sprechen.

Wir können und wollen immer voraussetzen, dass das vorgelegte Gebilde $f(x, y) = 0$ im Unendlichen nicht verzweigt sei. Ist dann

$$H(x, y; x'y')$$

eine rationale Function $(p+1)^{ten}$ Grades, die an den $(p+1)$ von den singulären Stellen des Gebildes verschiedenen Stellen:

$$(c_1, d_1), \ldots (c_p, d_p) \text{ und } (x', y'),$$

deren letzte als beweglich betrachtet werden wird, je von der ersten Ordnung unendlich wird und an einer noch willkürlich wählbaren Stelle (x_0, y_0), die auch nicht mit einer singulären

[1] Acta mathematica, t. 4, 1884.

[2] 87. Bd., II. Abth., 1883, Mai-Heft, S. 978.

Stelle des Gebildes zusammenfalle, von der ersten Ordnung verschwindet, sind ferner die Integrale

$$\int g(x, y)_\alpha dx \qquad (\alpha = 1, \ldots p)$$

p linear unabhängige Integrale erster Gattung und sind die Integrale

$$\int g'(x, y)_\alpha dx \qquad (\alpha = 1, \ldots p),$$

von denen das angeschriebene einzig und allein an der Stelle (c_α, d_α) unendlich werde, und zwar wie die Function $(x-c_\alpha)^{-1}$, solche Integrale zweiter Gattung, dass die Beziehung besteht:

$$\frac{d}{dx} H(x, y; x', y') = \frac{d}{dx'} H(x', y'; x, y) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p} \{g'(x, y)_\alpha g(x', y')_\alpha - g(x, y)_\alpha g'(x', y')_\alpha\} \quad a)$$

so gelangt man folgendermassen zu den Primfunctionen. Man führe einen geschlossenen Weg (b) ein, der durch keine der Stellen (x_0, y_0) und (c_α, d_α) gehe, nenne die Werthe der über (b) erstreckten Integrale:

$$\int g(x', y')_\alpha dx' = 2\omega'_\alpha, \qquad \int g(x', y')_\alpha dx' = 2\eta'_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots p)$$

und erstrecke die durch

$$\int H(x, y; x', y') dx'$$

angezeigte Integration über denselben Weg (b), so ist durch dieses Integral eine Function $\Phi(x, y)$ definirt, deren Ableitung nach x zufolge der Beziehung (a) lautet:

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{p} (g'(x, y)_\alpha 2\omega'_\alpha - g(x, y)_\alpha 2\eta'_\alpha).$$

Die Function

$$e^{\Phi(x, y)} = E(x, y)$$

ist dann eine eindeutige transcendente nirgends verschwindende Primfunction, die an den Stellen (c_α, d_α) das durch die Formeln

$$E(x_t^\alpha, y_t^\alpha) = c_\alpha . e^{2\omega'_\alpha t^{-1}}(1 + t\mathfrak{P}_\alpha(t))\ ^* \qquad (\alpha = 1, \ldots p)$$

beschriebene Verhalten besitzt und wegen der Formel

$$H(x_0, y_0; x', y') = 0$$

an der Stelle (x_0, y_0) den Werth Eins hat.

Entsprechend den p Wegepaaren (a_β, b_β) eines vollständigen Normalquerschnittsystems kann man $2p$ Primfunctionen $E(x,y)_\beta$ und $E'(x,y)_\beta$ $(\beta = 1, 2, \ldots p)$ aufnehmen, die allenthalben regulären Verhaltens sind, ausser an den p Stellen (c_α, d_α), wo die Entwicklungen gelten:

$$E(x_t^\alpha, y_t^\alpha)_\beta = c_{\alpha\beta} e^{2\omega_{\alpha\beta} t^{-1}}(1 + t\mathfrak{P}_{\alpha\beta}(t)),$$
$$E'(x_t^\alpha, y_t^\alpha)_\beta = c'_{\alpha\beta} e^{2\omega'_{\alpha\beta} t^{-1}}(1 + t\mathfrak{P}'_{\alpha\beta}(t)),$$

wie man nach Einführung der constanten Werthdifferenzen der Integrale

$$\int g(x,y)_\alpha dx, \text{ beziehungsweise } \int g'(x,y)_\alpha dx$$

an dem linken und rechten Ufer der Querschnitte b_β und a_β, d. i.

$$-2\omega_{\alpha\beta} \text{ und } 2\omega'_{\alpha\beta}, \text{ beziehungsweise } -2\eta_{\alpha\beta} \text{ und } 2\eta'_{\alpha\beta}$$

auf Grund des Verhaltens der Integrale erster und zweiter Gattung unmittelbar sieht. Die Werthe von $E(x,y)_\beta$ und $E'(x,y)_\beta$ an der Stelle (x_0, y_0) sind Eins.

Da nun aber die früheren Werthdifferenzen $2\omega'_\alpha$ und $2\eta'_\alpha$ immer in der Form darstellbar sind:

$$2\omega'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} (-2m'_\beta \omega_{\alpha\beta} + 2m_\beta \omega'_{\alpha\beta})$$

$$2\eta'_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} (-2m'_\beta \eta_{\alpha\beta} + 2m_\beta \eta'_{\alpha\beta})$$

wo m_β und m'_β ganze Zahlen bezeichnen, so wird:

$$\frac{d\log E(x,y)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{p} \left\{ m_\beta \frac{d\log E'(x,y)_\beta}{dx} - m'_\beta \frac{d\log E(x,y)_\beta}{dx} \right\}$$

* x_t^α, y_t^α sind die Symbole für Ausdrücke $c_\alpha + t$ und $d_\alpha + t\mathfrak{P}_\alpha(t)$, welche die Umgebung des Gebildes von (c_α, d_α) darstellen.

und

$$E(x, y) = \prod_{\beta=1}^{p} \frac{E'(x, y)_{\beta}^{m_\beta}}{E(x, y)_{\beta}^{m'_\beta}},$$

d. h. jede Primfunction lässt sich als Product ganzzahliger Potenzen der $2p$ Primfunctionen $E(x,y)_\beta$ und $E'(x,y)_\beta$ darstellen (vergl. l. c. S. 967).

Auf Grund der Relationen zwischen den constanten Werthdifferenzen an den Querschnitten des Normalsystems folgen nun für die Integrale

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} g(x,y)_\alpha dx = I(x,y)_\alpha \text{ und } \int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} g'(x,y)_\alpha dx = I'(x,y)_\alpha$$

die Darstellungen

$$I(x,y)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log \prod_{\beta=1}^{p} \frac{E'(x,y)_\beta^{2\omega_{\alpha\beta}}}{E(x,y)_\beta^{2\omega'_{\alpha\beta}}},$$

$$I'(x,y)_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log \prod_{\beta=1}^{p} \frac{E'(x,y)_\beta^{2\tau_{\alpha\beta}}}{E(x,y)_\beta^{2\tau'_{\alpha\beta}}},$$

und das von der Stelle (x_0, y_0) bis (x, y) erstreckte Integral erster Gattung:

$$I(x, y) = \sum_{\gamma=1}^{p} c_\gamma I(x,y)_\gamma$$

nimmt an der Stelle (x, y) die durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i} \log \prod_{\beta=1}^{p} \frac{E'(x,y)_\beta^{2\omega_\beta}}{E(x,y)_\beta^{2\omega'_\beta}} + \sum_{\beta=1}^{p} (2\omega_\beta k'_\beta - 2\omega'_\beta k_\beta)$$

angegebenen Werthe an, wenn

$$2\omega_\beta = \sum_\gamma 2\omega_{\gamma\beta} c_\gamma, \quad 2\omega'_\beta = \sum_\gamma 2\omega'_{\gamma\beta} c_\gamma$$

und k_β, k'_β $(\beta = 1, 2, \ldots p)$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Soll nun ein Integral $I(x,y)$ erster Gattung und p^{ten} Ranges auf ein elliptisches erster Gattung zurückführbar sein, dessen Perioden $2\bar{\omega}$ und $2\bar{\omega}'$ heissen mögen und dessen Werthe mit Hilfe zweier Primfunctionen $\mathfrak{G}(\xi,\eta)$ und $\mathfrak{G}'(\xi,\eta)$ durch

$$\frac{1}{2\pi i}\log\frac{\mathfrak{G}'(\xi,\eta)^{2\bar{\omega}}}{\mathfrak{G}(\xi,\eta)^{2\bar{\omega}'}}+(2\bar{\omega}\mu'-2\bar{\omega}'\mu)$$

ausdrückbar sind, wo μ und μ' ganze Zahlen bezeichnen, so muss eine Gleichung von der Form

$$C\prod_{\beta=1}^{p}\frac{E'(x,y)_\beta^{2\omega_\beta}}{E(x,y)_\beta^{2\omega'_\beta}}=c\,\frac{\mathfrak{G}'(\xi,\eta)^{2\bar{\omega}}}{\mathfrak{G}(\xi,\eta)^{2\bar{\omega}'}}$$

bestehen, wo C und c Constante bedeuten. Wir müssen daher durch eine eindeutige, und zwar — wie es die Natur der Primfunctionen verlangt — rationale Transformation

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y)$$

von den Primfunctionen $\mathfrak{G}(\xi,\eta)$ und $\mathfrak{G}'(\xi,\eta)$ zu solchen Primfunctionen $\mathfrak{E}(x,y)$ und $\mathfrak{E}'(x,y)$ des Gebildes vom p^{ten} Range gelangen können, dass

$$c\,\frac{\mathfrak{E}'(x,y)^{2\bar{\omega}}}{\mathfrak{E}(x,y)^{2\bar{\omega}'}}$$

ein Ausdruck für das reducible Integral p^{ten} Ranges ist.

Die Formen für die neuen Primfunctionen lauten aber nach dem früheren Satze:

$$\mathfrak{E}(x,y)=\prod_\beta E'(x,y)_\beta^{n_\beta}E(x,y)_\beta^{m_\beta},$$

$$\mathfrak{E}'(x,y)=\prod_\beta E'(x,y)_\beta^{n'_\beta}E(x,y)_\beta^{m'_\beta},$$

daher ist nur auszudrücken, dass der Ausdruck:

$$c\prod_{\beta=1}^{p}\frac{E'(x,y)_\beta^{n'_\beta 2\bar{\omega}}E(x,y)_\beta^{m'_\beta 2\bar{\omega}}}{E'(x,y)_\beta^{n_\beta 2\bar{\omega}'}E(x,y)_\beta^{m_\beta 2\bar{\omega}'}}$$

ein Integral erster Gattung darstellt, also nirgends unendlich wird, d. h. es müssen die Entwicklungen um die singulären Stellen (c_α, d_α) der Primfunctionen $E_\mathfrak{z}$ und $E'_\mathfrak{z}$ so beschaffen sein, dass die Singularitäten aufgehoben werden; es müssen die p Relationen

$$2\bar{\omega}(n'_1\omega'_{\alpha 1}+\ldots+n'_p\omega'_{\alpha p}+m'_1\omega_{\alpha 1}+\ldots+m'_p\omega_{\alpha p})-$$
$$-2\bar{\omega}'(n_1\omega'_{\alpha 1}+\ldots+n_p\omega'_{\alpha p}+m_1\omega_{\alpha 1}+\ldots+m_p\omega_{\alpha p})=0$$
$$(\alpha=1,2,\ldots p)$$

bestehen. Doch diese Gleichungen erfordern, dass die folgenden $\frac{p(p-1)}{2}$ Determinanten verschwinden:

$$(n'_1\omega'_{\alpha 1}+\ldots+n'_p\omega'_{\alpha p}+m'_1\omega_{\alpha 1}+\ldots+m'_p\omega_{\alpha p})\,.$$
$$.\,(n_1\omega'_{\beta 1}+\ldots+n_p\omega'_{\beta p}+m_1\omega_{\beta 1}+\ldots+m_p\omega_{\beta p})$$
$$-(n_1\omega'_{\alpha 1}+\ldots+n_p\omega'_{\alpha p}+m_1\omega_{\alpha 1}+\ldots+m_p\omega_{\alpha p})\,.$$
$$.\,(n'_1\omega_{\beta 1}+\ldots+n'_p\omega_{\beta p}+m'_1\omega_{\beta 1}+\ldots+m'_p\omega_{\beta p})$$
$$(\alpha,\beta=1,2,\ldots p;\ \alpha\neq\beta)$$

Ist nun die Determinante

$$\Sigma\pm(\omega_{11},\ldots\omega_{pp})$$

mit (ω) und die dem Elemente $\omega_{\alpha\beta}$ zugehörende Unterdeterminante mit $(\omega)_{\alpha\beta}$ bezeichnet, und führt man die ϑ-Moduln

$$\tau_{\beta\gamma}=\tau_{\gamma\beta}=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\omega'_{\alpha\gamma}(\omega)_{\alpha\beta}}{(\omega)}$$

ein, worauf

$$\omega'_{\alpha\gamma}=\omega_{\alpha 1}\tau_{1\gamma}+\ldots+\omega_{\alpha p}\tau_{p\gamma}$$

wird, so lauten die letzten $\binom{p}{2}$ Relationen folgendermassen:

$$\Big(\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}(m'_\gamma+n'_1\tau_{\gamma 1}+\ldots+n'_p\tau_{\gamma p})\Big)\Big(\sum_\gamma\omega_{\beta\gamma}(m_\gamma+n_1\tau_{\gamma 1}+\ldots+n_p\tau_{\gamma p})\Big)-$$
$$-\Big(\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}(m_\gamma+n_1\tau_{\gamma 1}+\ldots+n_p\tau_{\gamma p})\Big)\Big(\sum_\gamma\omega_{\beta\gamma}(m'_\gamma+n'_1\tau_{\gamma 1}+\ldots+n'_p\tau_{\gamma p})\Big)=0$$

oder auch

$$\begin{vmatrix} \omega_{\alpha 1} & \omega_{\alpha 2} \\ \omega_{\beta 1} & \omega_{\beta 2} \end{vmatrix} T_1 + \begin{vmatrix} \omega_{\alpha 1} & \omega_{\alpha 3} \\ \omega_{\beta 1} & \omega_{\beta 3} \end{vmatrix} T_2 + \ldots + \begin{vmatrix} \omega_{\alpha, p-1} & \omega_{\alpha p} \\ \omega_{\beta, p-1} & \omega_{\beta p} \end{vmatrix} T_{\binom{p}{2}} = 0, \quad 2)$$

wenn

$$T_1 = (m'_1 + n'_1\tau_{11} + \ldots + n'_p\tau_{1p})(m_2 + n_1\tau_{21} + \ldots + n_p\tau_{2p}) -$$
$$- (m_1 + n_1\tau_{11} + \ldots + n_p\tau_{1p})(m'_2 + n'_1\tau_{21} + \ldots + n'_p\tau_{2p})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{\binom{p}{2}} = (m'_{p-1} + n'_1\tau_{p-1,1} + \ldots + n'_p\tau_{p-1,p})(m_p + n_1\tau_{p1} + \ldots + n_p\tau_{pp}) -$$
$$- (m_{p-1} + n'_1\tau_{p-1,1} + \ldots + n'_p\tau_{p-1,p})(m'_p + n'_1\tau_{p1} + \ldots + n'_p\tau_{pp})$$

ist.

Man erhält $\binom{p}{2}$ solcher Gleichungen wie (2), und da, wie sehr leicht zu sehen ist, die Determinante des in den Grössen T linearen Gleichungensystems den Werth

$$(\omega)^{p-1}$$

hat,[1] also nicht Null ist, so muss nothwendig

$$T_1 = 0, T_2 = 0, \ldots T_{\binom{p}{2}} = 0$$

sein und somit

$$\frac{m_1 + n_1\tau_{11} + \ldots + n_p\tau_{1p}}{m'_1 + n'_1\tau_{11} + \ldots + n'_p\tau_{1p}} = \frac{m_2 + n_1\tau_{21} + \ldots + n_p\tau_{2p}}{m'_2 + n'_1\tau_{21} + \ldots + n'_p\tau_{2p}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{m_p + n_1\tau_{p1} + \ldots + n_p\tau_{pp}}{m'_p + n'_1\tau_{p1} + \ldots + n'_p\tau_{pp}}$$

werden.

Diese Relationen sagen ebenso wie die voranstehenden nichts Anderes aus, als dass die Moduln der transformirten ϑ-Function:

$$\tau'_{1,2}, \tau'_{1,3}, \ldots \tau'_{1,p}$$

alle verschwinden; und das sind die Weierstrass'schen transcendenten Beziehungen, unter welchen ein Integral p^{ten} Ranges auf ein elliptisches zurückführbar ist.

[1] Was schon Herr Francke (Crelle J. 61, S. 350) bewiesen hat, wie in Baltzer's Lehrbuch zu finden ist.



Magnetisirung nach zwei Dimensionen und Hysteresis im Drehfelde

von

Prof. **August Grau** und Dr. **Richard Hiecke.**

(Mit 7 Tafeln und 12 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1896.)

Über den Gegenstand der vorliegenden Arbeit existiren nur wenige Abhandlungen. Die hauptsächlichsten derselben seien im Nachstehenden angeführt.

E. Villari[1] untersuchte Rohre von 80—90 *cm* Länge und 2—3 *cm* Durchmesser, welche transversal und longitudinal magnetisirt wurden. Ist ein transversal-magnetisches Residuum vorhanden, so wirken die ersten Stromschliessungen und Unterbrechungen des die Längsmagnetisirung erzeugenden Stromes wie starke mechanische Erschütterungen, und das Residuum der Transversalmagnetisirung nimmt stark ab.

Die weiteren Schliessungen und Unterbrechungen des Stromes lassen das Residuum der Transversalmagnetisirung um einen Mittelwerth schwanken.

Ist hingegen eine temporäre Transversalmagnetisirung durch den eine Längsspule durchfliessenden Strom hervorgerufen, vorhanden, so wirken die ersten Stromschliessungen und Öffnungen wieder wie eine Erschütterung und die Transversalmagnetisirung nimmt mehr oder weniger zu, je nachdem die Einwirkung der Längsspule schwächer oder stärker ist. Die weiteren Stromschliessungen und Öffnungen in der gewöhnlichen Spule bewirken eine Verminderung, respective Vermehrung der temporären Transversalmagnetisirung des Rohres.

---

[1] E. Villari, Einwirkung der Transversalmagnetisirung auf die gewöhnliche Magnetisirung von Eisen und Stahl. Mem. R. Acc. di Bologna, V, 3, 1893.

In gleicher Weise wird die Längsmagnetisirung durch die Transversalmagnetisirung beeinflusst.

Man wird sehen, dass diese Resultate durch unsere Untersuchungen, soweit sich dieselben auf dem gleichen Gebiete bewegen, bestätigt werden.

Gerosa und Finzi[1] setzten Eisen, Stahl und Nickelstäbe, welche von constantem oder wechselndem Strome durchflossen waren, Magnetfeldern von zu- und abnehmender Stärke aus und bestimmten mittelst eines Magnetometers die Magnetisirungsintensität.

Als Resultat dieser Untersuchungen ergab sich, dass ein constanter Strom, der in dem Stabe vom Nord- zum Südpol fliesst, die Stärke des durch das Magnetfeld hervorgebrachten Magnetismus vermindert.

Unterbrochene Ströme derselben Richtung steigern die Wirkung schwacher Felder und vermindern die stärkerer Felder.

Constante oder unterbrochene Ströme, welche vom Süd- zum Nordpol fliessen, unterstützen die Wirkung des Feldes.

Wechselströme steigern die Wirkung schwacher Felder bedeutend, gleichgiltig ob früher ein constanter oder unterbrochener Strom durch den Stab floss.

Bei grösserer Feldstärke erfolgt jedoch nur dann eine Steigerung, wenn dem Wechselstrome kein anderer vom Nord- zum Südpol fliessender Strom vorausgegangen war.

Der in dieser Abhandlung betonte Unterschied in der Wirkung bei Änderung der Stromrichtung dürfte wohl nur einer Zufälligkeit zuzuschreiben sein, etwa der Form des äusseren Stromkreises oder dergleichen.[2]

Besonders interessant für uns war eine Notiz im Electrician von F. G. Baily,[3] welcher die Hysteresis im rotirenden Feld durch die Torsion einer an der drehbaren Armatur befestigten Spiralfeder bestimmte, wenn die Feldmagnete rotirten.

---

1 G. G. Gerosa und G. Finzi. Über die Hysteresis der magnetischen Metalle. Rendic. R. Ist. Lomb. (2), 24, 1891.

2 Vergl. Anmerkung am Schlusse.

3 F. G. Baily. Über die Hysteresis von Eisen und Stahl in einem rotirenden Magnetfeld. Electrician 33, 1894.

Die erhaltenen Hysteresiscurven beginnen wie die in einem wechselnden Feld, steigen zuerst langsam, dann rascher an, erreichen ein Maximum und beugen sich dann über. Der Fall ist, soweit die Experimente angestellt worden sind, sehr rasch, zeigt kein Zeichen von Asymptotischwerden, sondern kehrt zur Nulllinie zurück.

Die drei Zustände der Molecularmagnete (nach Ewing) sind genau in den Hysteresiscurven wiedergegeben. Daraus folgert der Verfasser die Richtigkeit der Ewing'schen Theorie.

Eine ausführlichere Abhandlung sollte nach dieser Note in den Proceed. of Roy. Soc. erscheinen; wir wissen nicht, ob dies der Fall war, da uns diese Publication nicht zugänglich war.

Nachdem somit genaue Angaben über die Magnetisirung nach zwei Dimensionen fehlten, die beiden ersterwähnten Arbeiten überdies an Körpern vorgenommen wurden, welche nach beiden Richtungen verschiedene Verhältnisse zeigten, unternahmen wir es im Winter 1894/95 die einschlagenden Erscheinungen an einem Körper zu untersuchen, welcher nach allen in Betracht kommenden Richtungen dieselben Eigenschaften besass.

Damals war uns die im Electrician befindliche Notiz von F. G. Baily noch nicht bekannt.

Da die vorliegenden Untersuchungen sich zum Theil weiter erstrecken, zum Theil auch einen Vergleich mit den Hysteresisverlusten bei gewöhnlicher Magnetisirung nach einer einzigen Richtung ermöglichen, und auch noch mit Hilfe einer anderen Methode vorgenommen wurden, erachteten wir dieselben für mittheilenswerth.

Der untersuchte Körper war ein Cylinder aus Gusseisen vom 7 *cm* Durchmesser und 5 *cm* Höhe, in dessen Mantelfläche 56 Nuten, jede 2 *mm* breit und 3 *mm* tief, der Axe parallel, zur Aufnahme der Wicklung eingefräst waren.

Die in den Nuten liegenden Leiter bestanden aus 2·8 *mm* dicken, entsprechend flach geklopften, mit dünnem Pauspapier isolirten Kupferdrähten, die über den Basisflächen des Cylinders mittelst hochstehender Kupferblechstreifen von grösserem Querschnitt zu zwei aufeinander senkrechten, sonst vollkommen

congruenten Wicklungen von je 14 vollen Umgängen verbunden waren.

Die Wicklungen sind im Nachstehenden stets als Spule I und Spule II bezeichnet.

Der Widerstand der Spulen I und II betrug bei 11° C. 0·01396 respective 0·01394 Ω.

Das von der Spule I erzeugte magnetische Feld wird stets als Längsfeld, das von der Spule II herrührende stets als Querfeld bezeichnet werden.

Um eine möglichst hohe magnetische Induction zu erhalten, war auf dem Gusseisencylinder ein Ring aus Flusseissen heiss aufgezogen. Der Ring hatte eine axiale Höhe von 6 *cm* und einen Durchmesser von 29 *cm*.

Dieser Ring sollte ursprünglich aus Schmiedeeisen hergestellt werden und ein möglichst vollkommenes Schlussjoch bilden, so dass die Erscheinungen nur von der Magnetisirung des inneren Cylinders abhängig wären. Er hätte aber auch bei diesem zuletzt genannten Materiale dieser Absicht nicht entsprechen können, da die magnetische Induction von der Peripherie des Cylinders an nur etwa proportional dem Radius abnimmt. Der genannte Zweck wäre nur dann zu erreichen gewesen, wenn man die Höhe des Ringes wesentlich grösser als die des inneren Cylinders gewählt hätte.

Die bei einem Strome von 30 Ampère in jeder Spule erreichte magnetische Induction betrug rund 5000, bei 30 Ampère in einer Spule dagegen circa 4500 Kraftlinien pro Quadratcentimeter. Über diese Inductionswerthe hinaus bereitete die Erwärmung der Spulen den Messungen zu grosse Schwierigkeiten.

Mit diesem Eisenkörper wurden folgende Versuche vorgenommen.

Zuerst wurde die Änderung der in die Richtung des Längsfeldes fallenden Magnetisirungscomponente durch Umkehrung des Stromes in der Spule I beobachtet, wenn durch die Spule II ein constanter Strom floss, dessen Stärke zwischen 0 und 30 Ampère einschliesslich der Grenzen gewählt wurde. Dem Grenzfalle, Strom 0 in Spirale II, entspricht bekanntlich die gewöhnliche Aufnahme der Magnetisirungscurve.

In der zweiten Versuchsreihe wurden die magnetischen Erscheinungen untersucht, wenn beide Spulen von constanten Strömen verschiedener oder gleicher Stärke durchflossen waren, welche abwechselnd umgekehrt wurden. Dieser Vorgang entspricht einer sprungweisen Drehung der Feldrichtung.

In der dritten Reihe wurde die gewöhnliche Hysteresisfläche für Stromstärken in einer einzigen Spule aufgenommen.

In der vierten und letzten Versuchsreihe wurden die Stromstärken in den beiden Spulen in einer Weise abgeändert, welche einer möglichst continuirlichen Drehung des resultirenden Feldes gleichkam und die in die Richtung des Längsfeldes fallende Magnetisirungscomponente beobachtet. Da die Componente in der Richtung des Querfeldes vermöge der symmetrischen Anordnung die gleichen nur um 90° verschobenen Werthe erreichen musste, so war der magnetische Zustand des Gusseisencylinders bekannt. Die Drehung geschah in Stufen von 5 zu 5 Graden. Die voran angeführten Versuche erstreckten sich nur auf die Änderungen der temporären Magnetisirung und wurden alle Resultate durch Beobachtung des Inductionsstosses in Spule I gewonnen. Es wurde nämlich von vorneherein, um möglichst starke Dräthe in den Nuten des Eisenkörpers verwenden zu können, von der Anbringung einer secundären Wicklung auf dem Eisencylinder abgesehen.

Die Spule I wurde in den einen Zweig einer Wheatstone'schen Brückenanordnung geschaltet, deren übrige Zweige durch inductionslose Widerstände gebildet waren (Fig. 1). Die Anordnung war somit im Wesentlichen dieselbe wie sie Lord Raleigh zur Bestimmung der Selbstinduction verwendete.[1] Thatsächlich wurde in der ersten Versuchsreihe nur immer der Selbstinductionscoefficient der Spule I unter den verschiedenen Umständen bestimmt. Hiebei wurde in der Weise vorgegangen, dass die Compensation in der Brücke hergestellt, d. h. der Strom im Galvanometer gleich Null gemacht, hierauf der Strom in der Brückenanordnung rasch umgekehrt und der Ausschlag α der Galvanometernadel beobachtet wurde.

[1] Mascart-Joubert, Elektricität und Magnetismus II, S. 480.

Hierauf änderten wir bei constanter Stromstärke den Widerstand des einen Brückenzweiges um den Betrag δb

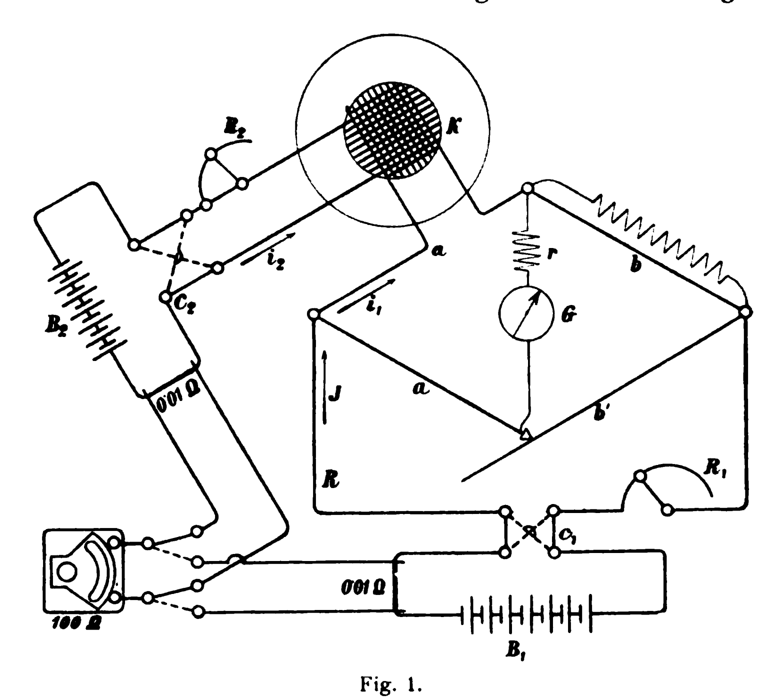


Fig. 1.

und beobachteten die zugehörige dauernde Galvanometerausweichung γ.

Ist L der gesuchte Selbstinductionscoëfficient, τ die Schwingungsdauer der Galvanometernadel, λ das logarithmische Decrement derselben, so findet man

$$L = \frac{\tau\, e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} \,.\, \alpha \,.\, \delta b}{\pi \,.\, \gamma \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}.$$

Hiebei ist α auf den Bogen und γ auf die Tangente des einfachen Winkels in bekannter Weise zu reduciren. Ist N die gesammte Kraftlinienzahl, welche das Innere der Spule durchsetzt, i der Strom und m die Windungszahl der Spule, so ist

$$L = \frac{N \,.\, m}{i}$$

und

$$N = \frac{\tau e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}} \alpha . i . \delta b}{\pi . m . \gamma \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}.$$

Die letztere Formel gilt auch dann, wenn der Inductionsstrom nicht durch eine Änderung des Stromes i, sondern anderweitig bewirkt wird.

Für i ist jener Werth zu setzen, bei welchem γ beobachtet worden ist.

An den beobachteten Ausschlägen γ und α sind in der Regel zweierlei Correctionen anzubringen. Kann nämlich bei der Beobachtung von γ die Widerstandsänderung δb gegen den Widerstand b selbst nicht als verschwindend klein betrachtet werden, so ist der Ausschlag γ dieser Änderung nicht mehr proportional.

Sind a, a', b, b' die Widerstände in den 4 Brückenzweigen, R der äussere und r der innere Widerstand der Brücke, ist ferner

$$\Delta = Rr(a+a'+b+b')+R(a+a')(b+b')+r(a+b)(a'+b')+$$
$$+aa'bb'\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right),$$

E die elektromotorische Kraft der Batterie und j der Strom in der Brücke, welcher jedenfalls γ proportional ist,[1] so ist

$$j = \frac{E . a'}{\Delta} \delta b.$$

Da in unserem Falle alle Widerstände bis auf r sehr gering waren, so kann man in der Formel für Δ die Glieder ohne r vernachlässigen und schreiben

$$\Delta = r[R(a+a'+b+b')+(a'+b')(a+b)].$$

Die percentuelle Änderung von Δ mit δb ist nun gleich

$$+\frac{100\delta b(R+a'+b')}{R(a+a'+b+b')+(a+b)(a'+b')}\ {}^0/_0.$$

[1] Mascart-Joubert, Elektricität und Magnetismus, III, S. 481.

In unserem Falle war nun stets bei Compensation $a+b = a'+b'$ und somit

$$R(a+a'+b+b')+(a+b)(a'+b') = 2(a+b)\left(R+\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= 2(a+b)\frac{E}{J}$$

und

$$R+a'+b' = \frac{E}{J}+\frac{a+b}{2},$$

worin J den Strom in R bedeutet.

Damit wird die percentuelle Correction von γ

$$+100.\delta b\left[\frac{1}{2(a+b)}+\frac{J}{4E}\right]\%.$$

Im Maximum betrug dieselbe bei unseren Versuchen $1 \cdot 25\%$. Da δb stets negativ gewählt wurde, war auch die Correction stets negativ. Eine Correction wegen der Veränderung von J mit δb wurde dadurch vermieden, dass der Strom J zugleich mit γ abgelesen wurde.

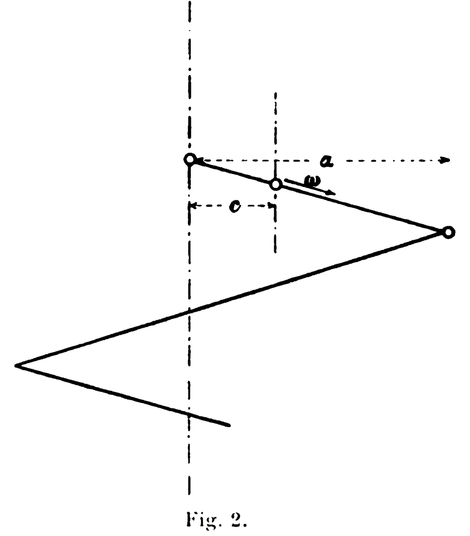


Fig. 2.

Die andere Correction, die an α angebracht werden musste, rührte davon her, dass bei den langsamen Schwingungen und der geringen Dämpfung des Galvanometers nicht die vollständige Compensation in der Brücke abgewartet werden konnte und man einen Fehler bis zu einigen Scalentheilen mitnehmen musste. Da die dadurch erforderliche Correction der Ausschläge auch für andere Untersuchungen mit ähnlichen Instrumenten von Wichtigkeit ist, möge die Berechnung derselben auch an dieser Stelle Erwähnung finden.

In dem Momente der Stromumkehrung in der Brücke ist als Ruhelage des Galvanometers für den eingeleiteten Bewegungsvorgang offenbar die Einstellung nach der Stromumkehrung anzusehen, während die dem Inductionsstoss entsprechende Geschwindigkeit ω der Nadel in der Einstellung vor der Stromunkehrung ertheilt wurde. Der Unterschied beider Einstellungen sei c (Fig. 2), der Galvanometerausschlag ganz allgemein x, λ das natürliche logarithmische Decrement und τ die Schwingungsdauer der gedämpften Nadel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch die Ruhelage, und endlich A eine Constante.

Dann gilt allgemein

$$x = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t} \sin \frac{\pi}{\tau}(t-t_0)$$

und

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\left[-\frac{\lambda}{\tau}\sin\frac{\pi}{\tau}(t-t_0)+\frac{\pi}{\tau}\cos\frac{\pi}{\tau}(t-t_0)\right] \qquad \ldots 1)$$

Die Zeit t werde vom Momente der Stromumkehr an gerechnet. Dann ist für $t = 0$

$$c = -A \sin\frac{\pi}{\tau} t_0,$$

$$\omega = A\left(\frac{\lambda}{\tau}\sin\frac{\pi}{\tau}t_0 + \frac{\pi}{\tau}\cos\frac{\pi}{\tau}t_0\right) \qquad \ldots 2)$$

Hierin ist t_0 die Zeit, zu welcher der Durchgang durch die Ruhelage erfolgen muss, damit zur Zeit $t = 0$ die Ausweichung c und die Geschwindigkeit ω erzielt werden. t_0 kann positiv oder negativ sein. Aus den Gleichungen 2) folgt weiter:

$$A\cos\frac{\pi}{\tau}t_0 = \frac{\omega\tau+\lambda c}{\pi}$$

$$A\sin\frac{\pi}{c}t_0 = -c \qquad \ldots 3)$$

Durch Einsetzung dieser Werthe gehen die Gleichungen 1) über in

$$x = e^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\left(\frac{\omega\tau+\lambda c}{\pi}\sin\frac{\pi}{\tau}t + c\cos\frac{\pi}{\tau}t\right) \quad \ldots 4a)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\frac{\lambda}{\tau}t}\cdot\frac{1}{\pi}\left[-\left\{\omega\lambda+\frac{c}{\tau}(\pi^2+\lambda^2)\right\}\sin\frac{\pi}{\tau}t+\omega\pi\cos\frac{\pi}{\tau}t\right] \ldots 4b)$$

Ist die äusserste Ausweichung erreicht, so ist $\frac{dx}{dt}=0$ und es ergibt sich für die Zeit t, zu welcher dies eintritt, die Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{\tau}t = \frac{\pi}{\lambda\left(1+\frac{c(\pi^2+\lambda^2)}{\omega\lambda\tau}\right)} \quad \ldots 5a)$$

und

$$\tau = \operatorname{arc.tg}\frac{\pi}{\lambda\left(1+\frac{c(\pi^2+\lambda^2)}{\omega\lambda\tau}\right)} \quad \ldots 5b)$$

Wäre bei Anwesenheit von Compensationsfehlern etc. die Geschwindigkeit ω in der genauen Ruhelage ertheilt worden, so hätte man den Ausschlag α erzielt und es gilt in diesem Falle die Beziehung

$$\omega = \frac{\alpha\pi}{\tau}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}\, e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\lambda}},$$

oder, wenn wir die Grösse

$$\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}}\, e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\lambda}} = F$$

setzen

$$\omega\tau = \alpha F\pi \quad \ldots 6)$$

Durch Substitution der Werthe für t aus den Gleichungen $5a)$ und $5b)$ in die Gleichung $4a)$ unter gleichzeitiger Berücksichtigung von 6) erhält man schliesslich, wenn mit $\bar{\alpha}$ der Maximalwerth von x bezeichnet wird

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha . F} = \frac{1+\frac{c}{\alpha F}\left[\frac{2\lambda}{\pi}+\frac{c}{\alpha F}\left(1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}\right)\right]}{e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\lambda\left(1+\frac{c}{\alpha F}\frac{\pi^2+\lambda^2}{\pi\lambda}\right)}}\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\pi^2}\left(1+\frac{c}{\alpha F}\frac{\pi^2+\lambda^2}{\pi\lambda}\right)^2}} \quad \ldots 7)$$

Ist nun c klein gegen α, so wird der Nenner sehr nahe gleich F, ferner verschwindet das Glied $\frac{c^2}{\alpha^2 F^2}$, und es bleibt nur

$$\bar{\alpha} - \alpha = \frac{c\,2\lambda}{\pi F} \qquad \ldots 8)$$

$\bar{\alpha}$ ist jedoch von der schliesslichen Ruhelage an gerechnet, also noch nicht der thatsächlich beobachtete Ausschlag; dieser ist $\alpha' = \bar{\alpha} - c$; somit ist

$$\alpha' - \alpha = c\left(\frac{2\lambda}{\pi F} - 1\right) \qquad \ldots 9)$$

Für die kleinen c genügt die Formel 9), für die grösseren wird man unter Annahme der Grösse $\frac{c}{\alpha F}$ die Werthe $\frac{\bar{\alpha}}{\alpha F}$, respective $\frac{\alpha'}{\alpha F}$ rechnen und eine Curve construiren, deren Abscisse $\frac{c}{\alpha'}$, deren Ordinate $\frac{\alpha}{\alpha'}$ sind.

Da es sich nur um Correctionsglieder handelt, so ist es nicht erforderlich, für jede kleine Änderung des λ eine neue Tabelle zu rechnen.

Weil die Galvanometereinstellung nach dem Ausschlage meistens erst nach Beruhigung der Nadel, also erst nach einiger Zeit erfolgte, so musste, wenn eine stetige Änderung der Compensation durch die Erwärmung der Widerstände stattfand, insbesondere dann zu einer anderen Berechnung geschritten werden, wenn die zu berechnenden Daten sich wie bei der Construction der Hysteresisfläche aus mehreren kleinen Ausschlägen summirten.

Dann wurde vor der Beobachtung von α zuerst die Galvanometereinstellung bei offenem Brückenzweige, hiernach die Einstellung unter dem Einflusse des restirenden Brückenstromes und dann erst der Ausschlag α' beobachtet.

Wenn i_1' der Batteriestrom in der Spule I vorher, i_1'' nachher und c' die Differenz beider oberwähnten Einstellungen ist, so ist $c = k(i_1'' - i_1') = k\Delta i_1$, $k = \frac{c'}{i'}$.

Nahm man eine periodisch wiederkehrende Veränderung der Ströme, wie bei der continuirlichen Drehung des Feldes vor, so konnte man von den Beobachtungen der Ruhelage bei offenem Galvanometerkreis absehen.

Bei diesen Versuchen war in Folge geänderter Anordnung ein Rest von Fernwirkung der stromführenden Leiter auf die Galvanometernadel vorhanden. Nachdem die absoluten Beträge der in den beiden Spulen I und II fliessenden Ströme i_1 und i_2 stets der Bedingung genügten $|i_1|+|i_2| = J$, so konnte die Fernwirkung in zwei Theile, in einem proportional i_1 und einem proportional J zerlegt werden. Der erste Theil konnte mit dem Einflusse des Compensationsfehlers, welcher ja ebenfalls proportional i_1 war, zusammengefasst werden. Trug man dann die Galvanometereinstellungen c'', die zwischen den Ausschlägen α stattfanden, in eine Curve auf, so konnte man aus derselben genau den Einfluss von i_1 und J ableiten. Dem Minimum von J entsprechen Spitzen, welche beim Zeichnen der c''-Curve berücksichtigt werden müssen.

Wurde als Ausgangsstellung der Galvanometernadel diejenige gewählt, welche beim Minimum von J und $i = 0$ eintrat, so konnte diese, da bei der Drehung des Feldes beide Bedingungen gleichzeitig eintreten, aus der Curve direct abgelesen werden (Fig. 7). War dies wegen Unbestimmtheit der Lage der Spitzen — in Folge schiefer Schnitte — nicht genau möglich, so befreite man die c''-Curve durch Addition oder Subtraction einer geeigneten, in jedem Punkte zu i_1 proportionalen Grösse zum grössten Theile von dem Einflusse dieses Stromes (Fig. 7, Curve c'''). Dann gelingt es leicht, die gewünschte Galvanometerruhelage für die Punkte $J =$ Min. und $i = 0$ zu construiren.

Diese Ruhelagen, welche sich während einer Versuchsreihe nur um Zehntel-Theile änderten, nimmt man nun zur Grundlage der Berechnungen von c'

$$c' = c'' - K(J - J\,\text{Min.}).$$

Die Constante K findet man als Durchschnittswerth aus der von i_1 befreiten Curve.

Schliesslich ist

$$c = k\Delta i_1 + K\Delta J.$$

Das verwendete ballistische Galvanometer besass einen cylindrischen, ziemlich schweren Magnet in einem veränderlichen Dämpfungskasten aus Kupfer. Die beiden Spulen waren auf rechteckigen Rahmen über die Dämpfungsdose geschoben.

Die Ausschläge wurden im verdunkelten Raume objectiv auf einer 1 *m* vom Spiegel entfernten Scala ersichtlich gemacht.

Zur raschen Beruhigung der Schwingungen wurde in der nächsten Nähe des Instrumentes ein Solenoïd passend aufgestellt, durch welches mit Hilfe eines Siemens'schen Doppeltasters Ströme in der einen oder anderen Richtung gesendet werden konnten. Durch geeignete Wahl der Stromstärken gelang es, die Magnetnadel rasch und vollständig zur Ruhe zu bringen.

Den Galvanometerspulen von 0·712 Ω Widerstand konnten noch 1—10 Ω vorgeschaltet werden.

Die Schwingungsdauer τ betrug 6·7 Sternsecunden, das Brigg'sche logarithmische Decrement λ Brigg 0·06 bis 0·085, je nach dem vorgeschalteten Widerstande. Beide wurden vor und nach jeder Versuchsreihe und bei jeder Änderung des Galvanometerwiderstandes bestimmt.

Die Widerstände der Wheatstone'schen Brücke bestanden, abgesehen von der Magnetisirungsspule I aus Nickelin- und Constantanblechstreifen von $^1/_4$ *mm* Dicke und 50 *mm* Breite.

Die einzelnen Zweige hatten folgende Widerstände:

a .... 0·01396 Ω (Spule I)
a'........ 0·01396 Ω
b .... 0·01272 Ω
b'........ 0·01256 Ω.

Dem Widerstande b konnten Widerstände aus einem Edelmann'schen Stöpsel-Etalon parallel geschaltet und hiedurch die rohe Compensation herbeigeführt werden.

Die feinere Einstellung wurde durch Veränderung des Widerstandes a' bewirkt. Derselbe endigte in einem starken Kupferdraht, auf dem eine mit dem Zuleitungsdrahte verbundene Klemme verschoben und festgeklemmt werden konnte. Im

Edelmann-Etalon war in der Regel 1 Ω, zur Bestimmung von γ 0·2, 0·3, 0·4 Ω eingeschaltet. Die Widerstände waren nicht ganz genau justirt, so dass δb 0·0005505 Ω, respective 0·0003323 Ω und 0·0002223 Ω betrug.

Zur Stromlieferung standen zwei Accumulatorenbatterien, deren Elemente in Serie, gruppenweise und einzeln parallel geschaltet werden konnten, zur Verfügung. Aus der grösseren Accumulatorenbatterie, die aus 16 Elementen bestand, wurde

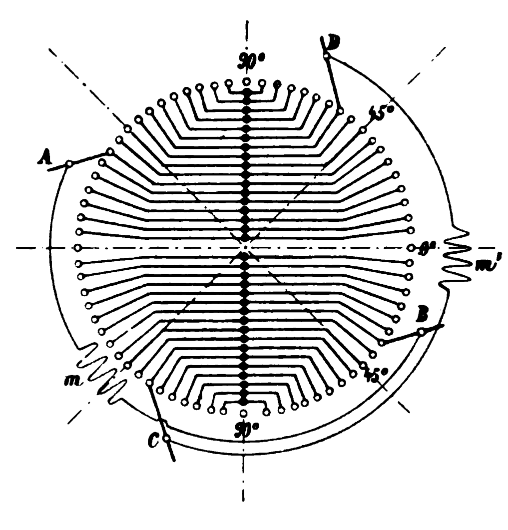


Fig. 3.

im Maximum ein Strom von 87 Ampère bei einer Spannung von 16 Volt entnommen.

Für die Drehung des Feldes wurde ein eigener Widerstandsapparat hergestellt, welcher dem Strom der grösseren Accumulatorenbatterie in zwei Theile zu spalten erlaubte, die den Bedingungen

$$i_1 = i_0 \sin \alpha \quad \text{und} \quad i_2 = i_0 \cos \alpha$$

genügten.

Die aus Nickelinblechstreifen von $^1/_4$ *mm* Dicke und 12 bis 40 *mm* Breite hergestellten Widerstände standen mit einem Collector aus 72 Kupferstäben in Verbindung; auf diesem

waren 4 durch ein Holzkreuz fest miteinander verbundene Bürsten verschiebbar, an welche die Enden der Zuleitungen zur Brücke mit Spule I und zur Spule II angeklemmt waren.

Hiebei war, um für beide Spulen gleiche Verhältnisse zu schaffen, zur Spule II ein gleicher Widerstand parallel geschaltet und durch Vorschaltung eines weiteren Widerstandsbleches

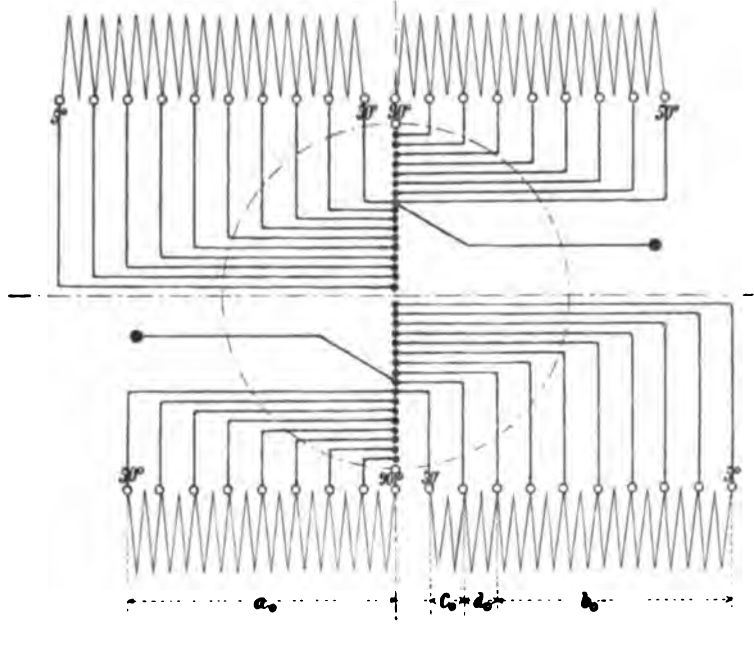


Fig. 4.

auch diese Anordnung auf denselben Widerstandswerth, wie die Brückendisposition gebracht.

Die Construction und Schaltung dieses Rheostaten ergibt sich aus den Figuren 3—6.

Fig. 3 stellt den Collector dar, dessen Kurpferstäbe durch starke Blechstreifen paarweise parallel geschaltet sind. Die vier auf dem Collector schleifenden Bürsten sind in der Figur mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet und die mit denselben in Verbindung stehenden Stromwege sind durch die betreffenden resultirenden Widerstände m und m' ersetzt.

In der Mitte der Parallelverbindungen zweigen die weiteren zu den Widerstandsblechen des Apparates führenden Verbindungen ab. Der Verlauf derselben ist in Fig. 4 skizzirt. An einem Punkte, der einem Drehungswinkel $\varepsilon = 50°$ entspricht, sind die Stromzuführungen angebracht, deren Enden in der Figur mit + und — bezeichnet sind. Man erkennt leicht, dass

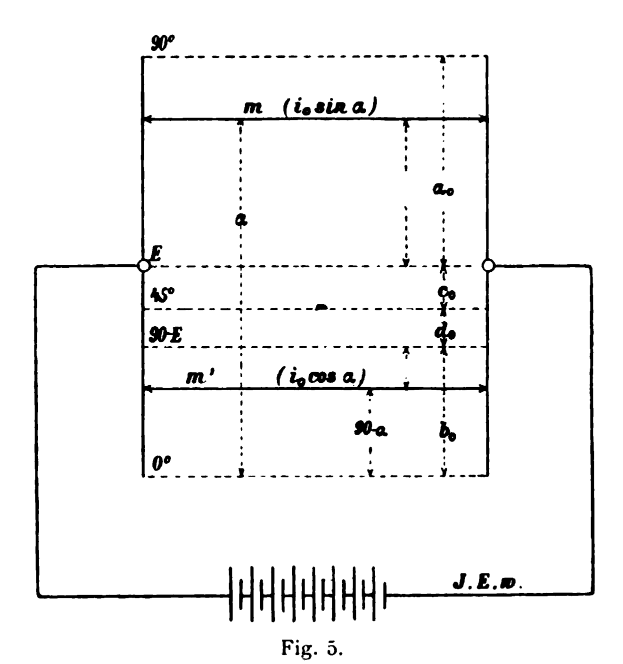


Fig. 5.

diese Anordnung dem Wesen nach mit der in Fig. 5 und 6 skizzirten Stromverzweigung identisch ist.

E. M. K., Stromstärke und Widerstand im Batteriekreise seien mit E, J und w bezeichnet.

Die in den Figuren eingetragenen Bezeichnungen $a, b, c, d, a_0, b_0, c_0, d_0$ bedeuten die Widerstandswerthe der durch die zugehörigen Pfeile begrenzten Leitertheile. $m = m'$ sind die Widerstände, in denen der sinusartig verlaufende Strom $i_0 \sin \alpha$ und $i_0 \cos \alpha$ gefordert wird.

Nach den Kirchhoff'schen Regeln ist $J = i_0 (\sin \alpha + \cos \alpha)$, somit weiter nach Fig. 5

$$w . i_0 (\sin \alpha + \cos \alpha) + 2 a\, i_0 \sin \alpha + m\, i_0 \sin \alpha = E$$

und

$$2a = \frac{\frac{E}{i_0} - (w+m)\sin\alpha - w\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \ldots 1)$$

ferner ist nach Fig. 6 ebenso

$$2c = \frac{\frac{E}{i_0} - (w+m)\sin\alpha - w\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} \qquad \ldots 2)$$

und

$$2(d+c_0) = m(\operatorname{tg}\alpha - 1) + 2c \qquad \ldots 3)$$

endlich wieder nach Fig. 5

$$(2a+m)i_0\sin\alpha = (2b+m+2c_0+2d_0)\,i_0\cos\alpha$$

und

$$2(b+c_0+d_0) = (2a+m)\operatorname{tg}\alpha - m \qquad \ldots 4)$$

Hat man nun, wie in unserem Falle, ε gewählt, so erhält man aus den obigen Gleichungen die für a_0, b_0, c_0, d_0, indem man in 1) $\alpha = 90°$, in 2) $\alpha = 45°$, in 3) $\alpha = 90° - \varepsilon$ und in 4) $\alpha = 0°$ setzt.

Mit Hülfe der obigen Gleichungen und des Werthes von ε kann man nun w und m bestimmen.

Für $\alpha = \varepsilon$ muss $2a$ und $2c = 0$ werden. Da der Nenner in den Gleichungen 1) und 2) — $\sin\varepsilon$ und $\sin\varepsilon + \cos\varepsilon$ — weder unendlich noch gleich Null ist, so muss dieser Bedingung durch den Zähler allein genügt werden, was in beiden Fällen dieselbe Gleichung gibt

$$\frac{E}{i_0} - (w+m)\sin\varepsilon - w\cos\varepsilon = 0 \qquad \ldots 5)$$

Für die Bestimmung von w und m ist jedoch noch eine weitere Gleichung erforderlich. Diese erhält man durch die Überlegung, dass sowohl a als c in dem Punkte ε ein Minimum besitzen müssen. Ist dieses Minimum, wie oben bereits verlangt, gleich Null, so kann dasselbe nur mehr vom Zähler

abhängen, da die Nenner stets endlich bleiben. Es genügt somit. den Differentialquotienten des Zählers in Gleichung 1) und 2)

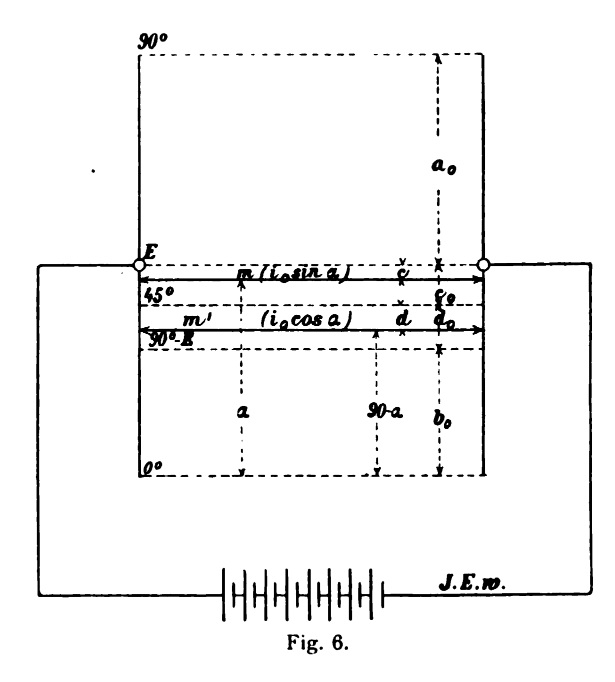


Fig. 6.

für $\alpha = \varepsilon$ gleich Null zu setzen. So erhält man die noch nothwendige Gleichung

$$w \sin \varepsilon - (w + m) \cos \varepsilon = 0 \qquad \ldots 6)$$

Aus 5) und 6) ergibt sich

$$\frac{m+w}{w} = \operatorname{tg} \varepsilon \qquad \ldots 7)$$

und

$$w = \frac{E}{i_0} \cos \varepsilon; \qquad m = \frac{E}{i_0} \sin \varepsilon - w \qquad \ldots 8)$$

Da m und w nur beide positiv sein können, so ist klar, dass ε zwischen 90° und 45° liegen muss und dass es ferner für jedes m und w ein geeignetes ε gibt.

In unserem Falle wurde $\varepsilon = 50°$, $E = 16$ Volt und $i_0 = 60$ A. angenommen.

Dann wird

$$w = 0 \cdot 17143\,\Omega, \qquad m = 0 \cdot 03288\,\Omega.$$

Die weiteren Widerstandsstufen sind in beistehender Tabelle angeführt.

α	Widerstand von $\varepsilon = 50°$ bis zu α, einseitig Ω	Bezeichnung
90°	0·03120	a_0
85	0·02421	
80	0·01814	
75	0·01293	
70	0·00856	a
65	0·00501	
60	0·00233	
55	0·00062	
50	0·00000	
45	0·00036	c_0 | c
40	0·00316	c_0+d | c_0+d
35	0·00792	
30	0·01608	
25	0·02956	
20	0·05223	$b+c_0+d_0$
15	0·09317	
10	0·17967	
5	0·44814	
0	∞	$b_0+c_0+d_0$

Das angestrebte Stromverhältniss war durch diesen Apparat nicht ganz genau erfüllt, doch wurde immerhin eine genügende Annäherung an eine continuirliche Felddrehung erreicht. Dieselbe fand in 72 Stufen von je 5° statt.

Die Ströme i_1 und i_2 wurden stets bei allen Versuchsreihen durch ein Westonvoltmeter mit 100 Ω Widerstand, welches einem Widerstande von 0·1 Ω oder 0·01 Ω parallel

geschaltet war, genau gemessen. Bei den Beobachtungen über die Drehung des Feldes wurde J durch obiges Voltmeter, und das Verhältniss von $i_1 : i_2$ durch ein an die Enden gleicher Widerstände in beiden Stromkreisen angeschlossenes Deprezgalvanometer mit Spiegelablesung bestimmt.

Vor jeder Versuchsreihe wurde der Eisenkörper durch kräftigen von der Centralstation der Internationalen Elektricitäts-Gesellschaft gelieferten Wechselstrom, der mit einem Flüssigkeitsrheostaten regulirt wurde und stets stärker als der stärkste, vorangegangene Magnetisirungsstrom war, entmagnetisirt. Die Manipulation war insoferne erfolgreich, als spätere Bestimmungen mit schwächeren Magnetisirungen sich in die Versuchsreihen gut einfügten.

Vor jedem einzelnen Versuche wurde durch öftere — bis 100 malige — Wiederholung des Vorganges dafür gesorgt, dass ein constanter Zustand des Eisenkörpers eintrat. Nur in ganz einzelnen Fällen wurden auch Anfangswerthe beobachtet.

Erste Versuchsreihe.

Es wurde schon im Vorstehenden erwähnt, dass in dieser Versuchsreihe die in der Axe der Spule I erzielte Magnetisirung bei Umkehrung des Stromes in dieser Spule untersucht wurde, während die Spule II von einem constanten Strom durchflossen war. Die Versuche haben somit am meisten Ähnlichkeit mit denjenigen von Gerosa und Finzi, sowie J. Klemenčič, bei welchen durch den Stab ein constanter, ununterbrochener Strom floss, während er längsmagnetisirenden Kräften ausgesetzt wurde.

Das Resultat ist auch im Allgemeinen dasselbe, nämlich eine Verminderung der Permeabilität in der Richtung der Axe der Spule I.

An den in der Tabelle I und den Curventafeln I und II dargestellten Resultaten sind jedoch einige Besonderheiten zu bemerken. Vor Allem ist es auffällig, dass die Verminderung der Permeabilität in der Nähe des Maximums von L (und damit auch von μ) am intensivsten ist. Am Anfange der Magnetisirungscurve sind schwächere Querfelder bis zu 10·0 A. fast ohne Einfluss, eine Erscheinung, die bereits Lord Raleigh bei Versuchen constatirte, in welchen das constante Magnetfeld

dieselbe Richtung hatte wie das unterbrochene. Der betreffende Satz in Ewing's »Magnetische Induction in Eisen und verwandten Metallen« S. 119 lautet: »So lange die constante Kraft verhältnissmässig schwach und die mittlere Magnetisirung in Folge dessen ebenfalls nicht sehr bedeutend ist, findet man,

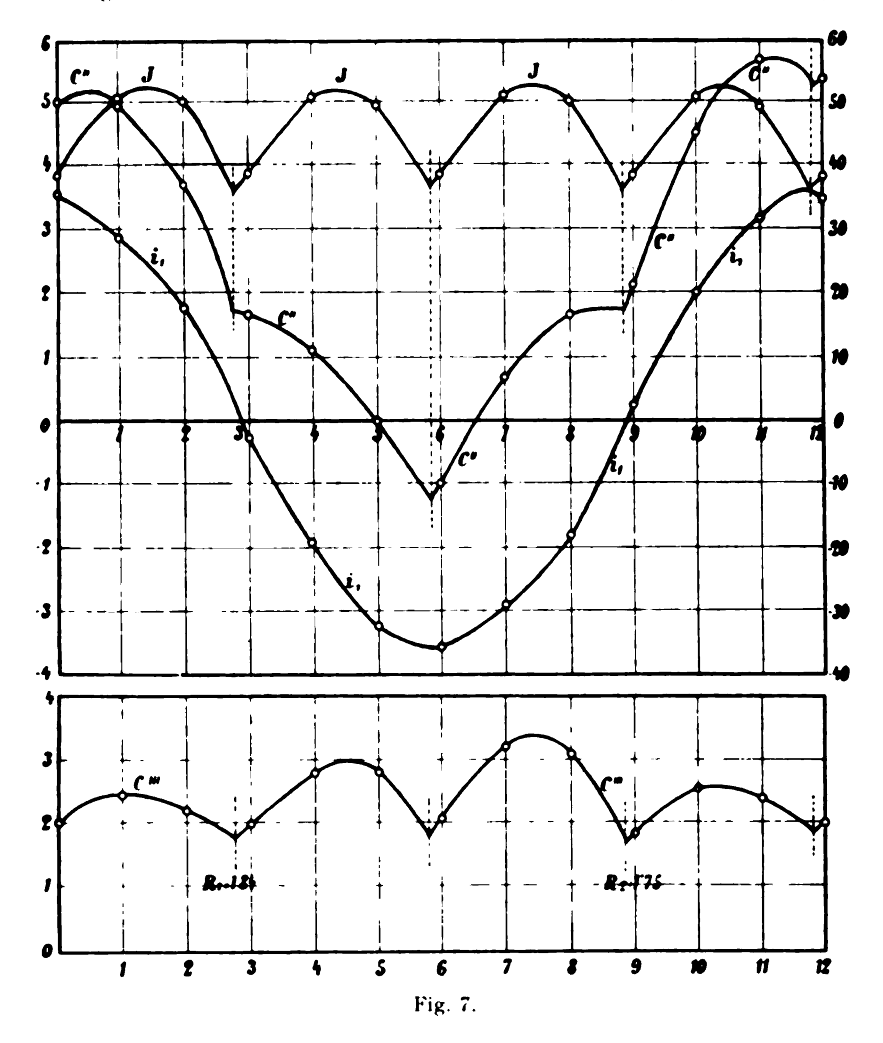


Fig. 7.

dass die Susceptibilität, die durch das abwechselnd erfolgende Entstehen und Verschwinden eines kleinen Theiles der Kraft hervorgerufen wird, nicht wesentlich von der anfänglichen

Susceptibilität für dasselbe, noch nicht magnetisirte Stück verschieden ist,«

Wir sehen auch folgerichtig unsere Curven bis $i_2 = 10$ A. gegen einen gemeinsamen Punkt auf der Ordinatenaxe convergiren. Erst das Querfeld von 31 A., welches eine Induction von über 4000 Kraftlinien pro Quadratcentimeter hervorbringt, stört diese Convergenz. Es scheint somit die Constanz der Susceptibilität für geringe magnetisirende Kräfte bei Querfeldern innerhalb weiterer Grenzen sich zu erhalten, als bei Feldern gleicher Richtung mit dem unterbrochenen (umgekehrten) schwachen Felde.

Im Weiteren ist aus den Curven ersichtlich, dass durch stärkere Querfelder das Maximum der Permeabilität in der Richtung der höheren Feldstärken verschoben erscheint.

Die Curven, welche hiefür am meisten charakteristisch sind, flachen sich auch bei stärkeren Querfeldern mehr und mehr ab, die Permeabilität wird kleiner und constanter. Dies letztere Resultat stand zu erwarten.

Bemerkenswerth ist auch, dass der Einfluss geringerer Querfelder bei stärkeren Längsfeldern fast verschwindet. Bei dem durch den Strom $i_2 = 3\cdot53$ A. erzeugten Querfelde ist von $i_1 = 20$ A. an ein Einfluss des Querfeldes überhaupt nicht bemerkar.

Zweite Versuchsreihe.

Bei dieser wurde von dem Stromwender C_2 (Fig. 1) Gebrauch gemacht. Nachdem die gewünschten Ströme in Spule I und Spule II eingestellt waren, wurde der Strom i_1 umgekehrt, hierauf i_2, dann wieder i_1 und endlich wieder i_2.

Hiemit war ein Cyclus vollendet, indem die Ströme in beiden Spulen wieder die anfängliche Richtung hatten. Das aus der Wirkung beider Spulen resultirende Feld H nahm dabei die in Fig. 8 angedeuteten vier Lagen ein. Schloss dasselbe mit der Axe der Spule I ursprünglich den Winkel φ ein, so war der Winkel mit dieser Axe nach dem Commutiren von i_1 gleich $180-\varphi$, nach dem Commutiren von i_2 gleich $180+\varphi$... etc.

Die resultirende Magnetisirung, die nach dem Commutiren von i_1 den Werth N_1 hatte und um den Winkel ε_1 hinter der entsprechenden Feldrichtung zurückblieb, nahm nach dem

Commutiren von i_2 den Werth N_2 an, der im Allgemeinen von N_1 verschieden war; der Verzögerungswinkel hatte ebenfalls einen anderen Werth ε_2.

Es konnten vorerst nur die Änderungen derjenigen Magnetisirungscomponenten beobachtet werden, welche in die Axe der mit dem Galvanometer nach Fig. 1 verbundenen Spule I fielen. Dieselben waren

a) beim Commutiren des Stromes i_1:

$$2X_1 = N_1 \cos(\varphi+\varepsilon_1)+N_2 \cos(\varphi-\varepsilon_2),$$

b) beim Commutiren von i_2:

$$2X_2 = N_2 \cos(\varphi-\varepsilon_2)-N_1 \cos(\varphi+\varepsilon_1).$$

Hierauf wurden die Stromstärken in beiden sonst identischen Spulen vertauscht, so dass nunmehr die mit dem

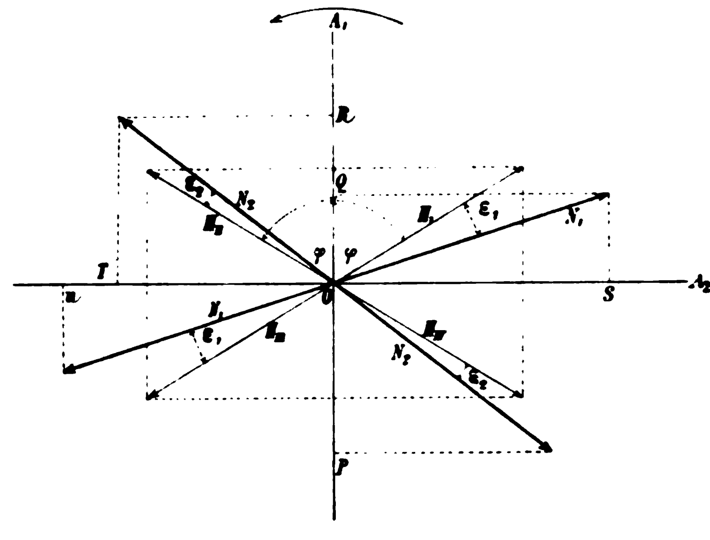


Fig. 8.

Galvanometer verbundene Spule I an die Stelle von Spule II trat. Bei diesen Versuchen ergaben sich die in die Axe der Spule II fallenden Componenten:

a) Beim Commutiren von i_1:

$$2Y_1 = N_1 \sin(\varphi+\varepsilon_1)-N_2 \sin(\varphi-\varepsilon_2).$$

b) Beim Commutiren von i_2:

$$2Y_2 = N_2 \sin(\varphi-\varepsilon_2)+N_1 \sin(\varphi+\varepsilon_1).$$

X_1, X_2, Y_1, Y_2 wurden aus den Galvanometerausschlägen nach den bereits angeführten Formeln berechnet. Die Werthe derselben sind in Tabelle II angeführt.

Dass ein Zurückbleiben der Magnetisirungs- gegenüber der Feldrichtung stattfand, beweisen die Zahlen für X_2 und Y_1; denn fiele die Feldrichtung stets mit der Magnetisirungsrichtung zusammen, so müssten X_2 und Y_1 stets gleich Null sein.

Aus den oben angeführten Gleichungen können, da $\operatorname{tg} \varphi = \frac{i_2}{i_1}$ ist, N_1, N_2, ε_1 und ε_2 berechnet werden. Die dafür erhaltenen Werthe sind in Tabelle III und den Curventafeln III und IV zusammengestellt. Aus diesen Zusammenstellungen ist ersichtlich, dass nach der Umkehrung des stärkeren Stromes die resultirende Magnetisirung schwächer und der Verzögerungswinkel kleiner ist als nach Umkehrung des schwächeren Stromes.

Sind die Ströme in beiden Spulen von gleicher Stärke, so sind natürlich auch $N_1 = N_2$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Die Curven für ε_1 haben innerhalb der Beobachtungsgrenzen stets vor diesem Punkte, die für ε_2 stets nach diesem Punkte ein auffälliges Maximum.

Die Curven für ε_1 steigen vom Nullpunkte an rapid, und zwar anfänglich fast geradlinig auf, während die Curven für ε_2 die Abscissenaxe im Nullpunkte als gemeinsame Tangente zu berühren scheinen.

Dieser Curvenverlauf liesse folgern, dass das Commutiren ganz schwacher Querfelder analog einer Erschütterung wirkt und nur die Erhöhung der nach dem Commutiren des starken Stromes vorhandenen Magnetisirung bewirkt, ohne deren Richtung merklich zu ändern. In diesem Falle wäre der Verzögerungswinkel gleich dem ganzen Winkel der Felddrehung durch die Umkehrung des schwachen Stromes, somit sehr nahe proportional der Stärke des letzteren. Dagegen wäre der Verzögerungswinkel nach der Umkehr des starken Stromes gleich oder sehr nahe gleich Null.

Der Verlauf der Curven für N_1 und N_2 scheint ebenfalls darauf hinzudeuten, dass die Umkehrung des schwächeren

Stromes immer zum Theile wie eine Erschütterung wirkt, da dieselbe eine Vermehrung der Magnetisirung zur Folge hat.

Aus der Curventafel IV ist noch ersichtlich, dass das Maximum von ε_1 oder ε_2 am höchsten wird, wenn es an eine Stelle fällt, an welcher ein resultirendes Feld von solcher Intensität vorhanden ist, dem bei der einfachen Magnetisirung das Maximum der Permeabilität entsprechen würde.

Ganz genau lässt sich dies aus den Curven nicht ablesen, da keine der einzelnen Beobachtungen dem erwähnten Falle genau entspricht, doch lässt der ganze Verlauf der Erscheinungen mit ziemlicher Sicherheit hierauf schliessen. Der gleichen Erscheinung werden wir später bei Ermittlung des Verzögerungswinkels bei möglichst continuirlicher Drehung eines constanten Feldes wieder begegnen.

Um constante Ausschläge zu erhalten, wurde die diesen Versuchen zu Grunde liegende Feldänderung vor Beginn der Beobachtungen oft wiederholt. Eine Versuchsreihe wurde in der Weise durchgeführt, dass zuerst i_2 dann i_1 geschlossen hierauf nur i_1 öfter umgekehrt wurde. Hierauf wurden die Beobachtungen der successiven Drehung in vorbeschriebener Weise begonnen.

Waren z. B. α_1 und α_2 die den Magnetisirungsänderungen X_1 und X_2 entsprechenden Ausschläge, so war der Reihe nach

$$\alpha_1 = 25\cdot 1$$
$$\alpha_2 = 15\cdot 3$$
$$\alpha_1 = 39\cdot 0$$
$$\alpha_2 = 14\cdot 6$$
$$\alpha_1 = 39\cdot 2$$
$$\alpha_2 = 14\cdot 3$$
$$\alpha_1 = 38\cdot 7$$
$$\alpha_2 = 14\cdot 5$$

Wie man sieht, stellt sich der stabile Zustand sehr rasch her; der erste Ausschlag α_1 ist jedoch sehr wesentlich kleiner als die folgenden. Das erste α_2 ist nur wenig grösser als die später sich ergebenden.

Setzt man voraus, dass die Verzögerungswinkel ε_1 und Magnetisirungen N_1 dieselben sind, wenn i_2 constant bleibt

und nur i_1 commutirt wird, oder wenn einer jeden Umkehrung von i_1 eine solche von i_2 vorausgieng, so müsste der erste Ausschlag $\bar{\alpha}_1$ sich zu den folgenden verhalten, wie

$$\bar{\alpha}_1 : \alpha_1 = 2N_1 \cos(\varphi+\varepsilon_1) : [N_1 \cos(\varphi+\varepsilon_1) + N_2 \cos(\varphi-\varepsilon_2)].$$

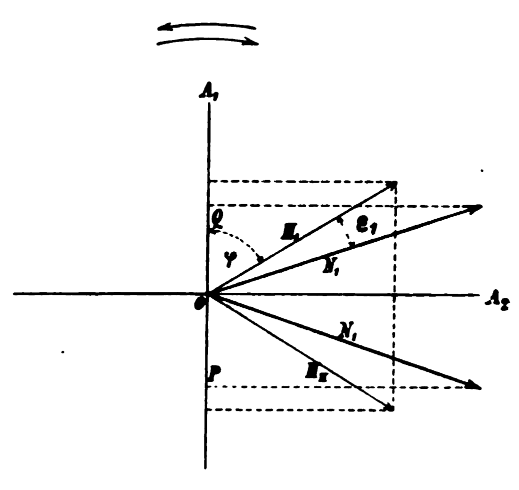


Fig. 9.

In diesem Falle war jedoch

$$2X_1 = N_1 \cos(\varphi+\varepsilon_1) + N_2 \cos(\varphi-\varepsilon_2) = 39.938,$$

$$2N_1 = 156.720, \qquad \varphi = 70° \; 18' \; 25'',$$

$$\varepsilon_1 = 10° \; 29' \; 17'', \qquad \varphi+\varepsilon = 80° \; 47' \; 42'':$$

somit

$$2N_1 \cos(\varphi+\varepsilon_1) = 25.070.$$

Man sieht hieraus, dass die Übereinstimmung eine sehr nahe ist und es scheint die oben ausgesprochene Vermuthung richtig zu sein.

Bei zwei weiteren Reihen wurden ebenfalls die Anfangsausschläge beobachtet und sind die Resultate aller drei Beobachtungsreihen in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

$i_2 = 11 \cdot 10$ Ampère.

i_1 in Ampère	$\bar{\alpha}_1$	α_1	$\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_2}$	$\frac{N_1 \cos(\varphi + \varepsilon_1)}{X_1}$	Differenz in %
3·98	25·1	38·9	0·645	0·628	—2·7
8·34	72·1	99·7	0·723	0·769	+6·4
11·93	66·0	80·9	0·816	0·843	+3·3

Da die Werthe für $\bar{\alpha}_1$ auf Beobachtung nur je eines einzigen Galvanometerausschlages beruhen, so ist die Übereinstimmung eine ganz befriedigende.

Ob diese Übereinstimmung des Verzögerungswinkels ε_1 und der Magnetisirung N_1 bei den geschilderten Feldänderungen im Allgemeinen stattfindet, kann wohl aus diesen wenigen Versuchen nicht mit Sicherheit geschlossen werden, erscheint aber immerhin wahrscheinlich, da gerade die vorliegenden Versuche in einem Gebiete liegen, welchem sehr grosse Verzögerungswinkel angehören.

Dritte Versuchsreihe.

In den nachstehend beschriebenen Versuchen wurde die Magnetisirungscurve bei stufenweiser Änderung der Stromstärke in Spule I von einem positiven bis zu einem negativen Maximum und zurück bestimmt. Die von einer derart aufgenommenen Curve eingeschlossene Fläche ist dem Arbeitsverluste durch Hysteresis proportional. Der mathematische Ausdruck für diesen Verlust pro 1 cm^3 Eisen ist

$$A = \int_k H dJ,$$

worin H die Feldintensität, welche längs des ganzen Eisenkörpers constant gedacht wird und J die Magnetisirungsintensität bezeichnet.

In unserem Falle konnte man H und J wegen der Form der Spulen und der Zusammensetzung des Eisenkörpers aus

zwei verschiedenen Theilen nicht sicher angeben. Dagegen konnte eine Formel für den Energieverlust durch Hysteresis aus der Windungszahl m der Spule, der Stromstärke i in derselben und der durch das Innere der Spule verlaufenden Kraftlinienzahl N aufgestellt werden.

Denkt man sich die Stromstärke i continuirlich in der vorbeschriebenen Weise geändert, so tritt in der Spule eine elektromotorische Gegenkraft e auf, welche durch die Gleichung

$$e = -m \frac{dN}{dt}$$

bestimmt ist.

Die von der Stromquelle, abgesehen von der Stromwärme, im Zeittheilchen dt geleistete Magnetisirungsarbeit ist somit

$$dA = i.e.dt$$

oder

$$dA = -imdN.$$

Hat die Stromstärke einen vollen Kreisprocess von einem positiven Maximum zu einem negativen und wieder zurück zum positiven durchlaufen, so ist die dabei aufgewendete Energie

$$A = -m \int_k idN.$$

Das $\int idN$ ist aber ebenso wie im gewöhnlichen Falle $\int HdJ$ die von der Magnetisirungscurve eingeschlossene Fläche, wenn man bei der Aufzeichnung derselben als Abscissen die Stromstärken i und als Ordinaten die Gesammtzahl der Kraftlinien aufträgt.

Diese Beobachtungsreihe bot grosse Schwierigkeiten dadurch, dass zu der Ungenauigkeit, welche die Summirung der zahlreichen kleinen Ausschläge des ballistischen Galvanometers an und für sich mit sich bringt, noch die durch die Änderung der Compensation in Folge der Erwärmung der Spule bedingten Fehler hinzukamen. Dieselben wurden möglichst dadurch eliminirt, dass sich eine Beobachtungsreihe stets über mehrere volle Cyclen erstreckte.

In Tabelle IV sind die Stromstärken und zugehörigen Magnetisirungen angeführt. Zur Ermittlung des Arbeitsverlustes wurden auf Grund dieser Tabelle auf Coordinatenpapier Curven gezeichnet, welche allen Beobachtungswerthen möglichst entsprachen und deren Fläche $\eta = \int_k i dN$ mittelst eines Planimeters bestimmt wurde.

Eine dieser Curven für die maximale Stromstärke $i = 29 \cdot 55$ Ampère ist zusammen mit einer Magnetisirungscurve bei continuirlicher Drehung in der Curventafel V abgebildet; die der gewöhnlichen Magnetisirungscurve angehörenden Beobachtungswerthe sind mit Kreuzchen eingetragen.

In der Tabelle VI sind die Werthe für $\eta = \int_k i dN$ zu finden; der Arbeitsverlust in Erg ergibt sich durch Multiplication dieser Zahlen mit der Windungszahl der Spule $m = 14$.

In der Curventafel VI erscheinen die mit Kreuzchen eingetragenen Werthe η zu einer Curve zusammengestellt, welche allerdings nicht ganz dem Gesetze folgt, dass die Hysteresisverluste proportional $B^{1 \cdot 6}$ oder $N^{1 \cdot 6}$ wachsen.

Diese Versuche geben, weil sie bekannte Erscheinungen verfolgen, zu keinen weiteren Bemerkungen Anlass und wurden nur durchgeführt, um einen Vergleich der Verluste bei Umkehr der Magnetisirung in einer Richtung und der nachfolgenden Versuchsreihe zu ermöglichen.

Vierte Versuchsreihe.

Die Beobachtungen dieser Reihe beziehen sich auf die Erscheinungen bei einer continuirlichen Felddrehung. Um eine solche moglichst genau zu erreichen, wurden mittelst des an früherer Stelle beschriebenen Widerstandsapparates die Ströme i_1 und i_2 in den beiden Spulen proportional dem $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ in Stufen von 5° geändert.

Das Kriterium für die Constanz des Feldes war dadurch gegeben, dass $i_1^2 + i_2^2 = i_0^2 =$ Const. sein musste. Diese Bedingung wurde allerdings nicht ganz erreicht; wie weit derselben entsprochen werden konnte, zeigt die nachstehende Tabelle

welche die aus i_1 und i_2 gerechneten Werthe von i_0 während der Beobachtungen mit dem stärksten Strome wiedergibt.

φ	i_0 in Ampère	φ	i_0 in Ampère	φ	i_0 in Ampère
5°	31·9	125°	30·0	240°	29·6
35	30·7	150	29·8	275	30·8
60	30·0	185	30·7	305	29·6
95	31·4	215	29·7	335	30·0

Bei dem stärksten Strome wurde eine Spannung von 16 Volt an der Batterie verwendet. Ausserdem wurden Beobachtungen mit 8, 4 und 2 Volt und proportional schwächerem Strome bei unveränderter Widerstandsanordnung vorgenommen.

Die Stromstärke $J = |i_1| + |i_2|$ wurde durch das an die Enden von 0·01 Ω angelegte Westonvoltmeter gemessen und das Verhältniss von $i_1 : i_2$ durch das Verhältniss der Ablenkungen eines graduirten Deprez-D'Arsonval-Galvanometer mit Spiegelablesung, das successive an die Enden zweier gleicher Widerstände in den beiden Stromzweigen angelegt wurde, bestimmt.

Die Bestimmung der übrigen Grössen geschah nach der bereits dargelegten, auch den früheren Beobachtungsreihen gemeinsamen Methode.

Bevor wir zu den erhaltenen Resultaten übergehen, sei zu der Berechnung derselben noch Folgendes angeführt.

Es lässt sich auch in diesem Falle der Hysteresisverlust ohne Kenntniss der Feldstärke und der Magnetisirungsintensität an allen Stellen des Eisenkörpers berechnen. Wir denken uns dazu wieder die Drehung des Feldes ganz langsam, aber continuirlich vollzogen.

Ist die Dauer eines ganzen Umlaufes T, so müssen die Ströme in beiden Spulen dem Gesetze gehorchen:

$$i_1 = i_0 \sin \frac{2\pi t}{T}; \qquad i_2 = i_0 \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Die Kraftlinienzahl ist offenbar constant N_0; der Winkel ε, um den dieselbe hinter der Feldrichtung zurückbleibt, ist ebenfalls während der ganzen Dauer der Drehung derselbe, da die Verhältnisse nach allen Azimuten im Eisenkörper dieselben sind. Die Magnetisirungscomponente, die durch die Spule I geht, ist demnach

$$X = N_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right),$$

die durch Spule II geht

$$Y = N_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right).$$

Wie bei der vorhergehenden Versuchsreihe ist dann der Arbeitsaufwand in beiden Spulen

$$A = \int_0^T (e_1 i_1 + e_2 i_2)\, dt,$$

worin e_1 und e_2 die durch die Änderungen der Magnetisirungscomponenten in beiden Spulen erzeugten elektromotorischen Kräfte sind. Es ist

$$e_1 = -m \frac{d}{dt}\left(N_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right)\right) = -\frac{2\pi m}{T} N_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right),$$

$$e_2 = -m \frac{d}{dt}\left(N_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right)\right) = +\frac{2\pi m}{T} N_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right)$$

und

$$A = \int_0^T (e_1 i_1 + e_2 i_2)\, dt =$$

$$= -\frac{2\pi m N_0 i_0}{T} \int_0^T \left[\sin\frac{2\pi t}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right) - \cos\frac{2\pi t}{T} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varepsilon\right)\right] dt.$$

Daher ist schliesslich

$$A = -2\pi m . N_0 i_0 \sin \varepsilon.$$

Wird N_0 und i_0 im $[c.g.s]$ angegeben, so ergibt sich unmittelbar der Energieverlust in Erg. Um den Hysteresisverlust bei einfacher Stromumkehrung und bei der Drehung zu ver-

gleichen, hat man einfach die Ausdrücke $\int_k i dN$ und $2\pi N_0 i_0 \sin\varepsilon$ zu betrachten. Dieser Arbeitsverlust vertheilt sich naturgemäss ganz gleich auf beide Spulen, so dass auf jede derselben, falls sie von einer besonderen Energiequelle gespeist wäre, die Hälfte des Gesammtverlustes, somit

$$\frac{A}{2} = -\pi m N_0 i_0 \sin\varepsilon$$

entfallen würde.

Trägt man als Abscissen die Stromstärken in einer Spule, als Ordinaten die zugehörigen Magnetisirungscomponenten auf, so erhält man als Magnetisirungscurve bei der Felddrehung eine Ellipse, deren Coordinaten durch die Gleichungen

$$x = i_0 \sin\alpha; \qquad y = N_0 \sin(\alpha-\varepsilon)$$

gegeben sind.

Die Elimination von α aus diesen beiden Gleichungen ergibt die Gleichung der Curve

$$y^2 i_0^2 + x^2 N_0^2 - 2xy i_0 N_0 \cos\varepsilon = N_0^2 i_0^2 \sin\varepsilon.$$

Bei Drehung des Coordinatensystems um den Winkel φ, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 N_0 i_0 \cos\varepsilon}{i_0^2 - N_0^2}$$

bestimmt ist, geht die Gleichung in folgende evidente Ellipsengleichung über

$$\xi^2 \frac{i_0^2 \sin^2\varphi + N_0^2 \cos^2\varphi - 2 N_0 i_0 \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\varphi}{N_0^2 i_0^2 \sin^2\varepsilon} +$$

$$+ \eta^2 \frac{i_0^2 \cos^2\varphi + N_0^2 \sin^2\varphi + 2 N_0 i_0 \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\varphi}{N_0^2 i_0^2 \sin^2\varepsilon} = 1.$$

Die Halbaxen sind somit

$$a = \frac{N_0 i_0 \sin\varepsilon}{\sqrt{i_0^2 \sin^2\varphi + N_0^2 \cos^2\varphi - 2 N_0 i_0 \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\varphi}}$$

und

$$b = \frac{N_0 i_0 \sin\varepsilon}{\sqrt{i_0^2 \cos^2\varphi + N_0^2 \sin^2\varphi + 2 N_0 i_0 \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\varphi}}.$$

Die Fläche dieser Ellipse ist nunmehr

$$\eta = ab\pi = \frac{\pi . N_0^2 i_0^2 \sin^2 \varepsilon}{\sqrt{\begin{array}{l}(i_0^2 \sin^2\varphi + N_0^2 \cos^2\varphi - 2 N_0 i_0 \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\varphi) . \\ . (i_0^2 \cos^2\varphi + N_0^2 \sin^2\varphi + 2 N_0 i_0 \cos\varepsilon \cos\varphi \sin\varphi).\end{array}}}$$

Unter der Berücksichtigung, dass

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2 \sin\varphi \cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = -\frac{2 N_0 i_0 \cos\varepsilon}{N_0^2 - i_0^2}$$

und somit

$$N_0^2 - i_0^2 = -N_0 i_0 \cos\varepsilon \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}$$

ist, wird das Product unter dem Wurzelzeichen gleich

$$i_0^2 N_0^2 \sin^2 \varepsilon$$

und die Fläche der Ellipse

$$\eta = ab\pi = \pi N_0 i_0 \sin\varepsilon,$$

somit der auf eine Spule fallende Arbeitsverlust wieder gleich der Fläche der in obiger Weise entworfenen Magnetisirungscurve multiplicirt mit der Windungszahl m der Spule.

Bei diesen Versuchen, deren Resultate in Tabelle V und VII und in den Curventafeln V und VI aufgeführt sind, zeigt sich nun das merkwürdige Resultat, dass der obige Energieverlust in einer Spule sehr nahe mit dem Energieverlust bei der einfachen Umkehrung zusammenfällt, dass somit der gesammte Energieverlust bei der Drehung in dem beobachteten Intervalle sehr nahe gleich dem doppelten des Energieverlustes bei der einfachen Stromumkehrung ist.

In Curventafel V ist die Magnetisirungscurve für eine Spule bei der grössten Stromstärke neben der entsprechenden für die einfache Umkehrung eingezeichnet. Man sieht unmittelbar, dass erstens die Ellipsenform nahe eingehalten, zweitens die umschlossene Fläche nahe gleich der von der gewöhnlichen Magnetisirungscurve umschlossenen ist.

Die Abweichung von der Ellipsenform mag zweierlei Ursachen haben.

Vor Allem war der Widerstandsapparat nicht so vollkommen, dass i_0 immer genau denselben Werth gehabt hätte, wie aus der Tabelle für i_0 zu Anfang dieses Capitels hervorgeht, ferner kann auch eine durch die Abkühlungsverhältnisse beim Gusse des Eisencylinders oder Ringes bedingte Inhomogenität nach einer bestimmten Richtung eine grössere Permeabilität bewirkt haben. Für höhere Inductionen ergibt sich schon bei unseren Messungen eine Abweichung der beiden in Tafel VI gezeichneten Curven von einander. Der Energieverlust bei der Drehung wird da schon geringer als das Doppelte des Verlustes bei der einfachen Umkehrung.

Es war nicht möglich, die Versuche mit diesem Apparat bis zur Sättigung des inneren Cylinders durchzuführen, nachdem die erforderliche Stromstärke einerseits nicht zu Gebote stand, anderseits auch die Beobachtung in Folge der Störungen durch Erwärmung unmöglich gemacht worden wäre.

Es würde dann wahrscheinlich der Eisenkörper gemäss der Forderung der Theorie und wie in den Versuchen von Baily bei den höheren Magnetisirungen eine Abnahme des Hysteresisverlustes bis auf Null herunter gezeigt haben.

Aus den Tabellen für N_1 ist weiter zu entnehmen, dass die Magnetisirung bei der Drehung einen höheren Werth annimmt als bei der einfachen Umkehrung. In diesen Tabellen sind ausser den beobachteten Werthen für N_1 (a) noch Mittelwerthe (b) angegeben, welche dadurch gewonnen sind, dass aus den Werthen für i_1 und N_1 in den einzelnen Horizontalreihen unter (a) die Mittel genommen wurden. Hiebei wurden die auf- und absteigenden Äste in genau gleicher Weise berücksichtigt, da sich ein systematischer Unterschied zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ästen bemerkbar machte. Derselbe kann wohl kaum im Eisenkörper oder in den Spulen zu suchen sein, sondern rührt offenbar von den Störungen durch Änderung der Compensation etc.... her.

Die Beziehung

$$\eta = \pi N_0 i_0 \sin \varepsilon$$

gibt ein bequemes Mittel an die Hand, den Verzögerungswinkel ε unter Berücksichtung aller Beobachtungen zu ermitteln. Aus

den vier Beobachtungsreihen ergaben sich folgende Werthe für ε:

i_0 in Ampère	N_0 in $c.g.s$	η	ε
4·49	21.500	8.100	15° 29'
8·47	55 500	45.000	17 44
17·64	105.200	121.200	12 0
30·15	162.000	220 600	8 16

Er ist also auch hieraus, sowie aus Curventafel VIII ersichtlich, dass ε ein Maximum in der Nähe desjenigen Punktes der Magnetisirungscurve hat, für welchen das Maximum der Permeabilität stattfindet.

Es erscheint uns wahrscheinlich, dass die Grösse des Verzögerungswinkels nicht ohne Bedeutung für die Theorie der Magnetisirung bleiben dürfte.

Die vorstehenden Beobachtungen wurden in den Laboratoriumsräumen des k. k. Technologischen Gewerbe-Museums in Wien mit den von letzterem und der Allgemeinen Österreichischen Elektricitätsgesellschaft zu diesem Zwecke überlassenen Apparaten ausgeführt, wofür wir beiden Instituten an dieser Stelle unseren Dank aussprechen.

Anhang.

Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit ergab sich noch eine günstige Gelegenheit, um den Versuch von F. G. Baily, wenn auch nicht für die höchsten, so doch für ziemlich hohe Inductionen zu wiederholen.

In der Werkstätte der Allgemeinen Österreichischen Elektricitäts-Gesellschaft wurde ein Apparat zur Entmagnetisirung von Taschenuhren hergestellt, der von Dr. R. Hiecke construirt war und im Wesentlichen aus einem rotirenden Elektromagnet bestand. Über diesem Elektromagnet war eine cylindrische Holzbüchse befestigt, auf deren oberer Basisfläche,

unter der die Magnete rotirten, Gegenstände einem magnetischen Drehfelde von maximal circa 400 (*c.g.s*) ausgesetzt werden konnten.

Auf diese Fläche wurde nun ein kleiner Apparat aufgesetzt, der wie folgt zusammengesetzt war.

Auf einer Hartgummischeibe von 96 *mm* Durchmesser, die mit Kreistheilung (80 Theile auf die gesammte Peripherie) versehen war, befand sich ein Bügel; zwischen diesem und der Scheibe war eine Axe gelagert, die ein Scheibchen aus dünnem Schmiedeeisen trug. Der untere Zapfen lief auf einem Steine, wie bei der Unruhe einer Uhr. Eine nichtmagnetische Unruhespirale (sog. Palladiumspirale) einerseits an der Axe, anderseits am Lagerbügel befestigt, hielt die Scheibe in einer bestimmten Direction.

Diese Vorrichtung wurde nun dem Drehfelde ausgesetzt, und mittelst eines Glasfadens als Zeiger die durch dasselbe hervorgebrachte Ablenkung von der ursprünglichen Einstellung an der Kreistheilung abgelesen. Es wurden zwei Scheibchen untersucht. Das erste bestand aus 0·2 *mm* dickem, im gewöhnlichen Handel erhältlichen Eisenbleche von 30 *mm* Durchmesser; dasselbe stellte sich jedoch als unbrauchbar heraus, indem es nach der Walzrichtung andere magnetische Eigenschaften besass, als quer darauf. Es wurde durch das Drehfeld bei langsamer Drehung in so heftige Schwankungen versetzt, dass die Unruhespirale gefährdet wurde. Bei rascherem Drehen waren bei der Leichtigkeit des Scheibchens die Vibrationen noch so stark, dass sie die Ablesung beeinträchtigten.

Es wurde desshalb ein weiterer Versuch mit einem Scheibchen angestellt, das der Quere nach aus einem Rundeisenstab geschnitten war. Dieses Scheibchen war auf eine gleichmässige Dicke von 0·15 *mm* gedreht und gefeilt und hatte 25·5 *mm* Durchmesser. Die Gleichmässigkeit war noch immer keine derartige, dass die Vibrationen verschwanden, doch waren dieselben soweit vermindert, dass man ganz sicher ablesen konnte.

Vor Allem wurde untersucht, ob ein Theil der beobachteten Ablenkung von Foucaultströmen herrührte, indem man von der Geschwindigkeit, bei der man eben ablesen konnte, auf die

doppelte überging. Ein Einfluss der Wirbelströme hätte sich durch eine Vergrösserung der Ablenkung bemerkbar machen müssen. Eine derartige Veränderung der Ablenkung konnte nicht sicher beobachtet werden; war eine solche vorhanden, so war dieselbe sicher nicht grösser als 0·1 Theilstrich.

Es wurde nun das anfänglich, durch dem Elektromagnet vorgeschalteten Widerstand, sehr schwache Drehfeld successive verstärkt und die Ablenkung der Scheibe bei den einzelnen Feldstärken beobachtet. Die dem Elektromagnet vorgeschalteten Widerstände, die Spannung des Erregerstromes und die Ablenkung Θ in 80tel der Peripherie sind in Tabelle VIII unter den entsprechend bezeichneten Rubriken zusammengestellt.

Hierauf wurde durch Belastung des Zeigers in horizontaler Lage und bei horizontal gestellter Axe mittelst 0·01*g* und 0·05*g* das Directionsmoment der Feder direct bestimmt. Das Gewicht von 0·01 *g* erzeugte eine Ablenkung ϑ von 5 Theilen; das von 0·05 *g* dagegen genau entsprechend 25 Theile. Die Gewichte wurden in einem Abstande $a = 4\cdot 6$ *cm* von der Axe aufgehängt. Ist das Volumen der Eisenscheibe gleich v (cm^3), so rechnet sich aus obigen Elementen der Verlust durch Hysteresis in Erg. bei der Ablenkung Θ

$$\eta = 2\pi p . 981 \frac{\Theta}{\vartheta} . \frac{a}{v},$$

wobei p in Gramm, a in Centimeter, v in Cubikcentimeter eingesetzt werden müssen.

Die erreichten Werthe von η sind in der angeführten Tabelle VIII unter dieser Bezeichnung eingetragen. Es wurde nun weiters unternommen, die Feldstärke und die Magnetisirungsintensität in den Eisenscheibchen zu bestimmen.

Zu ersterem Zwecke wurde auf das Scheibchen, möglichst nahe der Mitte eine kleine Drahtspule aufgelegt, welche auf einem 1·28 *mm* dickem und 20 *mm* breitem Rahmen 38 Windungen von 0·2 *mm* dickem Kupferdraht enthielt. Die Dicke der Spule über den Windungen gemessen betrug 2·5 *mm*, die Breite 20·8 *mm*, die Windungsfläche der Spule $F = 14\cdot 42$ cm^2.

Die Enden dieser kleinen Spule waren mit dem ballistischen Galvanometer verbunden, dessen Ausschläge ein Mass für die

Feldstärke abgaben. Die Aichung des Instrumentes fand statt, indem man Schwingungsdauer T und logarithmisches Decrement λ bestimmte, sowie in den einen Kreis mit Galvanometer und Spule noch $^1/_9$ Ohm einschaltete, an dessen Enden ein Stromkreis mit 4·1 Volt (Accumulatoren) und 9000 Ohm Widerstand angelegt war.

Commutirte man nun den Strom im Feldmagnet, so entstand am ballistischen Galvanometer ein Ausschlag β; schaltete man nach Fig. 10, so entstand die Ablenkung $\frac{\alpha}{2}$; beim Commutiren betrug dann der Unterschied der Galvanometereinstellungen α.

War die Spannung an den Enden des Widerstandes von $^1/_9$ Ohm hiebei E, so war die gesuchte Feldstärke sehr nahe:

$$H = \frac{\beta E \tau e^{\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc.tg} \frac{\pi}{\lambda}}}{\alpha F \pi \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}}}.$$

Die beobachteten Werthe sind in Tabelle VIII unter der Rubrik H angeführt.

Die so bestimmte Feldstärke war wahrscheinlich etwas grösser als die im Eisenscheibchen. Der Unterschied kann aber kaum mehr als 1% betragen, da die Mitte der Windung nur 1·25 *mm* von dem Eisenscheibchen abstand.

Auf ganz ähnliche Weise wurde die Induction im Eisenscheibchen gemessen, und zwar durch 7 Windungen desselben 0·2 *mm* dicken Kupferdrahtes, welche auf das Scheibchen nahe der Mitte aufgewunden waren. Die Fläche dieser Wicklung war $f = 1 \cdot 344\ cm^2$. Der Draht war nicht direct auf das Scheibchen gewickelt, sondern Glimmerplättchen dazwischen gelegt.

Bei Berechnung der Induction wurde darauf Rücksicht genommen, dass ein Theil der inducirten E. K. von der Wirkung der Feldstärke herrührte.

Die erzielten Werthe von J sind ebenfalls in Tabelle VIII eingesetzt. Es ist jedoch zu bemerken, dass Feldstärke und Magnetisirungsintensität beim Commutiren des Feldes, also nicht bei Drehung desselben bestimmt wurden, was möglicherweise einen Unterschied ergeben kann.

Einen Überblick über die Resultate gewährt die Curventafel VIII, auf welcher als Abscissen die Werthe für J und als Ordinaten η und H aufgetragen sind. Aus derselben ersieht man sofort, dass, wie F. G. Baily angibt, der Verlust durch Hysteresis ein Maximum erreicht und dann wieder abnimmt. Dieses Maximum ist bei unserem Versuche 11200 ($c.g.s$) und tritt bei einer Magnetisirungsintensität von circa 1040 ($c.g.s$) auf.

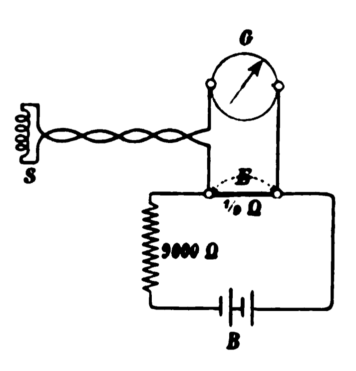


Fig. 10.

Es sei uns an diesem Platze gestattet, über die Theorie der Erscheinungen einige Bemerkungen zu machen.

Es ist vor Allem sehr wahrscheinlich, dass das Maximum des Verlustes dann eintritt, wenn alle Moleküle pro Cyclus einmal herumgedreht werden, ohne desshalb gleichgerichtet sein zu müssen. Im nichtmagnetisirten Eisen sind alle Richtungen gleichmässig vertreten, im magnetisirten wird dies nicht mehr der Fall sein.

Denken wir uns die verschiedenen Richtungen der magnetischen Axen der Moleküle als Radien einer Kugel zusammengestellt (Fig. 11), und legen wir einen grössten Kreis senkrecht zur Resultirenden aus Feldintensität und Widerstandskraft, wobei die Resultirende mit der Feldintensität den bereits früher erwähnten $\sphericalangle s$ einschliesst, so enthält die eine der dadurch entstehenden Kugelhälften alle positiven, die andere alle negativen Pole.

Es kann davon eine Abweichung vorkommen, da wir angenommen haben, dass alle Moleküle einmal herumgedreht werden.

Die Drehung eines Moleküles findet dann aber sicher statt, wenn es in die Lage eines Durchmessers obigen grössten Kreises kommt. Es kann also ein Molekül, welches sich obiger Anordnung nicht einfügt, nicht vorkommen, da es schon einmal in die der Drehung günstigste Lage gekommen, also gedreht worden sein müsste.

Wäre keine Richtung bevorzugt, so wäre die Häufigkeit der positiven Pole auf jedem Flächenelement der positiven Hälfte dieselbe und die Menge der positiven Pole auf dem Kreisringe vom Radius $\rho = r \sin\varphi$ und der Breite 1 proportional $\sin\varphi$.

Nachdem jedoch die Wirkung der resultirenden Richtkraft auf jedes Element im Durchschnitte proportional $\sin\varphi$ ist, so

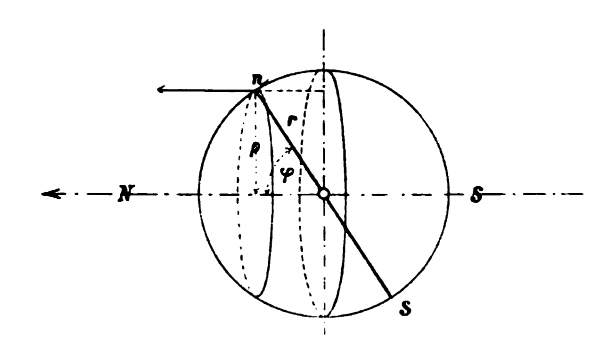


Fig. 11.

ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Molekül in der Richtung φ lagert, proportional $\frac{1}{\sin\varphi}$; somit werden sich die Moleküle so anordnen, dass die Zahl der Pole pro Flächeneinheit auf unserer gedachten Kugel proportional $\frac{1}{\sin\varphi}$ ist. Die Menge der Moleküle, die einen bestimmten Winkel φ mit der Kraftrichtung einschliessen, ist dann proportional $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}$, somit constant.

In diesem Falle ist aber die Magnetisirungsintensität $J = \frac{2}{\pi} J_{\max}$. Bei unserem Versuche erscheint diese Bedingung sehr nahe erfüllt. Das Maximum liegt bei $J = 1040$. Daraus rechnet sich $J_{\max}$ zu 1633 (*c.g.s*), was mit den bisherigen Beobachtungen gut übereinstimmt. Es ist ferner ziemlich plausibel, dass das Maximum des Energieverlustes bei der Drehung der Grösse nach mit dem grössten Energieverlust

bei der Umkehrung zusammenfällt. In beiden Fällen tritt nämlich in einem Cyclus eine vollständige Drehung aller Moleküle ein.

Bei vorliegendem Versuche scheint auch diese Forderung zu stimmen, indem das Verlustmaximum 11.100 Erg. beträgt und Ewing für Schmiedeeisen bei Feldumkehrung circa 10.000 Erg. angibt.

Unter dieser Annahme ergibt sich auch eine Bestätigung unserer früheren Versuche, welche bei geringeren Inductionen

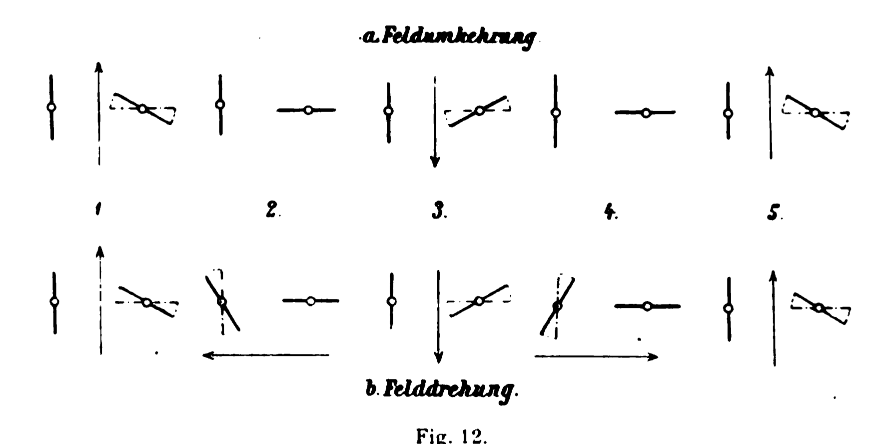


Fig. 12.

den Hysteresisverlust bei der Drehung nahe doppelt so gross ergab wie bei alternirendem Felde.

Setzt man nämlich $aJ_{\max}^{1\cdot 6} = 11.100$, berechnet hieraus a und setzt ferner den Hysteresisverlust bei Umkehrung des Feldes

$$\eta' = aJ^{1\cdot 6}$$

($aB^{1\cdot 6}$ ist offenbar nicht der richtige Ausdruck; derselbe kann für hohe Inductionen nicht stimmen), so ergibt sich für η' die gestrichelte Curve in Tafel VIII, welche nicht allzuweit von der Hälfte der beobachteten Hysteresis entfernt ist.

Es erscheint auch sonst plausibel, dass der Energieverlust bei der Drehung schwächerer Felder doppelt so gross ist wie bei wechselndem Felde. Greift man zwei Molekülgruppen heraus, deren Axenrichtungen aufeinander senkrecht stehen

(Fig. 12), so sieht man leicht, dass bei der Drehung des Feldes die Moleküle aus beiden Gruppen denselben Winkelraum bestreichen, innerhalb dessen bei einfachem Richtungswechsel nur die Moleküle der einen Gruppe schwingen.

Dasselbe findet bei jedem anderen Gruppenpaare statt, dessen Axenrichtungen auf einander senkrecht stehen, so lange die Moleküle nicht ganz herumgedreht werden, sondern nur einen Winkelraum, kleiner als π, bestreichen.

Diese vorstehenden Vermuthungen, mit denen wir diese Abhandlung schliessen, werden den Gegenstand der nächstfolgenden Untersuchungen der Verfasser bilden.

Tabelle I.

Magnetisirung des Eisencylinders durch Umkehrung des Stromes i_1 in der Longitudinalspule, wenn durch die Transversalspule dauernd der constante Strom i_2 fliesst.

i_1 in Ampère	L in Henry	N in $(c.g.s)$
	$i_2 = 0$	
0·53	0·000370	1400
1·10	0·000428	3360
1·98	0·000482	6800
2·64	0·000545	10290
3·93	0·000662	18560
4·60	0·000715	23480
7·40	0·000867	45810
10·05	0·000908	65180
13·52	0·000886	85550
14·97	0·000881	94220
15·49	0·000857	94850
16·98	0·000856	103900
18·58	0·000828	109900
19·62	0·000816	114400
24·83	0·000747	132500
31·07	0·000678	150400
32·84	0·000673	157900

i_1 in Ampère	L in Henry	N in $(c.g.s)$
$i_2 = 3 \cdot 53$ Ampère		
2·05	0·000457	6700
3·60	0·000541	13910
6·95	0·000743	36900
10·03	0·000857	61380
16·51	0·000850	100200
21·33	0·000797	121400
30·25	0·000677	146300
$i_2 = 10 \cdot 0$ Ampère		
1·98	0·000394	5590
3·60	0·000451	11590
7·07	0·000591	29830
11·90	0·000730	62050
18·94	0·000764	103300
25·24	0 000716	129100
30·03	0·000674	144600
$i_2 = 31.0$ Ampère		
1·45	0·000283	2930
3·90	0·000327	9110
7·50	0·000384	20550
12·01	0·000460	39480
20·14	0·000518	74460
29·43	0 000520	109300

L ist der nach der Methode von Lord Raleigh beobachtete Selbstinductionscoëfficient der Longitudinalspule; *N* die aus demselben berechnete Kraftlinienzahl im Eisencylinder.

Hiezu wurde die Formel

$$N = \frac{L \, . \, i_1}{m}$$

benutzt, wo $m = 14$ die Windungszahl der Spule ist.

Tabelle V.

Stufenweise Drehung der Magnetisirung, dargestellt durch die Stromstärken in der Spule I und die zugehörigen, in die Axe dieser Spule fallenden Componenten von N. *a)* directe Beobachtungen, *b)* Mittelwerthe.

1. $i_0 = 30 \cdot 15$ Ampère.

a) **Beobachtungen**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
31·9	162200	—30·5	—156700	30·3	158900	—30·1	157700
25·3	148400	—24·4	—132100	24·0	144800	—24·0	—132400
15·6	102700	—14·4	— 83500	15·2	102100	—14·3	— 84500
— 3·0	11100	+ 3·0	— 3100	— 3·0	+ 9900	+ 3·0	— 5100
—16·5	— 59800	+16·6	+ 64200	—16·4	— 56800	+16·2	+ 61200
—25·9	—119900	+27·3	+132500	—27·0	—128400	+27·9	+136400
—30·5	—162200	+30·3	+156700	—30·1	—158900	+30·1	+157700

b) **Mittelwerthe**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
30·6	158900
24·4	139400
14·9	93200
— 3·0	7300
—16·4	— 60500
—27·0	—129300
—30·6	—158900

Tabelle III.

Magnetisirung bei abwechselnder Stromumkehrung in zwei aufeinander senkrechten Spulen I und II — sprungweise Drehung — i_1 und i_2 sind die Stromstärken in den genannten Spulen; N_1 und N_2 die resultirenden Inductionen nach Umkehrung des Stromes i_1, respective i_2; ε_1 und ε_2 die Winkel, um welche die Richtung von N_1, respective N_2 hinter der Feldrichtung zurückbleibt.

Nr.	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	ε_2	N_2 $(c.g.s)$	ε_1
		1. $i_2 = 4{\cdot}12$ bis $4{\cdot}20$ Ampère			
1	0·89	21410	5° 41'	20110	0° 36'
2	3·63	31490	13 31	29680	11 22
3	6·10	44140	9 11	46700	15 8
4	10·25	70210	3 15	74680	12 24
5	15·53	98140	1 13	102400	9 6
6	22·69	127620	0 29	130820	6 23
7	30·00	148940	0 14	151130	4 40
		2. $i_2 = 11{\cdot}00$ bis $11{\cdot}10$ Ampère			
1	3·98	78360	10 29	74660	1 51
2	8·34	58300	11 38	86090	7 32
3	11·93	100300	8 31	102190	9 58
4	18.35	120340	4 32	122950	9 1
5	22·35	131380	2 55	135380	8 9
6	29·63	152980	1 18	156130	6 59
		3. $i_2 = 29{\cdot}22$ bis $30{\cdot}15$ Ampère			
1	4·20	151130	4 40	148940	0 14
2	9·18	158620	6 37	155770	1 3
3	11·00	156130	6 59	152980	1 18
4	16·51	162440	7 13	160880	1 43
5	22·54	167310	6 1	166430	3 21
6	30·07	174800	4 24	174800	4 24

Tabelle IV.

Stufenweise Magnetisirung nach einer einzigen Richtung zur Berechnung des Hysteresisverlustes.

i Ampère	N $(c.g.s)$	i Ampère	N $(c.g.s)$
1. i = 9 03 Ampère			
9·00	54100	9·05	54100
8·00	51400	8 00	51200
6·55	48000	6·60	47800
5·45	44300	5·45	44300
4·40	41000	4·40	40800
3·00	36400	3·00	36100
0·00	23500	0·00	22000
— 3·00	600	— 3·00	— 1600
— 4·40	—14100	— 4·35	—15700
— 5 45	—26000	— 5·45	—26600
— 6 60	—37300	— 6·60	—37100
— 8·00	—46700	— 8 00	—46300
— 9·05	—54100	— 9·05	—54100
2. i = 11·25 Ampère			
11·25	69800	11·25	69000
10·00	66800	10·00	65800
8·00	61800	8·00	60800
6·55	57600	6·50	56000
4·95	51700	4·75	50000
1·85	38100	1·70	36700
0·00	29200	0·00	28100
— 1·85	17600	— 1·70	17000
— 4·95	—19000	— 4·70	—17900
— 6·50	—36400	— 6·50	—36800
— 8·00	—48000	— 8·00	—48700
—10·00	—61800	—10·00	—61600
—11·25	—69800	—11·25	—69000

i Ampère	N $(c.g.s)$	i Ampère	N $(c.g.s)$
3. $i = 17·5$ Ampère			
17·50	106400	17·50	103700
15·50	101900	15·40	99300
13·00	95900	13·00	93300
10·50	88900	10·50	86100
8 55	82600	8·50	79900
6·00	72400	6·00	69900
0·00	41000	0·00	38400
— 6·00	— 27500	— 6·00	— 28400
— 8·60	— 53500	— 8·50	— 53100
—10·55	— 68500	—10·50	— 67700
—13·00	— 83000	—13·00	— 82000
—15.50	— 96200	—15·20	— 93900
—17·50	—106400	—17·40	—103700
4. $i = 18·15$ Ampère			
18·25	104600	18·20	105000
17·50	103400	15·20	98800
16·50	101200	11·25	88600
15·50	99200	7·15	74700
14·00	96000	4·00	61600
11·50	88900	0·00	39300
7·25	75200	— 4·00	1500
4·00	60900	— 7·40	— 40800
0·00	38900	—11·05	— 70800
— 4·00	1900	—15·00	— 91600
— 7·15	— 40700	—18·00	—105000
—11·70	— 71300		
—15·40	— 92000		
—18·20	—104600		

i Ampère	N (c.g.s)	i Ampère	N (c.g.s)
5. $i = 20 \cdot 2$ Ampère			
20·15	119500	20·15	113900
19·65	113200	18·95	111000
18·55	110600	16·75	105900
16·75	106300	13·70	99900
13·85	99200	9·35	87200
9·45	86300	6·20	75800
6·25	74700	0·00	41900
0·00	41700	— 6·20	— 29000
— 6·25	— 27900	— 9·35	— 57100
— 9·45	— 59100	—14·10	— 88700
—14·10	— 90500	—16·90	— 99000
—17·05	—105700	—18·95	—109000
—18·65	—112600	—20·25	—113900
—19·85	—117700		
—20·15	—119500		
6. $i = 23 \cdot 28$ Ampère			
23·55	125100	23·00	125000
20·60	120100	19·50	118000
18·90	116700	17·70	114400
13·30	102900	9·50	94600
5·35	74400		
0·00	45100		
— 5·30	— 11900		
—11·50	— 79200		
—19·05	—107200		
—20·20	—113400		
—23·00	—125100		



i Ampère	N $(c.g.s)$	i Ampère	N $(c.g.s)$
7. $i = 29·55$ Ampère			
29·5	145800	29·6	145200
26·3	140100	26·3	139900
22·5	133300	22·3	131500
18·6	125300	18·0	122000
15·5	118700	15·5	116700
11·5	106000	11·5	104200
0·0	51300	0·0	47800
—11·5	— 70000	—11·3	— 68500
—16·1	— 96500	—15·6	— 94500
—18·7	—109500	—18·0	—107700
—22·0	—125300	—21·0	—121600
—25·6	—137000	—24·5	—135400
—29·6	—145800	—29·5	—145200

i Ampère	N $(c.g.s)$	i Ampère	N $(c.g.s)$	i Ampère	N $(c.g.s)$
8. $i = 30·13$ Ampère					
29·8	138300	30·0	141400	30·0	144300
26·0	133400	26·5	134700	27·0	142100
23·0	128000	24·3	131200	22·2	132600
14·5	111400	19·0	120000	14·0	106000
7·5	89900	12·5	102800	7·8	92200
0·0	52300	0·0	48500	0·0	53200
— 9·8	— 49600	—12·5	— 77700	—11·2	— 63400
—16·5	— 93200	—19·2	—109800	—17·7	—100100
—23·0	—118400	—25·6	—129900	—23·0	—128500
—26·0	—131300	—28·5	—136500	—26·4	—138100
—30·0	—138300	—31·0	—141400	—30·0	—144300

Tabelle V.

Stufenweise Drehung der Magnetisirung, dargestellt durch die Stromstärken in der Spule I und die zugehörigen, in die Axe dieser Spule fallenden Componenten von *N*. *a)* directe Beobachtungen, *b)* Mittelwerthe.

1. $i_0 = 30 \cdot 15$ Ampère.

a) **Beobachtungen**

i_1 Ampère	N_1 (*c.g.s*)	i_1 Ampère	N_1 (*c.g.s*)	i_1 Ampère	N_1 (*c.g.s*)	i_1 Ampère	N_1 (*c.g.s*)
31·9	162200	−30·5	−156700	30·3	158900	−30·1	157700
25·3	148400	−24·4	−132100	24·0	144800	−24·0	−132400
15·6	102700	−14·4	− 83500	15·2	102100	−14·3	− 84500
− 3·0	11100	+ 3·0	− 3100	− 3·0	+ 9900	+ 3·0	− 5100
−16·5	− 59800	+16·6	+ 64200	−16·4	− 56800	+16·2	+ 61200
−25·9	−119900	+27·3	+132500	−27·0	−128400	+27·9	+136400
−30·5	−162200	+30·3	+156700	−30·1	−158900	+30·1	+157700

b) **Mittelwerthe**

i_1 Ampère	N_1 (*c.g.s*)
30·6	158900
24·4	139400
14·9	93200
− 3·0	7300
−16·4	− 60500
−27·0	−129300
−30·6	−158900

2. $i_0 = 17 \cdot 64$ Ampère.

a) **Beobachtungen**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
17·52	105500	−17·35	−103300	17·45	105100	−17·33	101000
14·59	99500	−14·49	− 94400	14·50	99800	−14·47	− 94000
8·67	69900	− 8·67	− 66600	9·01	73900	− 9·02	− 67200
− 1·63	12400	+ 1·61	− 11600	− 1·65	13400	+ 1·65	− 12000
− 9·90	− 37800	+ 9·89	+ 36500	− 9·89	− 37000	+ 9·89	+ 36100
−16·22	− 86100	+16·13	+ 87300	−15·40	− 80600	+16·12	+ 85400
−17·35	−105500	+17·45	+103300	−17·33	+105100	+17·33	+101000

b) **Mittelwerthe**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
17·40	103700
14·59	96900
8·84	69400
− 1·64	12400
− 9·89	− 37600
−15·97	− 84900
−17·40	−103700

3. $i_0 = 8 \cdot 47$ Ampère.

a) **Beobachtungen**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
8·43	56000	— 8·38	— 54000	8·36	53500	— 8·33	— 53500
7·10	55300	— 7·02	— 52900	7·43	52700	— 6·94	— 52100
4·18	41700	— 4·18	— 40100	4·12	37800	— 4·24	— 40700
— 0·78	12200	+ 0·78	— 11200	— 0·78	12100	+ 0·78	— 11400
— 4·80	— 15800	+ 4·75	+ 14900	— 4·75	— 13100		
— 7·85	— 43400	+ 8·07	+ 44000	— 7·83	— 40800		
— 8·38	— 55900	+ 8·36	+ 54000	— 8·33	— 53400		

b) **Mittelwerthe**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
8·38	54200
7·12	53200
4·18	40100
— 0·78	11700
— 4·76	— 14700
— 7·95	— 43000
— 8·38	— 54200

4. $i_0 = 4 \cdot 49$ Ampère.

a) **Beobachtungen**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$	i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
4·40	21570	— 4·38	— 20930	4·38	21120	— 4·38	— 21120
3·78	21440	— 3·75	— 20410	3 75	20860	— 3·74	— 20540
2·22	15800	— 2·31	— 15420	2·20	15160	— 2·21	— 15350
— 0·40	4270	+ 0·40	— 3890	— 0·40	3700	+ 0·40	4020
— 2·53	— 7000	+ 2·91	+ 9070	— 2·54	— 7580		
— 4·19	— 17180	+ 3·97	+ 15680	— 4·18	— 16780		
— 4·38	— 21580	+ 4·38	+ 20920	— 4·38	— 21120		

b) **Mittelwerthe**

i_1 Ampère	N_1 $(c.g.s)$
4·38	21190
3·75	20810
2·24	15430
— 0·40	3720
—2·72	— 8180
—4·08	—16330
—4·38	—21190

Tabelle VI.

$\eta = \int_k i\,dN$ bei stufenwéiser Umkehrung der Magnetisirung N.

N (c.g.s)	η	N (c.g.s)	η
54100	44900	116700	137500
69400	64700	125100	162800
105100	118800	145500	213000
104800	121000	141300	219100

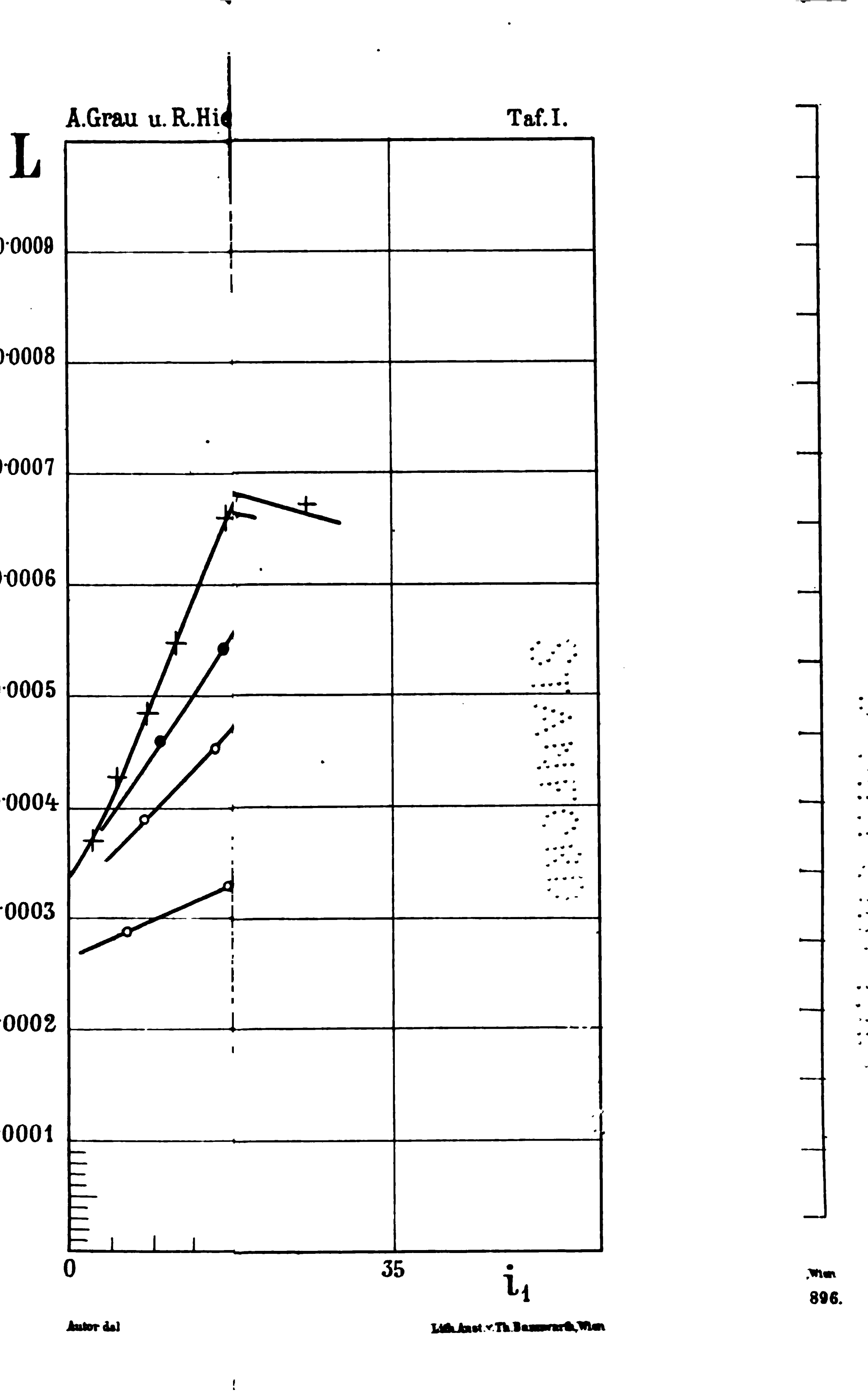
Tabelle VII.

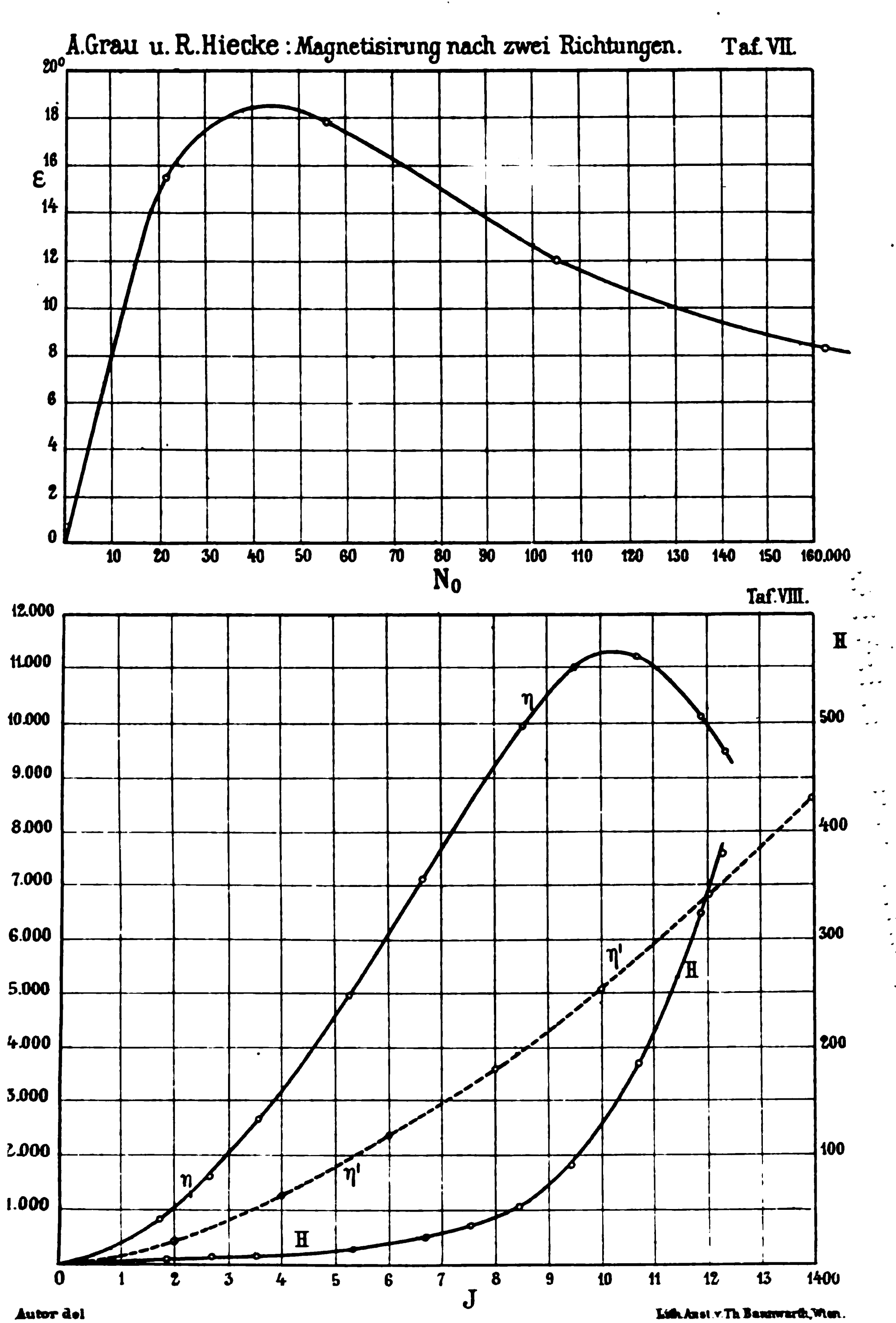
$\eta = \int_k i_1\,dN_1$ bei stufenweiser Drehung der Magnetisirung N.

N (c.g.s)	η	N (c.g.s)	η
21500	8100	105200	121200
55500	45000	162000	220600

Tabelle VIII.

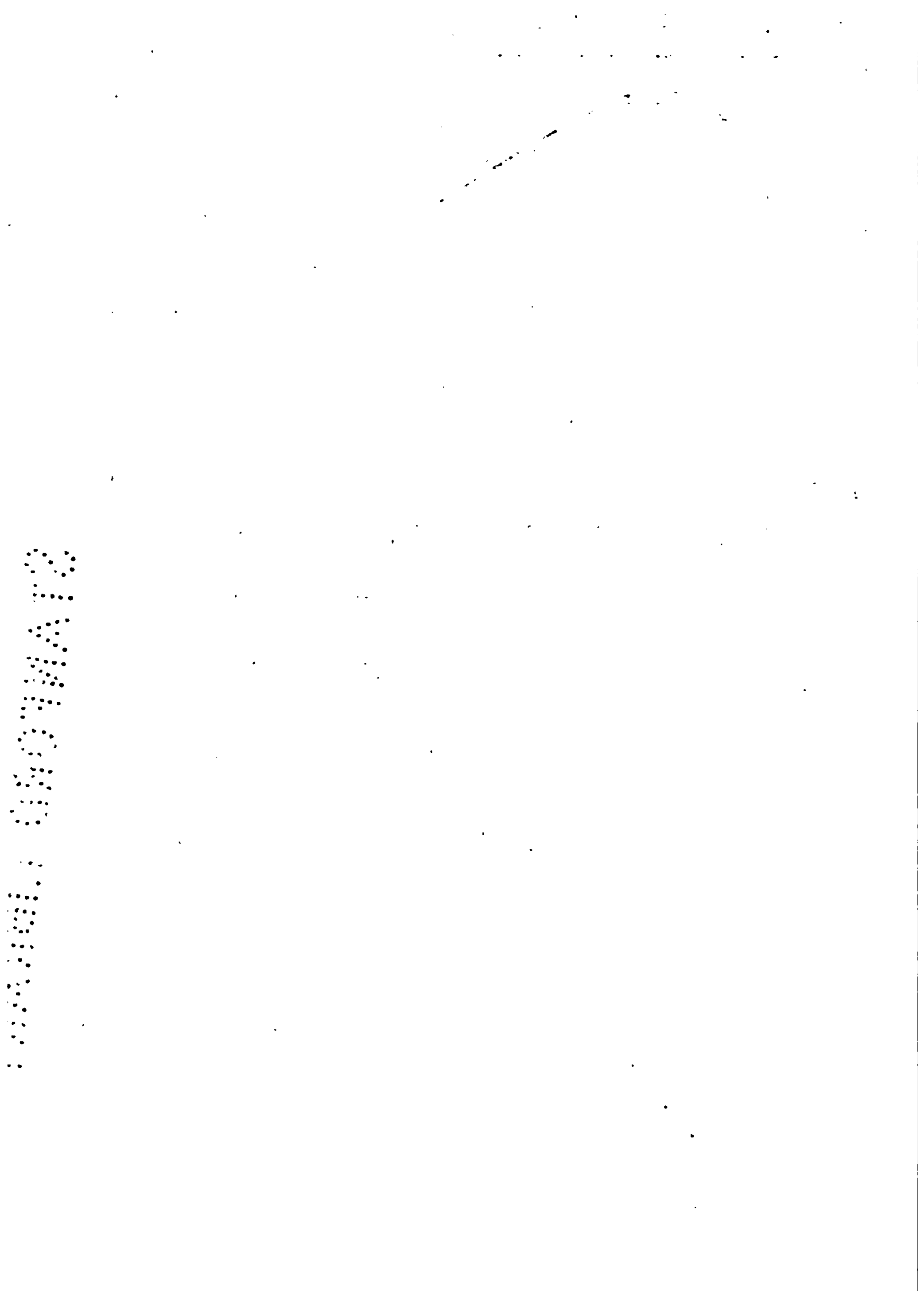
Vorgeschalt. Widerstand S. E.	Spannung Volt	Θ 1 Theil $= \frac{\pi}{40}$	η in Erg	H (c.g.s)	J
10000	110	1·2	888	2·83	183
7000	110	2·1	1554	4·03	268
5000	110	3·5	2590	5·57	352
3000	110	6·7	4958	11·41	529
2000	110	9·6	7104	19·48	671
1000	110	13·4	9916	51·49	842
500	110	14·8	10952	90·57	947
0	110	15·0	11100	179·65	1069
0	220	13·6	10064	321·70	1179
0	330	12·7	9398	378·78	1225
0	440	12·6	9324	—	—


A.Grau u. R.Hie
Taf. I.
L
0·0009
0·0008
0·0007
0·0006
·0005
·0004
·0003
·0002
·0001
0
35
i1
Autor del.
Lith.Anst.v.Th.Bannwarth,Wien
896.



Autor del

Lith.Anst.v.Th.Bannwarth,Wien.



Anmerkung.

Wir bemerken zu Seite 2, dass ähnliche Versuche, wie Gerosa und Finzi, J. Klemenčič[1] ausgeführt und die Resultate derselben in folgenden Schlusssätzen niedergelegt hat:

»Die Magnetisirbarkeit von Drähten in axialer Richtung wird durch circular magnetisirende Ströme heruntergesetzt, und zwar wächst der Einfluss mit der Stärke des Stromes; er ist jedoch ungleich in verschiedenen Theilen der Magnetisirungscurve; am stärksten äussert er sich in der Nähe des Wendepunktes.

Die Abnahme der Magnetisirbarkeit lässt sich beim weichen Eisen und bei einer mittleren Stärke des circular magnetisirenden Feldes von 15 Einheiten bis in die schwächsten axialen Felder $H = 0 \cdot 015$ verfolgen, während dieselbe beim Stahl unter den gleichen Umständen erst bei viel höheren Feldstärken bemerkbar wird.

Die circulare Magnetisirung wirkt auf die axiale Magnetisirungscurve dem Sinne nach, so wie eine Härtung des Materials; in beiden Fällen wird die Curve abgeflacht.

Durch die circulare Magnetisirung wird die Retentionsfähigkeit in axialer Richtung vermindert, und beim Stahl scheint unter diesem Einflusse auch die Coërcitivkraft abzunehmen.«

---

[1] J. Klemenčič, diese Berichte, Bd. CIV, Abth. II, Februar 1895.

XXIV. SITZUNG VOM 19. NOVEMBER 1896.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung von Herrn Leo Brenner, Director der Manora-Sternwarte in Lussinpiccolo, unter dem Titel: »Jupiterbeobachtungen 1895/1896«.

Das w. M. Herr Prof. Franz Exner legt eine in Gemeinschaft mit Herrn E. Haschek ausgeführte Arbeit vor, betitelt: »Untersuchungen über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente« (V. Mittheilung).

Ferner legt Herr Prof. Exner eine in seinem Institute von Herrn Dr. St. Meyer ausgeführte Arbeit: »Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines mechanischen Impulses in gespannten Drähten« vor.

Über die ultravioletten Funkenspectra der Elemente

(V. Mittheilung)

(enthaltend die Spectra von Ni und Co)

von

Prof. **Franz Exner**, w. M. k. Akad., und **E. Haschek.**

(Mit 2 Tafeln.)

XII. Nickel.

(Tafel I.)

An älteren Beobachtungen des ultravioletten Spectrums des Nickels liegen vor: im Bogen solche von Cornu[1] zwischen $\lambda = 3650 - 3000$ AE., von Lockyer[2] zwischen $\lambda = 4000$ bis 3900 AE. und im Bogen und Funken von Liveing und Dewar[3] zwischen $\lambda = 3860—2170$ AE. Ausserdem finden sich eine Reihe von Ni- und Co-Linien in der Rowland'schen Tabelle der Standard-Wellenlängen des Sonnenspectrums.

Wir haben zu unseren Aufnahmen Nickeldraht von Trommsdorff benützt, der sich als verhältnissmässig rein erwies. An Verunreinigungen fanden sich Fe und Co in grösserer Menge, Mn und Ca wenig. Die Linien des Nickelspectrums sind durchwegs scharf; wir haben im Folgenden alle stärkeren Linien (mit der Intensität 1 und 2) insoferne sie scharf sind, mehrmals gemessen und geben Mittelwerthe auf Hundertel an, wobei wir jedoch der letzten Decimale nur den

[1] Cornu, Spectre normal du soleil, Paris (1881).
[2] Lockyer, Phil. Trans. 173 (1881).
[3] Liveing und Dewar, Phil. Trans. 179 (1888).

Werth eines Correctionsgliedes beilegen. Es wurden von uns im Mittel zwischen λ 4716·1 AE. und 2107·8 AE., abgesehen von den erwähnten Verunreinigungen, 971 Linien gemessen. Wir werden im Folgenden die den Verunreinigungen angehörigen Linien wie bisher in den Tabellen mit anführen, nur die Eisen-Linien, die in beträchtlicher Anzahl vorkommen, lassen wir weg.

λ	i		λ	i		λ	i	
4716·1	6		4437·1	6		4164·8	6	
14·6	4		10·6	6+	br.	50·5	6	
04·0	6		01·7	4		38·5	6	
01·8	6		4398·8	6		31·2	6	
01·4	6		90·0	6+		21·3	5	
4686·4	6		86·7	6+		18·7	6	
67·7	6		84·7	6		16·0	6	
67·1	6		68·5	6		10·5	6+	
53·0	6		62·2	6		4092·5	6	Co
52·5	6		59·7	6		86·2	6+	
48·7	5		55·9	6		83·7	6	Mn
06·3	6		31·7	6		83·0	6	
05·2	5		31·0	6+	br.	67·2	5	
00·6	6		28·7	6+	br.	59·1	6	Mn
4596·1	6+		13·6	6+	br.	59·0	6	
95·2	6+		02·2	6+		57·6	6+	
92·7	5		4298·7	6+		55·7	6	Mn
51·3	6		96·0	6		51·5	6	
47·3	6		88·2	5		49·0	6	Mn
47·1	6		84·8	6		35·8	6	Mn
20·1	6		79·4	6		34·6	5	Mn
13·1	6+		45·0	6		33·2	5	Mn
4470·7	5		35·4	6		30·9	5	Mn
66·5	6+		31·2	6		22·0	6+	
64·5	6+		26·9	6	Ca	21·1	6+	
63·6	6+		01·8	6		19·2	6+	
62·7	5		00·6	6		18·2	6	Mn
59·2	4		4195·6	6		17·5	6	br.
51·8	6		92·2	6		15·5	6	
42·7	6+		84·5	6		12·7	6+	br.
37·7	6+		67·0	6+		10·0	6	

λ	i	λ	i	λ	i
4006·2	6	3874·1	6 Co	3740·0	6
00·7	6+	73·3	5 Co	39·4	5
3998·0	6 Co	71·7	6+	36·9	4
84·0	6+	69·8	6+	34·3	6
78·8	6+	68·5	6+	31·0	6
74·7	6+	67·9	6+	30·7	6
73·7	4	63·3	6	30·2	6
72·2	5	61·3	6 Co	29·9	6
70·6	6+ br.	58·49	2	29·1	6
68·6	6 Ca	55·1	6+	27·6	6
53·0	6	49·7	5	26·2	6+
44·2	6+	45·6	5 Co	25·0	6
41·8	6+	44·8	6+	22·7	4 (Fe)
41·0	6+	42·2	6 Co	15·6	6
36·0	6 Co	38·3	6	09·0	6
33·8	6 Ca	34·4	6 Fe, Mn	08·0	6+
14·5	6+	33·0	6	04·3	6 Co
13·3	6	32·5	6	02·4	6 Co
13·1	6	31·8	4	01·3	6
11·2	6+	24·0	6 Mn	3699·2	6+
10·6	6	23·7	6 Mn	97·1	6
10·0	6	17·8	6+	94·1	5
08·6	6+	11·5	6	91·1	6
06·8	6+	07·28	2	89·5	6
06·6	6+	06·9	6 Mn	88·5	4
06·1	6	03·8	6	83·1	6 Co
05·6	6	3799·1	6	77·7	6
05·3	6	98·1	6+	74·2	3
04·3	6	93·7	5	70·5	4
02·3	6	92·5	6	69·3	5
3896·1	6	87·2	6+	68·2	6+
94·9	6	83·64	2	66·7	6
94·2	5 Co	75·71	2	66·1	6
89·8	5	72·7	6	64·2	4
84·4	6+ br.	69·63	2	62·1	5
83·2	6+ br.	63·0	6	57·7	6+
82·0	6	62·2	6+	56·5	6+
81·1	6+	49·2	6	53·0	6
77·2	6+	44·7	6	52·6	6
76·0	6+ br.	40·2	6	51·5	6

λ	i	λ	i	λ	i
3649·5	6 d.	3585·8	6	3533·4	6 Co
44·1	6	85·4	6	32·0	6 Mn
43·7	6	85·3	6 Co	31·8	6
43·4	6	84·8	6	31·4	6
43·0	6	83·0	3	30·6	5
42·5	6	82·3	6	29·8	5
41·7	6	81·3	5	29·1	6
40·1	6	80·5	6	29·0	6
39·5	6	78·0	6	28·4	6
37·8	6	76·8	3	28·1	5
36·5	6	76·0	6	26·9	5 (Co)
35·0	5	75·4	5	26·6	5
32·9	6	75·0	6 Co	24·60	1
31·5	5	74·4	6	23·6	5 Co
30·0	5	71·96	2	21·7	6 Co
28·0	6	70·2	5 Mn	19·90	2
26·5	6	69·5	5 Co	18 8	5
24·8	4	68·0	6+	18·5	6 Co
21·3	6 Co	66·50	1	16·3	5
19·52	1	65·0	6 Co	15·15	1
13·8	6	61·8	5	14·10	2
12·8	3	61·0	6	13·6	6 Co
11·9	6	60·0	6	12·7	5 Co
11·6	6	59·0	6	11·7	6
10·55	2	56·9	6	11·4	6
09·4	5	56·5	6	10·45	1
07·9	6	53·6	5	10·0	5
07·0	6	51·6	5	07·9	5
04·4	6	49·0	6	07·3	6
03·9	6+	48·2	3 Mn ?	06·5	5 Co
02·3	4	46·7	6	02·7	5 Co
3599·6	6	45·6	6	02·4	5 Co
97·78	2	45·3	6	01·9	6
95·0	6 Co	42·1	6	01·7	6
92·9	6	39·1	6+	01·00	2
92·3	6	38·2	6+	3499·4	6+
90·5	6+ br.	37·6	6	97·6	6
89·1	6	37·2	6	96·9	6 Co
88·0	5	35·4	6	96·5	6
87·3	5 Co	34·2	6	95·8	6 Co

λ	i	λ	i	λ	i
3493·15	1	3435·6	6	3364·7	6
91·4	6	33·65	2	64·0	6
89·5	5 Co	33·2	6 Co	63·8	6
86·2	6	31·7	6 Co	62·9	6
86·0	5	27·8	6	61·7	4
85·2	6+	26·3	6	59·3	5
83·93	2	23·76	2	54·6	6 Co
83·0	6 Mn	22·8	6	50·5	5
81·2	6	22·4	6	45·1	6
80·3	6	21·4	5	39·1	6+
79·4	6	20·8	6	36·1	6+ br.
78·4	6	14·83	1	34·3	6 Co
78·0	6	14·0	5	27·5	6
74·1	5 Mn, Co	13·5	4	27·0	6
72·59	2	12·6	6	22·4	3
71·4	4	12·1	6+	20·9	6
70 2	6	11·1	6+	20·3	3
69·5	3	09·5	5	15·7	3
67·5	5	09·1	5	13·1	6
66·0	6 Co	07·4	4	12·3	5
65·8	3	05·2	4 Co	10·2	6
63·0	5 Co	03·5	4	09·5	6
61·72	1	01·8	6	06·9	6
60·4	6 Mn	01·3	5	05·0	6
58·51	1	3396·3	6	02·6	6+
55·3	6 Co	93·05	2	01·8	6+
54·2	5	91·2	3	3299·2	6+ br.
53·5	4	85·7	6	96·3	6
52·92	2	81·1	4	93·8	6
50·6	6	80·62	2	90·7	6
49·5	5	76·4	6	88·5	6+ br.
49·2	5	74·8	4	87·1	5
48·5	6	74·4	4	86·0	6+
46·34	1	74·1	4	85·1	6
44·4	6	72·1	3	84·5	6
44·0	6	69·66	2	83·5	6 Co
43·7	5 Co	67·9	6	82·8	4
43·0	6	66·9	5	81·9	5
42·6	6	66·3	3	80·7	6
39·0	6+	65·9	3	76·7	6+2 AE.

λ	i	λ	i	λ	i
3275·0	6	3212·5	6	3153·5	6+
74·0	3	10·1	5	53·0	6
73·6	6+	09·1	6	51·5	6+
71·2	4	07·1	6	49·5	6
69·0	6	05·4	6	47·1	6 Co
68·2	6	04·7	6	46·4	6
61·9	6+	02·3	4	45·8	5
61·1	6+	00·6	5	45·3	6
60·9	6 Co	3199·5	6	40·0	6 Co
59·0	6+	97·3	4	37·5	6 Co
56·1	6	95·7	5	34·26	1
50·8	3	95·4	6	33·0	6+ br.
49·5	5	95·1	6	29·5	5
48·6	4	92·2	6+ br.	27·8	6+
47·72	2	91·3	6	27·3	6+
45·5	6+	89·9	6+	21·7	6+
43·22	2	88·6	6 Co	21·0	6+ br.
42·0	6	87·8	6+	16·8	6
37·1	6	86·7	6+	14·3	3
36·4	6+	86·3	6	07·8	6
35·8	6	84·5	5	05·6	5
34·8	3	83·4	6	02·00	1
34·0	6	83·2	6	01·61	1
33·11	2	81·9	5	3099·2	3
31·6	6	79·7	6+	97·2	4
28·2	6 Mn	79·0	6+	94·4	6
27·2	5	77·5	6	89·9	6
25·2	3	77·0	6	88·3	6+
24·0	6	76·4	6	87·2	3
23·7	5	74·2	6+	80·82	2
21·8	4	70·8	6	72·5	6 Co
21·4	4	69·8	6+ Co	66·6	6
20·2	6	66·5	6	64·75	2
20·0	6	65·6	6	64·1	6
19·5	6	65·0	6	57·72	1
17·93	2	64·4	6	54·40	2
16·9	5	59·7	6	50·88	1
15·7	6+	58·9	6 Co	47·2	6
14·1	3	54·9	6 Co	45·1	4
13·5	5	54·8	6	44·1	5 Co

λ	i	λ	i	λ	i
3038·05	2	2921·3	6+ br.	2839·0	6
35·5	6	19·2	6+ br.	37·3	6+
32·6	6	17·1	6+ br.	36·6	6+ br.
32·0	4	14·2	6	35·6	6
31·3	6+	13·7	3	35·2	6+ br.
29·5	6+	12·3	6	34·6	6
26·0	6	07·6	5	32·4	6
24·2	6	06·0	6+	31·6	6
20·0	6+	00·3	6+	30·7	6 Mn
19·3	3	2898·8	6+ Mn	29·2	6
17·7	6 Co	97·2	6+	25·3	5
12·10	1	92·5	6+	23·9	6+
08·2	6	91·4	6+	23·3	6
03·73	1	89·6	6+ Mn	21·3	5
02·60	1	86·8	6+ Mn	16·4	6+
2994·49	2 (Fe)	83·8	6+ br.	15·6	6+
92·66	2	82·5	6+ br.	15·1	6 Mn
91·3	6	81·6	6	14·3	6
89·8	6 Co	81·3	6+	13·3	6+
88·1	5	79·5	6 Mn	12·5	6+ Mn
87·3	6	73·3	6	12·3	6+
85·8	6	72·9	6 Mn	10·3	6+ br.
85·0	6	70·3	6 Mn	08·3	6
84·3	4	70·0	6	07·6	6+
83·6	5	68·7	6	05·7	5
81·8	3	65·5	6	05·1	6 Mn
76·8	6	64·2	6+	04·8	6
73·8	6	63·7	3	02·74	2
65·5	6+ br.	61·6	6+ br.	02·3	6
61·5	6	58·2	6	01·2	6
58·5	6	57·5	6+ br.	00·9	6+
55·2	6+ br.	55·6	6	2798·7	5
49·3	4 Mn	53·6	6+ br.	98·3	6
47·6	5	52·2	5	98·1	6
44·1	3	51·1	6+ br	95·59	2
42·9	6	49·8	6+ br.	94·9	5
39·5	3 Mn	46·0	6+	90·8	6+
34·8	6+	43·8	6+ br.	85·5	6+ br.
33·2	5 Mn	42·5	4	79·8	6
22·3	6+ br.	40·7	6+	75·4	6+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2771·5	6+	2689·8	6	2618·9	6+ br.
70·2	6	84·5	5+ br.	18·2	6 Mn
69·0	6+ br.	82·4	6+ br.	15·3	5+ br.
60·7	6	80·4	6	14·5	6 Co
59·0	6+ br.	79·2	6+ br.	13·9	6
46·8	6	74·8	6	13·6	6 Co
43·1	6	74·5	6	11·7	6
37·7	6	73·3	6+	10·7	6
35·5	6	72·6	6 Mn	10·2	5+
28·8	6 Mn	70·4	6	06·5	5+ br.
27·6	6 Mn	66·9	6+	05·7	5
25·0	6	66·1	6	03·9	6
23·7	6+	65·9	6	03·6	6
22·9	6	65·3	5	02·8	6
22·4	6	63·6	6 Co	01·2	5+ br.
21·2	6	59·6	6+	2599·1	6
20·0	6+ Mn	55·9	6+	97·7	6
19·4	6 Mn	55·4	6+	93·8	4 (Mn)
19·2	6 Mn	53·8	6 Co	92·8	6
14·5	6 Co	52·5	6+ br.	89·8	6
11·9	6	50·8	6+	89·6	6
11·7	6 Mn	48·8	6 Co	89·0	6
10·7	6	47·0	6+ br.	88·4	6
10·4	6	42·0	6+ br.	88·1	6
08·8	6+	41·3	6+ br.	87·6	6
08·6	6 Mn	39·8	6	87·3	5 Co
07·7	6	39·5	6+	84·1	5
06·6	6	38·2	6	83·4	6
05·8	6 Mn	37·2	6+ br.	82·7	6 (Fe)
05·6	6	33·0	6+	82·3	5 Co
03·1	6	32·5	6+	80·4	4 (Co)
01·8	6 Mn	31·6	6+	78·5	6
01·3	6+ Mn	31·5	5	76·1	4 Mn
00·4	6+	31·2	5	75·0	6 Co
2699·3	6+	30·4	5	71·0	6+
96·6	6	29·7	6	69·8	6+
95·5	6	29·4	6	66·2	5+
94·7	6 Co	26·5	6+ br.	64·2	5 Co
93·2	6	23·1	6	63·8	6
90·7	6+ br.	22·1	6	61·6	6

λ	i		λ	i		λ	i	
2560·3	6+		2521·2	6		2446·1	6	Co
60·1	6+	Co	19·9	6	Co	45·6	6	
59·5	6	Co	19·3	6+		44·6	6	Fe ?
58·7	6		18·2	6		43·9	6	Co
58·0	6		17·9	6		42·6	6	Co
56·8	6+	br.	16·2	6		41·8	6	
55·2	6+		14·7	6+		41·7	6	
53·0	6+	br.	10·92	1		39·3	6	
51·1	6		06·8	6		39·1	6	
50·7	6		06·4	6	Co	37·92	2	
50·0	6		05·8	4		36·7	6	
49·4	5		2492·1	6		33·6	5	
48·8	6		91·2	6		32·9	6	
47·5	6		90·8	6		32·6	6	Co
47·3	6		90·7	6		32·3	6	
46·9	6	Co	86·5	6	Co, Fe	31·6	6	
46·00	2		84·3	5+		29·2	6	
43·5	6		83·3	6		28·4	6	
42·1	6	Co	82·7	6+		25·0	6	
41·3	6		82·2	6+		24·1	6	
40·8	6		80·2	6		23·7	6	
40·3	6		79·9	6		23·4	6	
39·2	5		78·6	6		22·8	6+	
36·1	6		76·9	6		21·3	6	
35·7	6+		73·1	3		20·8	6	
35·3	6+		72·1	6		19·4	6	
33·9	6	Co, Fe	70·6	6		17·7	6	
33·6	6		66·8	6+		16·18	2	
32·2	6		65·3	6		14·1	6	
30·2	6	Co	64·2	6	Co	13·3	6	
29·1	6		61·9	6		13·1	5	
28·7	5	Co	61·3	6		12·3	6	
28·1	6		55·5	6		11·6	6	
27·6	6		54·0	6		10·6	6	
25·4	6	(Fe)	52·4	6+		09·7	6	
25·1	6	Co	51·1	6+		08·8	6	
24·3	6		50·0	6	Co	08·5	6	
22·9	6		49·1	6		07·7	6	
21·7	6		48·3	6		07·3	6	
21·4	6		47·7	6	Co	06·9	6	

λ	i		λ	i		λ	i	
2406·4	6		2360·0	6		2316·2	5	
05·2	5		59·0	6		14·1	6	
04·2	6		58·8	6		13·8	6	
03·6	6		56·9	6		13·0	5	
01·9	6		56·5	5		12·4	5	
2398·2	6		55·0	6		11·7	6	
97·4	6	Co	53·4	6	Co	11·0	6	
95·8	6		50·8	6		08·6	5	
94·7	5		50·0	6+		07·8	5	
94·49	2		48·2	6		05·3	5	
92·6	5		47·5	6	d.	04·7	6	
92·1	6		46·7	6		03·8	5	
89·5	6		45·4	5		03·0	5	
89·3	6		45·3	5		01·5	6	
88·8	5	Co	44·4	6		00·3	5	
87·7	5		44·1	6		2299·8	5	
86·7	6		43·6	5		98·3	5	
86·6	6		43·2	6		97·6	5	
86·4	6		43·0	6		97·2	5	
85·6	6		41·2	5		96·6	5	
85·0	6		40·3	6		92·1	6	
84·9	6		39·7	6		90·0	6	
83·5	5		37·6	6		89·4	6	
82·0	5	Fe ?	37·2	6		88·7	6	
81·8	6	Co	36·7	5		88·4	6	
79·6	6		34·6	4		87·7	5	
78·7	5		31·7	6		87·1	5	
76·0	6		30·0	6		86·2	6	Co
75·4	3		29·8	6		81·2	6	
72·2	6		29·3	6		78·8	5	
69·3	6		27·4	6		78·4	5	
68·7	6		26·5	5		77·3	5	
67·5	5		25·9	6		76·6	5	
66·7	5		23·3	6		76·2	6	
66·0	6		23·0	6		75·7	5	
65·8	6		22·8	6		74·8	5	
63·9	5		20·2	5		72·0	6	
62·2	6		19·8	5		71·7	6	
60·5	6		18·6	5		70·2	5	
60·2	6		17·3	6		65·5	6	

λ	i	λ	i	λ	i
2264·6	5	2242·7	6	2203·7	6
63·1	6	41·7	6	01·4	5
60·1	6	28·1	6	2192·5	6
59·4	6+	26·5	5	88·2	6
58·0	6+	25·0	5	85·6	5
57·0	6	24·5	6	80·7	6
56·2	5	23·1	6	79·5	6
54·0	5	21·3	6	77·4	6+
53·2	6	20·5	5	69·3	5
50·7	6	16·5	5	61·5	6
49·6	6	11·2	6	31·2	6
47·3	6	10·4	5	07·8	6
47·1	6	06·8	6+		
45·2	6+	05·7	6+		

XIII. Cobalt.

(Tafel II.)

Bezüglich der älteren Messungen des Cobaltspectrums verweisen wir auf die bei Nickel angegebene Literatur; Cornu und Lockyer beobachteten im Bogen; ersterer zwischen λ = 3500 und 3400 AE., letzterer zwischen λ = 4000 und 3900 AE., Liveing und Dewar im Bogen und Funken zwischen λ = 4000 und 2300 AE.

Das untersuchte Cobalt bezogen wir von Schuchardt. An Verunreinigungen konnten wir bisher darin nachweisen Fe und Ni in grösserer, Mn und Ca in geringerer Menge. Auch die Cobaltlinien zeichnen sich durch grosse Schärfe aus. Wir massen 1625 Linien zwischen λ = 4693·3 und 2190·7 AE.

λ	i	λ	i	λ	i
4693·3	6+	4661·6	6+	4623·0	6+
82·4	6+	51·7	6+	4597·0	6
71·2	6+	29·5	6	94·6	6
63·5	6	25·8	6+	81·7	5

λ	i	λ	i	λ	i
4570·1	6+	4361·0	6+	4192·7	6+
69·5	6+	57·4	6+	90·7	6
65·6	5	53·0	6+	87·4	6
59·3	6+	42·4	6+ br.	79·4	6
56·3	6+	39·8	6	71·1	6
52·5	6+	28·7	6+	67·0	6+
49·8	6	23·0	6+ br.	66·6	6+
45·3	6+	09·5	6+	62·3	6
44·0	6	07·5	6+	60·7	5
34·2	6	07·0	6	58·5	6
33·4	6+	03·3	6+ br.	55·0	6+
31·1	5	4292·4	6	50·5	6
28·2	6+	90·3	6	45·3	6
27·0	6+	87·5	6	43·8	6+
12·4	6	86·0	6	40·6	6+ br.
12·0	6	83·6	6+	39·5	6
4494·9	6	81·2	6+	32·2	6+
84·1	6	80·7	6+	23·3	6+
78·5	6	77·7	6+ br.	22·4	6+
71·9	6	69·6	6+	21·47	2
71·7	6	68·5	6+	18·90	2
69·7	6	63·8	6	16·0	6
67·0	6	57·6	6+	10·7	5
45·9	6	52·5	6	4096·7	6+
45·2	6+	49·3	6+	96·2	6+
43·4	6+	48·3	6	95·3	6+
32·0	6	45·8	6+	92·5	3
17·4	6	44·5	6	89·5	6+ 2 AE.
14·0	6	34·2	6	86·5	4
03·8	6+	25·3	6+	82·6	6
02·7	6+	22·4	6+	80·7	6
01·7	6+ Ni	20·5	6	77·6	6
4392·1	6	15·0	6+	68·7	5
91·8	6	14·3	6+	66·5	4
88·2	6+	11·5	6	63·3	6+
80·2	6+	10·0	6+	62·0	6
75·7	6	08·7	6+	58·7	5
75·3	6	07·6	6	58·4	5
73·8	6	02·9	6	57·4	6
71·3	6	4195·7	6+ br.	57·2	6

λ	i	λ	i	λ	i
4055·6	6+ br. (Mn)	3974·9	5	3914·5	6
54·2	6	73·3	5	14·3	6
53·2	6	72·8	5	13·7	6+
49·5	6	69·4	5 (Fe)	13·3	6
48·3	6+	68·6	6+ Ca (L)	10·6	6+
45·5	5	66·7	6+	10·0	5
35·7	5	65·3	6+	08·5	6+
34·6	6 Mn	63·9	6	06·4	5
33·2	6 Mn	63·7	6	04·9	6
30·9	6 Mn	61·2	5	04·3	6
30·2	6+	60·0	6+	02·3	6
29·2	6+	58·1	5	00·3	6
27·2	6	53·1	5	3898·6	6
23·5	6	52·5	6	97·8	6+
11·1	5	51·8	6	97·0	6
19·3	6+	50·7	6	96·1	6
18·2	6+ Mn	47·3	6	95·8	6
16·8	6+	46·7	6	95·1	4
14·1	5	45·5	5	94·13	1
12·4	6+	42·7	6	93·2	6
11·1	6+	41·8	5	92·2	6
08·4	6	41·1	5	91·9	6
08·0	6	40·0	6	90·9	6
07·4	6	39·0	6+ br.	90·7	6
06·5	6+	36·1	3	87·1	6
03·7	6	35·4	6+	86·5	6
3998·1	3	34·8	6	86·2	6
97·4	6+	34·1	6	85·4	6
95·55	2	33·8	6 Ca	84·7	5
91·8	5+	29·5	6	83·4	6
90·5	6	28·6	6	81·9	3
87·3	6	28·4	6	81·3	6
85·7	6	28·0	6	81·1	6
85·3	6	25·4	6	76·9	5
83·2	6+	25·0	6+	74·05	2
80·4	6+	22·9	6 d. (Fe)	73·17	1
79·7	5	20·9	6	72·0	6
78·8	5	20·3	6	71·4	6
77·4	6	17·2	5	70·6	6
75·5	6	15·5	6	69·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
4570·1	6+	4361 0	6+	4192·7	6+
69·5	6+	57·4	6+	90·7	6
65·6	5	53·0	6+	87·4	6
59·3	6+	42·4	6+ br.	79·4	6
56·3	6+	39·8	6	71·1	6
52·5	6+	28·7	6+	67·0	6+
49·8	6	23 0	6+ br.	66·6	6+
45·3	6+	09·5	6+	62·3	6
44·0	6	07·5	6+	60·7	5
34·2	6	07·0	6	58·5	6
33·4	6+	03·3	6+ br.	55·0	6+
31·1	5	4292·4	6	50·5	6
28·2	6+	90·3	6	45·3	6
27·0	6+	87·5	6	43·8	6+
12·4	6	86·0	6	40·6	6+ br.
12·0	6	83·6	6+	39 5	6
4494·9	6	81·2	6+	32·2	6+
84·1	6	80·7	6+	23 3	6+
78·5	6	77·7	6+ br.	22·4	6+
71·9	6	69 6	6+	21·47	2
71·7	6	68·5	6+	18·90	2
69·7	6	63·8	6	16·0	6
67·0	6	57·6	6+	10·7	5
45·9	6	52·5	6	4096·7	6+
45·2	6+	49·3	6+	96·2	6+
43·4	6+	48·3	6	95·3	6+
32·0	6	45·8	6+	92·5	3
17·4	6	44·5	6	89·5	6+ 2 AE.
14·0	6	34·2	6	86·5	4
03·8	6+	25·3	6+	82·6	6
02·7	6+	22·4	6+	80·7	6
01·7	6+ Ni	20·5	6	77·6	6
4392·1	6	15·0	6+	68·7	5
91·8	6	14·3	6+	66·5	4
88·2	6+	11·5	6	63·3	6+
80·2	6+	10·0	6+	62·0	6
75·7	6	08·7	6+	58·7	5
75·3	6	07·6	6	58·4	5
73·8	6	02·9	6	57·4	6
71·3	6	4195·7	6+ br.	57·2	6

λ	i	λ	i	λ	i
4055·6	6+ br. (Mn)	3974·9	5	3914·5	6
54·2	6	73·3	5	14·3	6
53·2	6	72·8	5	13·7	6+
49·5	6	69·4	5 (Fe)	13·3	6
48·3	6+	68·6	6+ Ca (L)	10·6	6+
45·5	5	66·7	6+	10·0	5
35·7	5	65·3	6+	08·5	6+
34·6	6 Mn	63·9	6	06·4	5
33·2	6 Mn	63·7	6	04·9	6
30·9	6 Mn	61·2	5	04·3	6
30·2	6+	60·0	6+	02·3	6
29·2	6+	58·1	5	00·3	6
27·2	6	53·1	5	3898·6	6
23·5	6	52·5	6	97·8	6+
11·1	5	51·8	6	97·0	6
19·3	6+	50·7	6	96·1	6
18·2	6+ Mn	47·3	6	95·8	6
16·8	6+	46·7	6	95·1	4
14·1	5	45·5	5	94·13	1
12·4	6+	42·7	6	93·2	6
11·1	6+	41·8	5	92·2	6
08·4	6	41·1	5	91·9	6
08·0	6	40·0	6	90·9	6
07·4	6	39·0	6+ br.	90·7	6
06·5	6+	36·1	3	87·1	6
03·7	6	35·4	6+	86·5	6
3998·1	3	34·8	6	86·2	6
97·4	6+	34·1	6	85·4	6
95·55	2	33·8	6 Ca	84·7	5
91·8	5+	29·5	6	83·4	6
90·5	6	28·6	6	81·9	3
87·3	6	28·4	6	81·3	6
85·7	6	28·0	6	81·1	6
85·3	6	25·4	6	76·9	5
83·2	6+	25·0	6+	74·05	2
80·4	6+	22·9	6 d. (Fe)	73·17	1
79·7	5	20·9	6	72·0	6
78·8	5	20·3	6	71·4	6
77·4	6	17·2	5	70·6	6
75·5	6	15·5	6	69·8	6

λ	i	λ	i	λ	i
3863·8	6	3808·2	6	3749·6	5
62·5	6+ br.	07·2	6 Ni	48·3	6
61·3	3	06·8	6 Mn	45·6	3 (Fe)
58·5	5 Ni	05·8	6	43·0	6
56·9	6	03·9	6	42·5	6+
55·0	6	02·9	6	39·5	6 d.
52·8	6	02·0	6	37·0	6 Ni
52·0	6	01·4	6	36·1	5
50·9	6	00·4	6+	34·3	5
45·57	1	3798·1	6	33·6	4
44·4	6+	96·0	6	32·5	3
44·0	6	92·7	6+	31·4	6
42·12	2	92·0	6+	30·6	4
41·6	6	89·5	6+	29·0	6
37·6	6	88·9	6	26·8	6
36·1	6	87·6	6	22·6	6 Fe
35·9	6	85·5	6+	17·5	6
35·7	6	83·8	6	12·3	6
34·4	6 Fe, Mn	83·6	6 Ni	11·8	6
33·1	6	82·4	6 d.	09·0	4
32·5	6	81·0	6	07·6	5
31·9	6 Ni	80·0	6	07·3	6
27·2	6	79·2	6	06·8	6
25·4	6	78·5	6	06·5	6+
24·5	6	77·7	6	05·7	6
23·7	6	77·2	6+	04·9	6
21·3	6	75·7	6 Ni	04·2	3
20·1	6	74·7	6	02·3	3
19·2	6+	72·2	6+ br.	01·6	6
18·1	6	69·6	6 Ni	3695·4	6
17·0	6	69·2	6+	94·6	6
16·6	4	65·5	6	93·6	4
16·4	4	63·6	6	93·3	4
14·6	6	60·6	6	91·0	5
14·1	6	59·9	6	86·7	6
13·4	6	55·5	5	85·8	6
12·5	6	54·8	5	85·2	6
11·2	6	52·9	6	84·7	5
10·0	6+	51·7	6	83·2	3
09·2	6+	50·1	5	81·5	4

λ	i	λ	i	λ	i
3680·6	6	3619·55	2	3569·0	5+
76·7	3	18·0	6	68·7	6+
74·3	6 Ni	17·9	6	67·9	6+
70·6	6 Ni	15·5	5	67·5	6+
70·3	6	13·7	6+	66·4	5 Ni
64·3	6	12·8	6 Ni	65·1	4
62·3	3	11·9	4	64·3	6
61·0	6	10·6	5 Ni	63·7	6
58·0	6	09·8	6	63·0	5
57·1	6	09·4	6	62·5	6
56·3	6+	07·8	6	62·2	5
55·2	6+	06·1	5	61·2	5+
54·6	5	05·6	3	60·97	2
52·7	4	05·1	6	60·5	6
51·4	6	04·6	6	58·7	5
49·5	5	02·7	6	57·6	6
48·2	6	02·22	2	57·2	6
47·8	5	01·0	6	53·8	6+
47·2	6	3597·7	5 Ni	53·1	5
45·5	6	97·4	6	52·8	6
45 3	6	96·6	5	51·6	6
43·6	6+	95·00	2	50·7	3
43·3	5	91·7	6	50·0	6
41·9	5	89·8	6	48·5	5
39·7	4	89·3	6	47·6	6
38·4	6	87·36	1	46·7	6
37·4	6	85·8	6	45·1	5
36·9	5	85·3	3	43·3	3
34·9	4	84·9	5	42·6	6
33·5	6	84·0	6+	39·7	6+
33·0	4	82·7	6	37·8	6+
32·1	6	82·0	6	36·1	5
31·5	3	80·3	6	34·7	6
30·4	6	79·1	5	33·46	2
30·0	6	78·2	5	31·7	6
27·9	3	75·5	3	30·6	6
26·3	5	75·1	3	29·96	1
25·1	5	73·1	6	29·2	3
21·33	2	71·9	5	28·2	6
20·6	6	69·58	1	27·00	2

λ	i		λ	i		λ	i	
3524·6	3	(Ni)	3483·1	6		3449·32	2	
23·60	1		82·3	6+		47·5	6	
23·0	6		81·2	6+		47·3	6	
22·6	6+		80·2	6		46·5	3	
21·70	2		78·7	5		46·3	6	Ni
20·2	4		78·0	6		45·6	6+	
19·3	6		77·5	6		43·82	2	
18·53	2		76·6	6+		43·4	6	
16·0	6		76·5	5		43·2	4	
15·2	4	Ni	75·6	6		42·2	6	
14·4	6		74·6	9		41·4	6	
14·3	6		74·11	1		41·3	6	
13·58	2		72·7	5		40·8	6	
12·80	1		71·5	5+		39·0	5	
10·52	2		69·2	6		38·0	6	
09·92	2		68·7	6		37·2	6	
06·45	1		68·3	6		35·9	6	
05·3	6		67·7	6		35·6	6	
04·9	5		67·5	6		33·7	5	Ni
04·3	6		65·96	1		33·18	2	
02·7	4		65·5	6		32·5	6	
02·30	2		63·01	1		31·73	2	
01·8	4		61·8	5	Ni	31·1	6	
01·0	6	Ni	61·3	5		30·9	6	
3499·3	6+		60·5	6		30·0	6	
97·5	5		58·6	5	Ni	29·5	6	
96·8	4		58·5	6		29·0	6	
96·0	5+	br.	57·8	6		28·5	5	
95·78	1		57·1	5		26·6	6	
93·1	5	Ni	56·6	6		24·7	5	
92·1	6		56·2	6		24·0	5	d.
91·5	5		55·6	6+		23·0	6	
90·8	6		55·4	4		21·9	6	
89·58	1		53·71	1		21·0	6	
87·9	5		53·0	5		17·9	5	
87·1	6		52·6	6		17·32	2	
85·6	5+	br.	52·1	6		15·9	4	
85·4	4		51·8	6		14·9	3	
83·9	5		51·3	6	d.	13·7	6	
83·6	3		49·62	2		12·80	2	

λ	i	λ	i	λ	i
3412·48	2	3366·0	6	3320·5	6
11·7	6	65·3	6+	20·0	6
09·32	2	64·5	6	19·6	5
07·1	6	63·9	6	19·4	6
05·28	1	63·4	6	18·6	6
03·7	6	63·0	5	15·7	6 Ni
03·3	6	61·7	5	15·2	6
02·3	6	61·5	6+ br.	14·2	4
02·2	6	60·5	6+ br.	13·3	6
02·0	6+	59·4	5	13·1	6
3399·3	6+	58·8	5	12·3	5
99·0	6	58·3	6+	08·9	6
95·50	2	57·0	6	08·6	6
93·1	5	56·6	6	07·3	5
91·2	5	56·1	6	06·5	6
90·6	6	55·3	6	05·8	6
88·30	2	54·48	2	05·2	6
87·8	4	52·9	5	04·9	6
85·4	4	51·7	6	04·2	6
84·1	6	51·3	6+	04·0	6
82·3	6	50·5	6	03·4	6+
81·7	6	48·3	5	01·9	6+
81·2	6	47·1	5	01·3	6+
80·7	5 Ni	46·4	6	3298·8	5
78·9	5	44·2	6	97·6	6+ br.
78·5	6	42·9	5	96·6	6+ br.
77·2	5	42·1	6	94·7	6
76·4	6	41·5	5	94·1	6
75·2	6+	40·0	5	93·5	6
74·8	6	37·3	6	92·2	6
74·4	5	36·6	6	90·6	6+ br.
74·2	6	34·3	4	87·7	6
73·4	5	33·5	5	87·4	5
72·2	6	29·6	5	86·0	6+
71·1	4	28·4	6	83·9	6
70·5	5	27·1	5	83·57	2
69·7	5	25·4	5	82·3	6+ br.
68·8	6	24·0	6	81·5	6+
67·3	4	23·0	6	79·4	5
66·4	6	22·3	4	79·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
3278·3	6	3235·7	5	3188·5	4
77·8	5	34·7	6	86·4	5
77·5	5	34·3	6	86·0	5
76·6	5+	33·1	4 (Ni)	84·4	6
74·10	2	31·0	6	82·2	5
72·0	4	28·8	6	80·4	6
71·4	6	28·2	6	80·1	6
70·5	6	27·1	5	79·6	6
69·7	6	26·3	6+	77·3	4
69·3	6	25·3	5	75·0	5
68·2	6+	24·8	5	74·2	5
67·9	6+	21·8	6	73·2	6
65·5	6	21·4	6+	72·1	6+
65·0	5	19·2	5	71·4	6+ br.
62·5	5	18·0	6	69·8	4
61·8	6+	17·2	6	68·1	5
61·2	6+	17·0	6	64·6	6
60·9	3	15·4	6	63·7	6
60·0	6+	14·2	6	61·7	5
58·5	6	13·5	6	61·2	6
58·2	5	12·1	6	59·8	5
56·5	6	10·9	5	58·8	4
54·3	3	10·3	5	56·7	6+
50·9	6 Ni	06·2	6	55·8	6
50·1	5	04·1	6+ d.	54·82	2 d.
48·5	6 Ni	03·2	6	52·8	5
47·70	2	02·3	6	50·8	6+
47·30	2	00·5	6	49·4	5
47·2	5	3199·4	6	47·1	4
46·3	6	98·7	6	44·1	6
46·0	6	98·5	6+ br.	40·7	6
45·7	6	97·2	6	40·0	4
45·5	6	97·0	6	37·9	6
44·2	4	96·6	6	37·4	4
43·8	6	96·2	6	36·9	6
43·2	6 Ni	94·1	6+	34·2	4 (Fe, Ni)
39·1	6+	93·2	6	32·3	6
38·5	6+	92·3	6	30·9	5
38·0	6+	91·3	6	29·6	6
37·2	5	89·8	6	29·1	6

λ	i	λ	i	λ	i
3127·4	6	3089·7	5	3042·6	5
26·9	6	88·7	6	41·9	6
26·7	6	88·0	6	41·7	6
23·0	6+ br.	86·9	3	41·0	6
21·6	4	86·6	5	39·7	6
21·5	4	82·9	6+	38·0	5 Ni
18·4	5	82·7	3	36·8	6
16·8	6+	81·0	5	35·5	6
15·8	6+	79·5	5	34·7	4
15·2	6+	78·7	6+	34·5	5
14·5	6	77·8	6+	34·2	6
14·3	5	77·3	6+	32·6	6+
13·6	5	76·3	6	32·0	6
12·3	6	73·6	5	31·4	6
11·4	6	72·4	3	31·2	6+
10·9	6	72·1	5	28·4	6+
10·7	6+	71·0	6	26·7	6+
10·2	5	68·7	6	26·5	4
09·6	5	66·5	6	24·5	6
09·3	6	64·7	5 (Ni ?)	23·7	6
07·6	6	64·5	5	22·8	6+ br.
07·2	6	63·6	6	22·5	6
05·9	6	62·3	6+	20·1	6
05·5	6	61·9	3	19·9	6
04·1	6	61·0	6	19·3	6 Ni ?
03·8	5	60·1	5	17·7	3
02·5	5	58·6	6	17·5	6
02·0	5 (Ni)	57·7	4 (Ni)	15·8	6
01·7	4 (Ni)	56·8	6	13·7	4
00·9	6	55·2	6	12·1	4 (Ni)
00·6	6	54·8	6	11·7	6
00·2	6	54·4	5 Ni	11·2	6+
3099·2	6 Ni ?	53·0	6	10·1	6
98·3	5	50·9	3 (Ni)	08·9	5
97·3	6	50·6	6	08·3	6
96·9	6	50·2	6	06·1	6
96·5	6	48·9	4	05·8	6
95·8	6	48·3	6	05·0	6+ br.
93·3	6+ br.	46·3	6	03·8	4 (Ni)
90·4	5	44·10	2	02·6	3 (Ni)

λ	i	λ	i	λ	i
3001·7	6+ br.	2942·2	6	2894·9	6
00·7	5	39·4	3 (Mn)	92·4	6+
2999·8	6	34·1	6	90·5	3
96·7	6	33·7	6	89·7	5
95·2	5	33·1	4 (Mn)	88·6	6+
94·5	5 (Fe)	30·5	4+	86·5	5
92·7	5 Ni	29·7	5	83·8	6
90·4	6	29·0	6	83·5	6
89·7	3	28·1	6	82·3	6
88·2	6	27·8	5	82·0	6
87·2	3	27·0	6	80·5	6+ br.
84·2	6 Ni	25·6	6+	79·7	6+
82·3	6	24·8	6+	78·6	6
81·7	5 d.	24·2	6+	76·9	6
78·1	6	21·7	6+ br.	76·6	6
75·6	6	19·7	6	74·2	6
73·3	5	18·7	4+	74·1	6
71·7	6+ br.	16·7	6+	73·5	6
71·1	6+	16·2	6+	73·0	6
68·7	6	15·5	6+	72·6	6
68·3	6+	14·7	6	71·28	2
65·3	6+	13·7	6	70·2	5+
64·8	6+	12·1	6+	68·3	6+
63·0	6+	11·6	6+	67·5	6+
61·7	6+ d.	10·1	6+	66·7	6+
61·3	6	08·9	6+	65·6	6+
61·0	6	07·7	6+	63·8	6 Ni
59·7	6	07·0	6	62·7	6
57·8	6	05·6	6+	61·5	6+
55·5	6	05·2	6+	59·7	6
54·83	1	04·3	6	58·5	6
54·1	6 Fe	03·8	6+	57·3	6+ br.
54·0	6	03·2	6	56·2	6
49·3	3 (Mn)	00·2	6 Mn	55·8	6
48·0	6 Fe	2899·9	6	53·5	6+ br.
47·8	6 Fe	98·8	6	52·2	6
44·5	6 Fe	97·9	6+	51·0	6
44·0	6	95·9	6	50·1	6
43·2	3+	95·5	6	49·7	6
42·5	6	95·3	6	48·4	5+ br.

λ	i	λ	i	λ	i
2845·8	5	2803·9	5	2760·5	6
44·2	6	02·7	5	58·6	6
42·5	6 Ni	02·3	6+ br.	58·4	6
40·8	6	01·2	6	58·0	6
38·0	6+ br.	2799·2	6	57·4	6
37·3	5	99·0	6	54·7	6+ br.
35·8	6	98·5	5	92·4	6
35·1	5	97·2	5	51·0	6
34·5	6	97·0	5	50·4	6+ br.
34·0	6	96·3	5	50·2	6 Fe
31·7	6	95·7	4 (Ni)	49·53	2 (Fe)
28·7	6+	94·9	5	48·6	6
27·4	6	94·0	4+ br.	45·3	5
27·0	6	51·7	6	42·5	6
25·3	3	91·1	6	42·2	6
23·7	6	89·6	6	41·6	6
23·3	6+ br.	86·1	5	40·5	6
21·9	6+	85·6	5	39·2	5
20·1	6	82·8	6	38·5	6
19·5	6	82·3	6+	37·5	6
19·0	5	81·6	6	37·2	6
18·8	6	80·1	6	34·9	5+ br.
18·2	6	79·6	6	33·8	6
17·2	6	79·0	5	33·2	5
16·3	5+ br.	78·3	6	31·3	5
15·9	6	76·3	3	31·0	6
15·7	5	75·2	5+ br.	29·4	6+
13·4	6	74·0	6	29·0	6+
13·0	6	73·0	6	28·1	5+
12·7	6	71·0	6+ br.	24·6	6
11·7	6+	69·2	5	23·7	6
11·0	4	67·0	5+	23·0	6+
09·5	6	66·4	5	22·2	6
09·2	6	64·9	6	21·1	5
07·2	5	63·9	5	20·0	6
07·1	6	63·2	6+ br.	19·1	6
05·8	6	62·4	6+ br.	17·3	6+
05·6	6	62·1	6	16·5	6
04·7	6	61·6	6	16·1	5
04·2	6+	61·5	6	14·55	2 (Fe)

λ	i	λ	i	λ	i
2713·5	6+ br.	2666·8	6+ (Fe)	2619·8	5
11·9	6+	66·3	6	18·8	5
10·4	6	65·3	6	15·3	6+ br.
09·2	5+	63·58	1	14·39	2
08·1	5	62·7	6+	13·5	4
07·6	5+	62·2	6+	12·6	5+
06·8	3+	58·1	6	10·4	6
06·0	6	56·5	5+ br.	09·0	6
04·3	6	53·74	2	08·1	6
02·5	5	52·8	5	05·9	4
01·8	6	52·4	6	05·7	4
00·6	6	50·3	6	04·5	5
2698·0	6	48·70	2	03·3	6
97·1	5	46·5	6	00·9	6
95·9	6	43·2	6	2594·4	6
94·75	1	41·2	6+	94·2	6
93·1	5+	41·0	6+	93·8	5
92·4	6+	40·5	6	93·5	6
89·8	5	39·3	6+	91·5	6
89·2	6+ br.	38·1	6	89·1	5+
87·0	6+ br.	37·9	6	87·25	1
86·3	6+ br.	37·4	5	85·3	6
85·4	6	36·1	5	83·2	5
84·6	4+	34·9	5	82·30	1+
83·5	6+	32·30	1	81·4	6
82·8	6+	31·4	5	80·38	1+
82·2	6	31·1	5	76·2	5 Mn
82·0	6	30·5	6	75·6	6+ br.
80·5	5	28·8	6	74·9	4
80·3	6	27·7	6	74·5	5
79·9	6	27·0	6+	72·3	6
78·2	5	25·5	6	69·8	5
76·2	4+	25·3	6	69·0	6
74·0	6	24·5	6+	67·4	5
73·7	6	24·0	6	67·0	6
73·3	6	23·7	6	65·5	5
72·3	5+ br.	22·6	6	64·18	1
70·8	5	22·4	6	62·7	6
69·9	5+	22·0	5+	62·3	6 d.
68·3	6+ br.	21·0	6+ br.	61·0	6

λ	i	λ	i	λ	i
2560·10	2	2529·6	6	2490·4	4
59·48	1	29·1	6	87·4	5
58·6	6	28·68	2	87·2	5
57·4	5	28·3	5	86·5	3
56·8	5	26·2	6	85·4	4
55·2	6	25·08	2	84·4	6
54·2	6	24·7	5	84·3	6
54·0	6	23·0	5	84·1	6
53·3	6	21·5	4	83·6	5
53·0	6	21·0	6	83·3	6
52·4	5	19·90	1	82·2	6
50·6	6+	17·9	6	80·2	6
49·9	6+	17·5	5	79·1	5
49·4	6+	15·6	6	78·5	6
48·6	6	14·0	6	78·2	5
48·4	6	13·1	6	77·4	5
46·80	2	12·4	6	77·3	5
46·3	5	12·2	6	76·6	6
46·0	6 Ni	11·9	6	76·4	6
45·8	6	11·23	2	73·1	6
45·1	5	10·9	5 Ni	72·9	6
44·6	5	09·3	6	71·8	6+ br.
44·3	5	08·1	5	70·3	6
43·8	6	06·8	6	69·5	5
43·4	6	06·51	1	67·0	4
42·00	1+	05·7	6+	64·2	3
40·7	3	04·0	6	62·1	6
40 3	6	00·9	6	61·8	6
38·9	6	00·6	6	61·2	6
37·6	6	2498·8	4	60·2	6
36·8	6	97·6	5	59·3	5
36·6	6	96·8	6	56·2	6
36·1	5	95·5	6	55·5	6+
35·7	6	94·7	6	54·5	6
35·4	6	93·6	6	54·2	6
34·5	6+	92·4	6	53·8	6
34·0	3	92·2	6	53·3	5
33·8	5	91·4	6	52·5	5
31·9	6+	91·2	6	51·6	6+
30·1	4	90·8	6	50·0	3

λ	i	λ	i	λ	i
2449·2	5	2414·2	5	2376·9	6
47·8	3	11·6	5	75·2	5
46·6	6	09·5	6+	73·7	6
46·0	3	08·8	5	73·4	6
43·8	3	08·4	5	73·1	6
42·6	3	07·7	5	72·5	6
41·7	5	07·5	5+	71·9	5
41·1	6+	06·3	6+	71·6	6
39·0	5	06·0	6+	70·7	5
38·4	6+	05·2	6	69·7	6
38·0	5	04·6	5	67·4	6+ br.
37·0	5	04·3	5	67·2	6
36·7	6	03·8	5	66·7	6+
36·3	6	02·9	6	65·6	6+
35·1	5	02·1	6	65·2	6
34·2	6	01·6	6	65·0	6
32·6	4	2399·1	6	63·82	2
32·3	5	98·4	5	62·6	6
31·7	6	97·4	3	62·3	6
30·8	6	96·8	6	61·6	5
30·6	6	95·5	5	61·1	6
29·9	5	94·5	5	60·7	5
29·5	6	94·0	6	60·4	5
28·4	5	92·6	5	59·0	6
26·6	6	91·2	6	58·2	5
26·2	5	89·5	5	56·6	6
25·0	5	88·8	3	56·5	6
23·7	5 d.	86·7	5	55·6	6
22·6	6+	86·4	5	55·0	6
22·1	6	85·6	6	54·5	6
21·0	6	84·0	6	53·4	4
20·8	5	83·4	4	52·2	6
19·3	6	83·1	6	51·9	5
18·5	5	82·3	5	51·2	5
17·7	5	81·9	6	48·4	6+ br.
17·0	5	81·7	4	47·8	5
16·2	5 Ni	81·0	6	47·4	5
16·0	5	80·5	6	47·2	6
15·3	5	78·60	2	46·6	5
14·5	6	77·1	6+	45·5	5

λ	i	λ	i	λ	i
2345·4	6	2306·1	6+	2270·4	6
44·7	5	05·1	6	69·8	6
44·3	5	04·1	6	68·3	6
43·6	6	03·0	6	66·5	5
42·4	6	02·5	6	64·6	6
41·2	5	02·0	6	61·7	6 d.
40·3	6	01·4	5	60·1	5
39·5	6	00·2	6	56·7	5
39·0	5	2299·9	6	56·1	6
38·7	6	98·9	6	53·5	5
38·0	5	97·3	6	52·3	6+ br.
37·5	6	96·7	6	51·2	6+
37·1	6	96·0	6	50·5	6+
36·3	5	95·2	6	50·1	6+
34·8	6	93·5	6	48·7	6
34·2	5	93·4	5	48·2	6
33·6	6	92·1	5	46·9	6
33·1	6	91·5	6	46·2	6+
30·4	5	90·5	6	45·2	5
29·2	5	87·9	6	42·8	6
27·7	5	87·8	6	42·6	6
27·2	6	87·2	6	37·1	6
26·5	5	86·3	4	32·1	5
26·1	5	83·6	6	30·5	5+
24·3	5	82·5	6	29·1	6
20·5	6+	82·0	5	25·0	6
19·9	6	81·2	6	20·3	5+ br.
18·4	6	80·6	6+	13·9	5
18·2	6	78·9	6	11·5	6
17·1	5	78 7	6	06·3	5
16·1	6	77·4	6	05·9	6
14·2	5	77·0	6	05·6	6
13·7	6	76·6	6	05·2	6
12·6	6	76·3	6	03·0	6
11·6	5	75·8	6	2193·7	5
09·3	6+	75·5	6	92·6	6
09·0	6	73·3	6+	92·3	6
07·7	5	72·4	6	90·9	6
07·5	6	71·4	6	90·7	5



F. Exner und **E. Haschek:** Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.

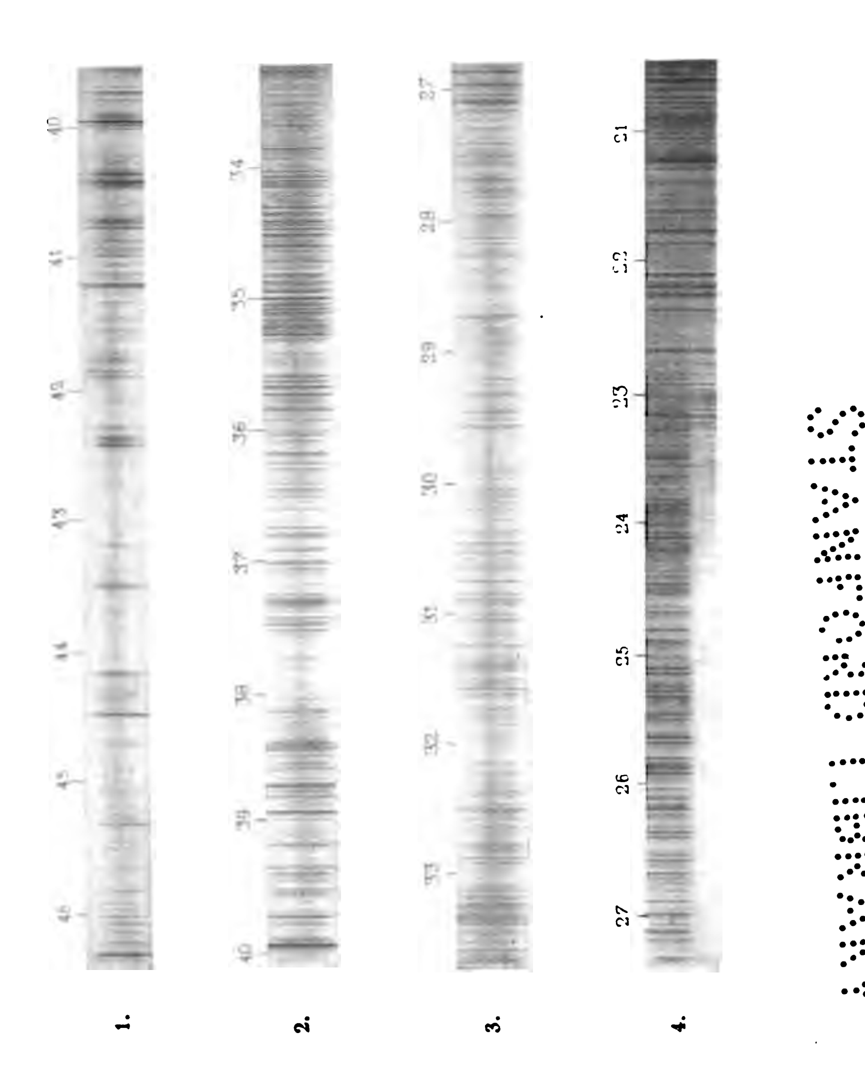
1. 2. 3. 4.

Nickel.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

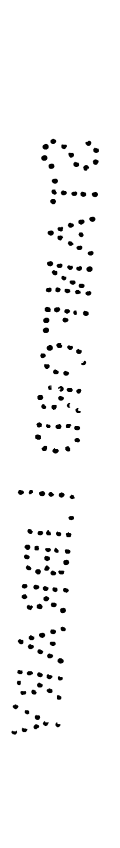
Taf. II.

F. Exner und E. Haschek: Ultraviolette Funkenspectra der Elemente.



Cobalt.

Heliogravure und Druck der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.



Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines mechanischen Impulses in gespannten Drähten

von

Dr. **Stefan Meyer.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 5 Textfiguren.)

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mechanischer Impulse in Drähten wurde bisher noch nicht direct gemessen. Man bediente sich, um dieselbe zu erfahren, meist akustischer Methoden, wie dies z. B. Masson, Wertheim, Warburg, Stefan, Kundt, Chladni und Andere thaten, oder aber berechnete sie aus Elasticitätsmodul und Dichte des betreffenden Körpers.

Wenn nun auch diese Methoden, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu finden, bisher einwurfsfrei geblieben sind, ist es doch von einer gewissen Bedeutung, directe Messungen vorzunehmen, sei es auch nur um eine einfache Bestätigung der bisher gefundenen Resultate zu erhalten.

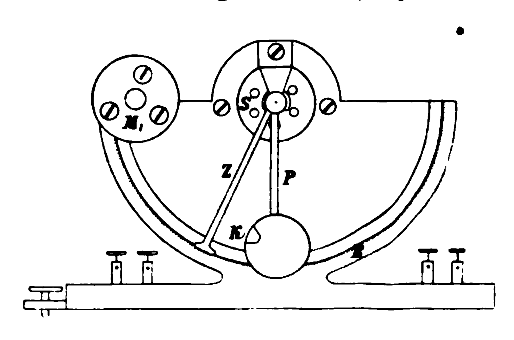
Solche Messungen zu machen, ist mir mittelst eines Apparates von Navez[1] gelungen.

Ein Pendel *(P)* (Fig. 1), das an einer Seite einen Eisenkern *(K)* besitzt, wird durch einen Elektromagneten M_1 gehalten. Im Augenblicke, da der M_1 magnetisirende Strom unterbrochen

[1] Bezüglich genauerer Beschreibung des Apparates verweise ich auf Mousson, Die Physik auf Grundlage der Erfahrung, III, S. 608, wo auch mehrere Schaltungsmethoden angegeben sind.

wird, fällt das Pendel und nimmt einen hinter demselben angebrachten, mit Nonius versehenen Zeiger Z durch Reibung mit. M_2 ist ein zweiter Elektromagnet, der, sobald er erregt wird, eine Eisenscheibe S, die mit dem Zeiger starr verbunden ist, anzieht und festhält. Aus der Ablesung der Grade des Theilkreises lässt sich die Fallzeit des Pendels ermitteln.

Der verwendete Apparat stammt von J. Jasper in Liege und zeichnet sich durch ausgezeichnete Zapfen und Lager aus,



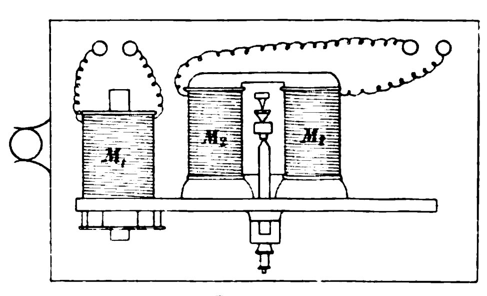


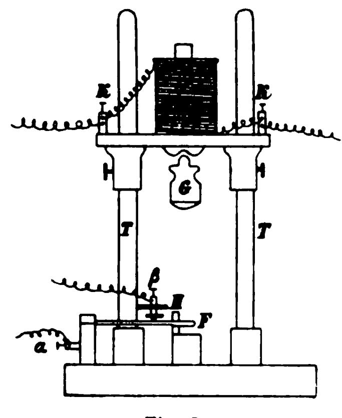
Fig. 1.

die nahezu reibungslos wirken. Tabellen, die ich auch durch Vergleichung mit Stimmgabelschwingungen controlirt habe, geben die berechneten Fallzeiten, die der Gradeintheilung des Bogens B entsprechen, an.

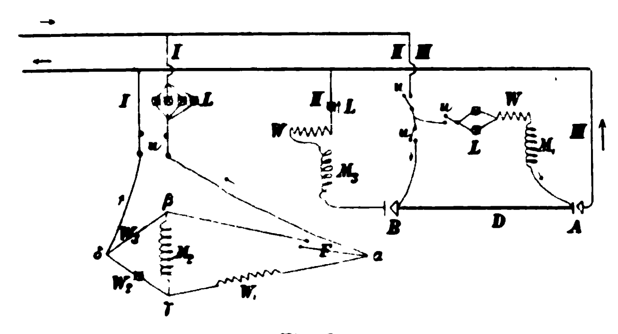
Da die zu messenden Zeiten sehr klein sind, muss, um das Pendel möglichst während seiner schnellsten Bewegung beobachten zu können, ein Fallapparat (Fig. 2) vorgeschaltet werden. Der erregte Elektromagnet M_3 trägt ein Gewicht G. Bei Stromunterbrechung fällt dieses ab, trifft die Feder F und löst hiedurch die Verbindung zwischen den Punkten α und β.

Die Feder F wird durch einen Sperrhaken H am Zurückschnellen verhindert. Die Träger T sind von den Klemmen K isolirt.

Der Magnet M_2 (Fig. 1) wurde nicht durch Stromschluss, sondern durch Stromöffnung erregt, wie aus dem Schaltungsschema Fig. 3 hervorgeht, da sich letzteres im Verlaufe der Untersuchung als bei weitem exacter herausstellte.


Fig. 2.

Es wurden drei Stromkreise gebildet. I enthält den Arretirmagneten M_2, in einer Wheatstone'schen Brücke, so dass, so lange bei F Contact ist, kein Strom zwischen β und γ circulirt. Wird F, die Feder in Fig. 2, durch das herabfallende Gewicht getroffen und die Verbindung α—β unterbrochen, so wird auch M_2 erregt. L sind Glühlampenwiderstände, $w_1 w_2 w_3$ Regulir-


Fig. 3.

widerstände, und zwar w_2 im Verhältniss zu w_3 sehr gross gewählt, u ein Umschalter. Die Stromkreise II und III enthalten je einen der Elektromagnete M_3 und M_1 und je eine Contactstelle, zwischen denen der zu messende Draht D gespannt ist. L und W sind Glühlampen, respective Regulirwiderstände, u Unterbrecher.

Zur Messung wurden Drähte von circa 18 *m* Länge verwendet, die horizontal durch eine Zimmerflucht des Institutes gespannt waren.

Als Contacte A und B dienten zwei Schlitten (Fig. 4), die auf horizontalen Latten, welche an den beiden Enden der Beobachtungsräume sich befanden, leicht verschiebbar waren und durch passend angebrachte Schrauben s, s festgestellt werden konnten. Der Draht wurde mittelst Fadenschlinge aus Zwirn an das Häkchen h gehängt und zur Unterbrechung des Contactes bei A durch einen Bunsenbrenner der Faden durchgebrannt. Die Federn F waren so stark gewählt, dass der Contact sich leicht und plötzlich öffnen musste.

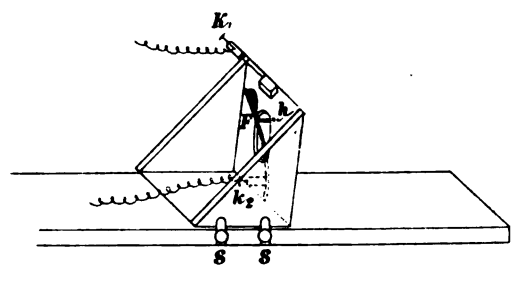


Fig. 4.

Der Vorgang ist sonach folgender. Zur Beobachtung wird das Pendel P mit dem Eisenkern an den Magneten M_1 gebracht und das Fallgewicht G an den Magneten M_3 angehängt. Die M_1 und M_3 erregenden Ströme sind so regulirt, dass Pendel und Gewicht eben noch getragen werden. Die als Regulirwiderstände vorgeschalteten Glühlampen dienen hiebei auch als Indicatoren des guten Contactes. Nun wird die Fadenschlinge durchgebrannt und so der Contact A gelöst: das Pendel fällt; der Impuls pflanzt sich durch den Draht fort, und es wird der Contact B gelöst: das Gewicht G fällt; das Gewicht trifft auf die Contactfeder F des Fallapparates: M_2 wird erregt, zieht die Scheibe S (Fig. 1) an und hält den Zeiger Z an einem bestimmten Punkte fest. Aus der Gradablesung an dem Bogen B (Fig. 1) erhält man die verflossene Zeit, welche die Summe aus Fortpflanzungsdauer im Drahte und der Fallzeit des Gewichtes darstellt.

Um alle übrigen Fehlerquellen zu eliminiren, wurde ein kurzes und ein langes Stück Draht der Messung unterzogen und in beiden Fällen alle Verbindungen gleich belassen, so dass aus der Differenz unmittelbar die Fortpflanzungszeit im Drahte bestimmt werden konnte.

Zur Vergleichung der Resultate mit den aus Elasticitätsmodul und Dichte berechneten Werthen mussten diese Grössen bestimmt werden. Die Messung des Elasticitätsmoduls geschah an einem Apparate, den Herr Rudolf Ludwig zur Zeit im Institute gerade zusammengestellt hatte und demnächst beschreiben wird; specifisches Gewicht und Querschnitt wurden aus der Gewichtsabnahme in destillirtem, ausgekochtem Wasser gewonnen.

Die Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten wurden als Mittelwerthe aus Beobachtungsreihen von 50 bis 70 Messungen erhalten. Als Beispiel für die Genauigkeitsgrenze, sowie für die Berechnungsweise diene der Stahldraht.

Es ergab an der Gradscala die lange Drahtstrecke (Länge = 18·01 *m*) die Werthe:

53·4 °	54·05°	54·05°	54·3 °	53·75°
53·9	53·75	53·7	54·4	53·7
53·8	53·9	53·6	53·95	54·05
53·4	53·65	53·8	53·55	53·65
53·7	54·0	53·95	53·85	53·7
54·05	53·9	54·2	54·25	53·75
53·5	54·1	54·15	53·9	54·0
53·85	53·8	53·75	53·5	53·45
53·85	53·75	54·15	53·8	54·1
54·05	54·2	54·1	53·85	54·0

wovon das Mittel 53·87° ist.

Der mittlere Fehler des Mittelwerthes beträgt dann 0·031° (entsprechend 0·00005 sec.), der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerthes 0·021° (entsprechend 0·00003 sec.).

Die kurze Drahtstrecke (Länge = 0·26 *m*) lieferte die Werthe:

52·1°	51·5°	52·05°	52·0°	51·8°
51·5	51·9	51·75	52·0	51·95
51·0	51·8	52·2	51·7	51·65
51·65	51·05	51·15	51·65	51·25
51·85	51·4	51·65	51·75	51·65
51·65	52·1	51·7	51·85	51·25
51·65	51·7	52·35	51·65	51·05
51·2	51·6	51·65	51·95	51·5
51·5	51·9	51·15	51·75	51·15
51·4	51·45	52·05	51·85	51·2
51·6	52·1	51·85	51·5	51·95
51·15	51·8	51·25	51·45	51·8

wovon das Mittel 51·64° ergibt.

Der mittlere Fehler des Mittelwerthes ist 0·041° (entsprechend 0·00006 sec.),

der wahrscheinliche Fehler des Mittelwerthes 0·027° (entsprechend 0·00005 sec.).

Die hiezugehörigen, der Tabelle entnommenen Zeiten und die daraus bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt die Zusammenstellung:

	Bogengrade	Aus der Tabelle entnommene Zeit in sec.	Fortpflanzungsdauer pro 1 *m* in sec.	Fortpflanzungsgeschwindigkeit in *km*/sec.
Lange Drahtstrecke (18·01 *m*)	53·87°	0·06324		
Kurze Drahtstrecke (0·26 *m*)	51·64°	0·05958		
Differenz (17·75 *m*)	2·23°	0·00366	0·000206	4·85

In der folgenden Tabelle sind die auf gleiche Weise erhaltenen Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer Reihe von Drähten zusammengestellt mit den aus Elasticitätsmodul und specifischem Gewichte berechneten Grössen, sowie den aus den Tabellen von Landolt und Börnstein entnommenen Zahlen, die auf anderem Wege von verschiedenen

Forschern gefunden worden sind. Die Übereinstimmung kann in Anbetracht der Schwierigkeit der Bestimmungsmethode immerhin als genügend bezeichnet werden, obwohl in den gefundenen Werthen bloss die erste Decimale als sicher anzusehen ist.

	Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\left(\frac{km}{sec}\right)$			Querschnitt des Drahtes in Quadratmillimetern	Elasticitätsmodul E	Specifisches Gewicht σ
	nach den Tabellen von Landolt-Börnstein	gefunden	berechnet aus $C=\sqrt{9808\frac{E}{\sigma}}$			
Magnesium	4·60 $\frac{km}{sec}$	4·92 $\frac{km}{sec}$	5·43 $\frac{km}{sec}$	0·212	5268	1·75
Aluminium	5·10	5·08	4·73	0·502	6218	2·72
Eisen	5·02	5·00	4·71	0·243	17482	7·74
Stahl	4·98	4·85	5·07	0·086	20555	7·85
Nickel	4·97	4·98	4·45	0·199	17580	8·70
$Kupfer_{I}$	3·5—3·9	3·70	3·75	0·166	12813	8·94
$Kupfer_{II}$		3·57	3·38	0·512	10365	8·90
$Kupfer_{III}$		3·37	3·75	0·126	12855	8·94
$Kupfer_{IV}$		3·19	3·36	0·275	10257	8·93
$Kupfer_{V}$		3·17	3·27	0·382	9754	8·93
Zink	3·68	3·55	3·30	0·504	7988	7·18
Silber	2·61	2·54	2·57	0·223	7136	10·60
Platin	2·79	2·16	2·28	0·122	14480	21·67
Messing 40% Cu, 60% Zn	3·2—3·6	3·68	3·86	0·125	12847	8·46
Bronze 80% Cu, 20% Sn	—	4·13	3·52	0·120	11247	8·67
Nickelin 60% Cu, 30% Ni, 10% Sn	—	3·97	3·75	0·195	12570	8·74

Anhang.

Ich will es nicht unterlassen, hier auf die Beziehung zwischen Atomgewicht der Substanz und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit hinzuweisen und trage zu diesem Zwecke in der folgenden Figur erstere als Abscissen, letztere als

Ordinaten auf. Hiebei entnehme ich die nicht von mir bestimmten Werthe einiger Substanzen den Tabellen von Landolt und Börnstein.

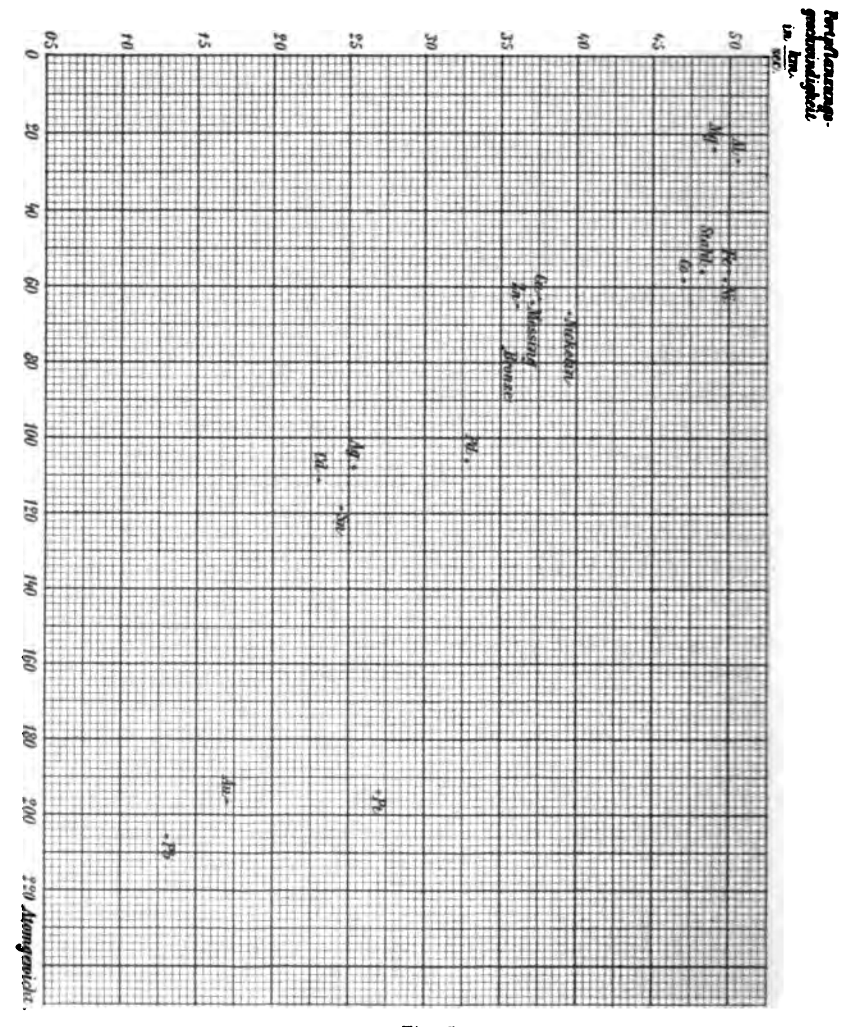


Fig. 5.

Es zeigt sich eine deutliche Abnahme der Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit dem Atomgewicht.

Leider ist es nicht möglich, wirklich reine Substanzen zu untersuchen, die von allen durch die Bearbeitung des Materiales

hineingebrachten Spannungen und Zwangszuständen befreit sind. Speciell in den oben angeführten Werthen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Kupferdrähten dürften solche Verschiedenheiten als Ursache der Abweichungen anzusehen sein.

Immerhin lassen sich aus der Zusammenstellung in Fig. 5 einige, wenn auch nicht vollkommen sichere Schlüsse ziehen.

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist sehr wahrscheinlich in einfacher Weise abhängig von der chemischen Constitution des Körpers.

2. Die Eisen-Palladium-Platin-Gruppen zeigen gegenüber den übrigen untersuchten Metallen auffallend höhere Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, was, da wir uns vorstellen müssen, dass der Impuls sich im Körper immer von einem selbständigen Theilchen zum nächsten übertragen muss, vielleicht darauf hindeutet, dass man es hier mit einer anderen Partikelgrösse als bei den übrigen Metallen zu thun hat.

3. Die betrachteten Legirungen scheinen sich hinsichtlich ihrer Componenten in der Beziehung zwischen Atomgewicht und Fortpflanzungsgeschwindigkeit additiv zu verhalten.

Diese Arbeit ist im Institute des Herrn Prof. Dr. F. Exner ausgeführt worden und gestatte ich mir, an dieser Stelle ihm für die mir freundlichst gewährte Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.

Die Stromlinien beim Abfluss einer Flüssigkeit durch eine kleine Öffnung im Boden des Gefässes

von

O. Tumlirz.

(Mit 3 Textfiguren.)

Man hat es wiederholt versucht, die Bahnen der Flüssigkeitstheilchen beim Abfluss einer Flüssigkeit durch eine kleine Öffnung im Boden des Gefässes mit Hilfe von festen oder flüssigen Körperchen, welche in der Flüssigkeit schwebten und durch eine andere Farbe bemerkbar waren, zu beobachten. Durch solche Beobachtungen schienen die Voraussetzungen mehrerer theoretischer Untersuchungen[1] bestätigt zu werden, nach welchen diejenigen Flüssigkeitstheilchen, welche zu einer bestimmten Zeit auf einer um den Mittelpunkt der Öffnung beschriebenen Halbkugel liegen, diese Eigenschaft auch bei ihrer Annäherung an die Öffnung beibehalten, so dass die Geschwindigkeit in endlichem Abstande von der Öffnung radial gerichtet und lediglich eine Function dieses Abstandes ist. Es ist aber nicht schwer, zu erkennen, dass derartige Beobachtungen äusserst ungenau sind; denn die Geschwindigkeit der Theilchen hat, wie wir später genauer sehen werden, nur in unmittelbarer Nähe der Öffnung einen grösseren Werth und nimmt mit der Entfernung von der Öffnung so stark ab, dass die Bewegung der Theilchen schon in mässiger Entfernung von der Öffnung ganz unmerklich wird. Nach dieser Methode

---

[1] Vergl. A. Winkelmann, Handbuch der Physik, I, S. 408, 1891.

kann man also höchstens constatiren, dass die Flüssigkeitstheilchen sich in der Nähe der Öffnung nahezu radial bewegen.

Um nun die Stromlinien in ihrer ganzen Länge zu sehen, habe ich von der Erfahrung Gebrauch gemacht, dass, wenn man gewisse feste Farbstoffe, z. B. Anilinviolett, ins Wasser bringt, farbige Fäden von denselben ausgehen, welche sich sehr langsam nach unten ziehen. Ich habe mir für die Beobachtung der Stromlinien mit Hilfe dieser Fäden ein grösseres, festes Gefäss machen lassen, dessen Seitenwände aus starken Spiegelglasplatten bestanden und dessen Boden aus Messing war. Das Gefäss hatte die Form eines rechtwinkligen Parallelepipedes von 500·5 *mm* Höhe, 311 *mm* Breite und 94 *mm* Dicke. In der Mitte der Bodenfläche befand sich die kreisförmige Öffnung von 1·430 *mm* Durchmesser. In jener verticalen Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Öffnung ging und das Gefäss parallel zur Breite halbirte, wurde ein Bügel eingeführt, dessen horizontaler Theil vom Boden um 200·5 *mm* entfernt war und sieben Näpfchen enthielt, von denen das mittlere sich gerade vertical über der Öffnung befand, während die anderen dazu symmetrisch und in gleichem Abstande lagen. Der Abstand ihrer Mittelpunkte betrug 29·75 *mm*.

In die Näpfchen kamen kleine Stückchen von Anilinviolett, welche durch Befeuchten und nachheriges Trocknen zum Haften gebracht wurden. Wurde der Bügel mit diesen Näpfchen in das mit Wasser gefüllte Gefäss gebracht, dann bildeten sich violette Fäden, die sich so langsam nach unten zogen, dass sie den Boden bei vollständig ruhigem Wasser erst in 25—30 Minuten erreichten. Da die Fäden gegen die leiseste Bewegung der Flüssigkeit äusserst empfindlich sind, so gelingt der Versuch nur dann, wenn die Flüssigkeit vollständig frei von Convectionen ist. Das Gefäss wurde deshalb auf einer festen Unterlage so aufgestellt, dass der Einfluss der strahlenden Wärme von Seiten der Fenster und Wände am kleinsten war. Im Sommer war die Strahlung durch die Fenster, auch wenn die Sonne nicht hindurchschien, so bedeutend, dass der Versuch fast immer misslang. Dagegen gelang der Versuch in den kühleren Jahreszeiten, wenn die Temperatur des ungeheizten Zimmers nur geringe Schwankungen zeigte, immer sehr gut.

Der Grund, warum die Convectionen einen solchen Einfluss haben, ist der, dass die Ausflussgeschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen in einer grösseren Entfernung von der Ausflussöffnung kleiner ist als die durch grössere Temperaturdifferenzen erzeugte Convectionsgeschwindigkeit.

Bei meinen Versuchen wurde das Wasser 15—20 Stunden vor dem Abfluss in das Gefäss gegossen. Nach dieser Zeit war die Temperatur allenthalben ausgeglichen und vollständige Ruhe eingetreten. Hierauf wurde der Bügel mit den Näpfchen sehr langsam eingeführt und so lange gewartet, bis die nach unten sinkenden Fäden nahezu den Boden erreicht hatten. Wurde dann die Öffnung frei gemacht, dann bewegten sich die unteren Enden der Fäden gegen diese und änderten dabei die Fäden gleichzeitig ihre Form. Nach einer gewissen Zeit hörte die Formänderung auf, und es hatten dann die Fäden die in Fig. 1 dargestellte Gestalt angenommen, welche sie so lange beibehielten, bis der Wasserspiegel unter den Bügel gesunken war.

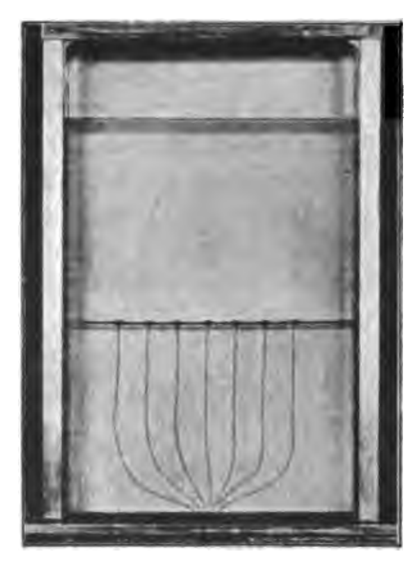


Fig. 1.

Die Beständigkeit der Gestalt ist ein Zeichen, dass die Fäden sich den Stromlinien angepasst haben, weil nur dann jeder Grund zu einer Formänderung wegfällt. Merkwürdig dabei ist, dass die Fäden sich bei der Formänderung so verhalten, als ob sie eine gewisse Cohäsion hätten. Die Erscheinung wurde photographisch fixirt.

Ein Versuch, der besonders gut gelang, wurde in der Weise photographisch aufgenommen, dass dabei die Axe des Objectives in der Ebene des Gefässbodens verlief. Hierauf wurde das negative Bild mit Hilfe eines Heliostaten und zweier

Linsen auf einen aus Millimeterpapier bestehenden Schirm in vergrössertem Massstabe projicirt, so dass die Dimensionen dieses Bildes den Dimensionen des Liniensystems im Gefässe nahezu gleichkamen. Es verhielten sich nämlich die ersteren Dimensionen zu den letzteren wie 1·067 : 1. Nachdem dann endlich auf dem Schirm die Randcurven der Fäden gezeichnet worden waren, wurden die Coordinaten einer grossen Zahl von Punkten dieser Randcurven mittelst der Millimetertheilung bestimmt und für jeden Faden und jede Abscisse das Mittel der beiden zugehörigen Ordinaten gebildet. Auf diese Weise ergaben sich die Mittellinien der Fäden.

Die Abweichungen der Ordinaten der Mittellinie eines Fadens von den entsprechenden Ordinaten der Mittellinie des symmetrischen Fadens waren, da der Versuch sehr gut gelungen war, nur unbedeutend, zeigten aber deutlich, dass beide Fäden durch eine ganz kleine Convection in demselben Sinne deformirt waren. Um diese Störung zu eliminiren, habe ich für denselben Abscissenwerth rechts und links die Ordinaten der beiden symmetrischen Mittellinien zusammengefasst und daraus das Mittel genommen. Dadurch erhielt ich die Coordinaten von jenen Mittellinien oder Stromlinien, welche auftreten, wenn es keine störende Strömung (Convection) gibt. Diese Stromlinien sind in der Fig. 2 in verkleinertem Maassstabe wiedergegeben.

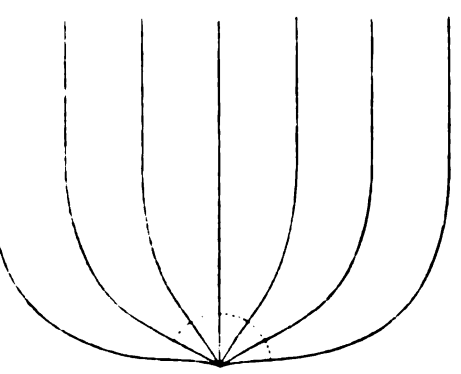


Fig. 2.

Wie man sieht, haben alle Stromlinien eine Wendetangente. Wenn wir in der Zeichnung um den Kreuzungspunkt der Linien als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius von $19^3/_4$ *mm* beschreiben, so finden wir, dass derselbe auf allen Stromlinien senkrecht steht. Im Gefäss selbst entspricht dem ein Kreis von 18·5 *mm* Radius. Es muss aber dabei besonders betont werden, dass dies der einzige Kreis ist, der die genannte

Eigenschaft besitzt. Da alle gezeichneten Stromlinien zu dem Kreise senkrecht sind, so werden es gewiss auch alle Stromlinien sein, die in derselben Ebene verlaufen.

Wir können aus dieser Eigenschaft einen wichtigen Schluss ziehen. Wir betrachten im Gefässe die Ebene der beobachteten Stromlinien und denken uns in derselben um den Mittelpunkt der Ausflussöffnung einen Kreis vom Radius 18·5 *mm* beschrieben. Wird nun die Ebene um jene Verticale, welche durch den Mittelpunkt der Ausflussöffnung und den Mittelpunkt des mittleren Näpfchens geht, oder kurz, um die mittlere Stromlinie um einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gedreht, so beschreiben die geraden Linien, welche die Näpfchenmittelpunkte mit dem Näpfchenmittelpunkt in der Mitte verbinden, Kreissectoren (Fig. 3) und es beschreiben ferner die zwischen den

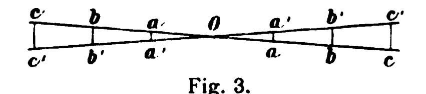


Fig. 3.

beobachteten Stromlinien gelegenen Kreisbögen Theile von Kugelzonen.

Die gedrehte Ebene wird offenbar in der zweiten Lage ganz dieselben Stromlinien wie in der ersten Lage enthalten; es werden also die beschriebenen Kugelzonentheile und die Flächen Oaa', $aba'b'$, $bcb'c'$ die Eigenschaft haben, dass durch ihre Begrenzung dieselben Stromlinien hindurchgehen. Die Flächen Oaa', $aba'b'$, $bcb'c'$ haben den Inhalt

$$\frac{1}{2}\times 29\cdot 75^2\times d\varphi,\quad \frac{3}{2}\times 29\cdot 75^2\times d\varphi,\quad \frac{5}{2}\times 29\cdot 75^2\times d\varphi.$$

Was die Kugelzonentheile anbelangt, so findet man für dieselben mittelst der gezeichneten Stromlinien und mit Rücksicht auf das Grössenverhältniss 1·067 : 1 die Höhen gleich 3·1, 6·6, 6·6 *mm*, also den Inhalt gleich

$$18\cdot 5\times 3\cdot 1\times d\varphi,\quad 18\cdot 5\times 6\cdot 6\times d\varphi,\quad 18\cdot 5\times 6\cdot 6\times d\varphi.$$

Durch die Kugelzonentheile tritt die Flüssigkeit senkrecht hindurch; wir wollen die mittlere Geschwindigkeit beziehungsweise mit u_1, u_2, u_3 bezeichnen. Ebenso tritt durch die Flächen Oaa', $aba'b'$, $bcb'c'$ die Flüssigkeit senkrecht hindurch, weil dort die Stromlinien vollkommen vertical sind.

Da die Oberfläche während des Sinkens der Flüssigkeit stets horizontal bleibt, so muss die Geschwindigkeit für die verticalen Stromlinien gleich sein. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit U, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$18\cdot5\times3\cdot1\times d\varphi\times u_1 = \frac{1}{2}\times29\cdot75^2\times d\varphi\times U,$$

$$18\cdot5\times6\cdot6\times d\varphi\times u_2 = \frac{3}{2}\times29\cdot75^2\times d\varphi\times U,$$

$$18\cdot5\times6\cdot6\times d\varphi\times u_3 = \frac{5}{2}\times29\cdot75^2\times d\varphi\times U$$

oder

$$u_1 = 7\cdot7\,U, \qquad u_2 = 10\cdot9\,U, \qquad u_3 = 18\cdot1\,U.$$

Wir kommen also zu dem Schlusse, dass die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheilchen auf der Kugelfläche nicht, wie die theoretischen Untersuchungen es vorausgesetzt haben, durchwegs gleich sind, sondern dass sie verschieden sind und einen desto grösseren Werth haben, je grösser der Winkel ist, den ihre Richtung mit der Verticalen bildet. Die Winkel, für welche die mittleren Geschwindigkeiten u_1, u_2, u_3 gelten, sind 0°—35½°, 35½°—63°, 63° bis 84½°.

Die Geschwindigkeit U ist gleich der Ausflussmenge dividirt durch den Querschnitt des Gefässes. Während der photographischen Aufnahme war die Höhe der Flüssigkeit im Gefässe ungefähr 350 *mm*. Nehmen wir für den Ausflusscoëfficienten die Zahl 0·62, so ergibt sich mit Hilfe der früher angegebenen Dimensionen des Gefässes und der Öffnung der Werth

$$U = 0\cdot0893\,\frac{mm}{sec},$$

also $u_1 = 0\cdot7\,\frac{mm}{sec}$, $u_2 = 1\cdot0\,\frac{mm}{sec}$, $u_3 = 1\cdot6\,\frac{mm}{sec}$. Die Kleinheit dieser Zahlen zeigt sofort, welch' grossen Einfluss die Convectionen auf den Versuch haben.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

CV. BAND. X. HEFT.

ABTHEILUNG II. a.

ENTHÄLT DIE ABHANDLUNGEN AUS DEM GEBIETE DER MATHEMATIK, ASTRONOMIE, PHYSIK, METEOROLOGIE UND DER MECHANIK.



XXV. SITZUNG VOM 3. DECEMBER 1896.

Erschienen: Sitzungsberichte, Bd. 105, Abth, II. a, Heft VII (Juli 1896); Monatshefte für Chemie, Bd. 17, Heft IX (November 1896).

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem eben erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Benjamin Apthorp Gould, Astronom zu Cambridge (U. S.).

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Herr Prof. Dr. L. Weinek, Director der k. k. Sternwarte in Prag, übermittelt als Fortsetzung seiner Mondarbeiten weitere 25 photographische Mondvergrösserungen mit hierauf bezüglichen Erläuterungen.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. »Die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze«, von Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz.
2. »Über die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren«, von Prof. Dr. Gustav Kohn an der k. k. Universität in Wien.
3. »Die postmortale Diagnose mittelst einer neuen Art von schwarzen Strahlen, der sogenannten Kritik-Strahlen«, von Herrn E. Friedrich in Elbing (Westpreussen).

Das w. M. Herr Hofrath Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung von stud. med. G. Günther, Demonstrator am histologischen Institut der k. k. Universität in Wien: »Über ein Krystalloid der menschlichen Schilddrüse«.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann überreicht eine Abhandlung von Dr. Gustav Jäger: »Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft«.

Über die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren

von

Gustav Kohn in Wien.

In einem auf der diesjährigen Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrage habe ich die Identität der Geometrie einer (m, n)-Correspondenz mit der Geometrie eines gewissen Curvenpaares dargelegt und diesen Gedanken für die Invariantentheorie der doppelt binären Formen verwerthet. Von demselben Gedanken getragen, habe ich seither geometrische Untersuchungen über die genannten Curvenpaare angestellt und erlaube mir einige für den Specialfall eines cubischen Raumcurvenpaares erlangte Ergebnisse an dieser Stelle in gedrängter Übersicht vorzulegen.

1. Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve Γ an sechs Stellen berühren, bilden ein irreducibles, von sechs Parametern abhängiges System. Die Curven dieses Systems ergeben sich als Erzeugnisse von drei beliebigen, projectiven Systemen von Schmiegungsebenen der Curve Γ, d. h. die Punkte einer solchen Curve C werden als Schnittpunkte von je drei homologen Schmiegungsebenen der drei projectiven Systeme erhalten. Die drei Punkte,

in denen eine beliebige Schmiegungsebene von Γ die Curve C trifft, sind wiederum homolog in drei projectiven Punktsystemen auf dieser Curve.

Solche zwei Curven C und Γ sind reciproke Polaren in Bezug auf eine Oberfläche zweiter Ordnung F. Die Schnittpunkte dieser Fläche mit C lassen sich angeben. Es ordnen sich nämlich die sechs Berührungspunkte der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ in drei »Paare zugeordneter Punkte« an, und die Schnittpunkte von F sind jene drei Punktepaare, welche je zwei von den drei Paaren zugeordneter Punkte auf C harmonisch trennen.

Die drei Paare von zugeordneten Punkten, in welchen eine gegebene cubische Raumcurve C von der Tangentenfläche einer zweiten Γ berührt werden soll, können auf C beliebig gewählt werden; die Curve Γ ist dann eindeutig bestimmt. Es gibt deshalb 15 cubische Raumcurven, deren Tangentenfläche die Curve C in sechs beliebigen ihrer Punkte berührt, entsprechend den 15 Arten, auf welche man sechs Punkte in drei Paare zerlegen kann.

Die Verbindungslinie eines Paares zugeordneter Punkte bezeichnen wir als Berührungssehne. Werden die Curven C und Γ als reell und die drei Berührungssehnen als verschieden vorausgesetzt, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder sind alle drei Berührungssehnen reell, oder eine reell, die beiden anderen conjugirt imaginär. Im ersten Falle liegt die Curve C ganz ausserhalb, im zweiten ganz innerhalb der Tangentenfläche von Γ.

2. Einige specielle Fälle der Lagenbeziehung zweier Raumcurven dritter Ordnung, von denen die eine die Tangentenfläche der zweiten sechsfach berührt, bieten ein besonderes Interesse.

Ein solcher Specialfall liegt vor, wenn von den drei Berührungssehnen zwei zusammenfallen. Dann fällt auch die dritte Berührungssehne mit ihnen zusammen und die Beziehung der Curven C und Γ besteht darin, dass sie dasselbe Tetraëder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraëder haben. In diesem Falle kann jede von den beiden Curven als Erzeugniss aufgefasst werden, sowohl von drei projectiven Systemen von Punkten,

als auch von drei projectiven Systemen von Schmiegungsebenen auf der anderen. Die Doppelelemente von je zwei unter drei solchen projectiven Systemen sind unter einander (und mit den beiden gemeinsamen Elementen von C und Γ) identisch, eine Eigenschaft, welche für sich die Lagenbeziehung bestimmt. Es gibt hier nicht bloss eine, sondern unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung, in Bezug auf welche die beiden Curven reciproke Polaren sind.

Zwei Flächen zweiter Ordnung, welche durch eine und dieselbe Punktreihe dritter Ordnung hindurchgehen, sind stets einem und demselben Ebenenbüschel dritter Ordnung eingeschrieben. In solchen zwei cubischen Raumcurven C und Γ haben wir einen Specialfall der betrachteten Lagenbeziehung vor uns, der dadurch charakterisirt ist, dass von den drei Paaren zugeordneter Punkte, in denen die Curve C von der Tangentenfläche von Γ berührt wird, zwei Paare von dem dritten harmonisch getrennt werden.

Trennt jedes von den drei Paaren zugeordneter Berührungspunkte der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ die beiden übrigen Paare harmonisch, so lässt sich die Lagenbeziehung zwischen C und Γ dadurch charakterisiren, dass drei durch C hindurchgelegte Flächen zweiter Ordnung dem cubischen Ebenenbüschel Γ eingeschrieben sind. In diesem Falle gibt es unendlich viele, der Curve C eingeschriebene und gleichzeitig der Curve Γ umschriebene Tetraëder, welche Paare von Erzeugenden der drei Flächen zweiter Ordnung zu Gegenkanten haben. Die Beziehung zwischen C und Γ ist symmetrisch und durch das Vorhandensein von sechs gemeinsamen Tangenten definirt.

3. Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve Γ in fünf Punkten berühren, zerfallen in zwei Systeme mit je sieben Parametern.

Die Curven des einen Systems werden erhalten, wenn man auf jeder dem cubischen Ebenenbüschel Γ eingeschriebenen Fläche zweiter Ordnung, das eine von den beiden auf der Fläche vorhandenen Systemen von cubischen Raumcurven verzeichnet, nämlich das System der Curven, welche die Erzeugenden der-

jenigen Schaar zu einfachen Secanten haben, die aus Doppelaxen der Curve Γ besteht.

Das zweite System wird gebildet von den cubischen Raumcurven, welche auf einer beliebigen, dem Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ doppelt eingeschriebenen Regelfläche vierten Grades liegen, für die zwei ihrer vier Cuspidalpunkte (Klemmpunkte, pinch-points) zusammenfallen.

4. Die Raumcurven dritter Ordnung, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten Raumcurve dritter Ordnung Γ in je vier (und nicht mehr) Punkten berühren, zerfallen in zwei Systeme mit je acht Parametern.

Die Beziehung einer beliebigen Curve C des einen Systems zur Curve Γ erscheint durch die besondere Natur der (3, 3)-Correspondenz definirt, die zwischen den Schmiegungsebenen von Γ und ihren Schnittpunkten mit C besteht: Die Gleichung dieser Correspondenz ist vom Geschlechte null.

Die Curven des zweiten Systems werden gebildet von den Raumcurven dritter Ordnung, welche auf Regelflächen vierten Grades liegen, die dem Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ doppelt eingeschrieben sind. Ist C eine Curve dieses Systems, so gibt es auch eine dem Ebenenbüschel dritter Ordnung Γ (einfach) eingeschriebene Regelfläche vierten Grades, welche C zur Doppelcurve hat. Die Lagenbeziehung von C und Γ erscheint vollkommen bestimmt durch die Existenz einer Projectivität zwischen diesen Curven von der Art, dass jede Schmiegungsebene von Γ durch den ihr auf C entsprechenden Punkt hindurchgeht.

Eine beliebige Curve des in Rede stehenden Systems kann als Erzeugniss einer beliebigen (2, 2)-Correspondenz zwischen den Schmiegungsebenen von Γ erhalten werden, d. h. als Ort der Punkte, in denen eine beliebige Schmiegungsebene des ersten Systems von den beiden ihr im zweiten System entsprechenden Schmiegungsebenen getroffen wird.

5. Ist die cubische Raumcurve C das Erzeugniss einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz von Schmiegungsebenen von Γ, so haben wir einen ausgezeichneten Specialfall der zuletzt betrachteten Lagenbeziehung vor uns, einen Fall, in dem die Beziehung zwischen C und Γ eine symmetri-

sche ist. Es gibt hier vier den beiden Curven gemeinsame Tangenten.

Solche zwei Curven C und Γ entsprechen einander in einem Nullsystem und diese Eigenschaft bestimmt ihre Lagenbeziehung vollständig.

Zur Definition ihrer Lagenbeziehung kann auch der Satz dienen: Es gibt eine Regelfläche vierten Grades, welche eine von den beiden Curven C und Γ zur Doppelcurve und die Developpable der anderen zur doppelt umschriebenen Developpablen hat.

Über die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Mit 2 Textfiguren.)

Bewegt sich eine Schallquelle in ruhender Luft mit constanter Geschwindigkeit, so entfernt sich die Schallwelle von der Schallquelle in deren Bewegungsrichtung mit einer Geschwindigkeit, welche gleich ist der Schallgeschwindigkeit vermindert um die Geschwindigkeit der Schallquelle. In der entgegengesetzten Richtung hingegen wird diese Geschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit vermehrt um die Geschwindigkeit der Schallquelle. Da es sich hier immer nur um die Geschwindigkeit der Schallquelle im Vergleich zu jener der Luft handelt, so können wir uns auch die Schallquelle als ruhend und die Luft in allen ihren Punkten mit constanter und gleichgerichteter Geschwindigkeit bewegt denken und sagen: die Schallgeschwindigkeit in der Windrichtung ist gleich der Schallgeschwindigkeit in ruhender Luft vermehrt um die Windgeschwindigkeit u. s. w. In jeder zu der des Windes geneigten Richtung setzt sich die Schallgeschwindigkeit mit jener des Windes nach dem Geschwindigkeitsparallelogramm zusammen. Daraus folgt ohneweiters, dass die Mittelpunkte der Kugelwellen, welche von einer punktförmigen Schallquelle ausgehen, die Geschwindigkeit und Richtung des Windes besitzen. Eine ebene Schallwelle bewegt sich nur dann senkrecht zu sich selbst fort, wenn ihre Normale mit der Windrichtung parallel ist. In jedem anderen Fall wird die Fortpflanzungsrichtung mit der Wellennormalen einen Winkel

bilden. Es sind dies alles selbstverständlich Sachen, die sich leicht aus dem Huyghens'schen Princip ergeben, wenn wir bedenken, dass für eine Elementarwelle genau dasselbe wie für jede Kugelwelle gilt.

Nicht mehr so einfach gestaltet sich der Vorgang, wenn wir annehmen, dass die Windgeschwindigkeit sich mit dem Ort ändert. Denken wir uns z. B. vorerst den einfachen Fall, dass eine horizontale Ebene MN (Fig. 1) die Trennungsebene zwischen ruhender und gleichförmig bewegter Luft bildet.

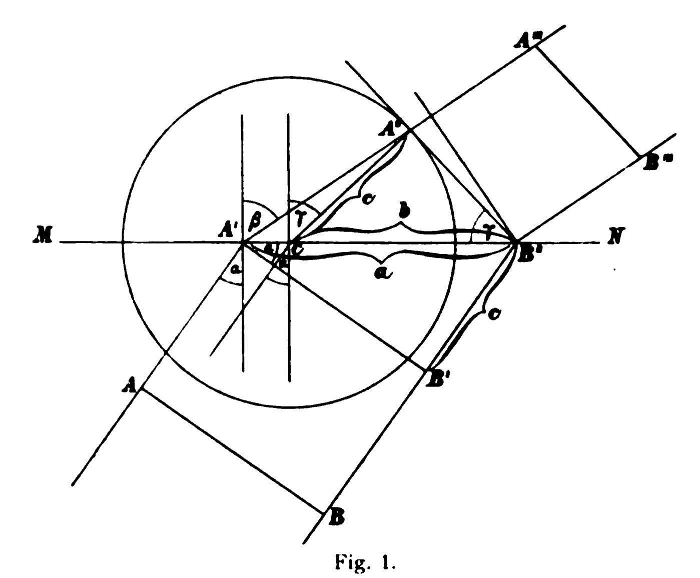


Fig. 1.

Diese sei oben, jene unten. Von unten komme unter dem Einfallswinkel α eine Planwelle AB gegen MN. In A' passirt der Punkt A die Trennungsebene. Gleichzeitig erleidet er daselbst eine Ablenkung in der Richtung $A'A''$, indem sich die Schallgeschwindigkeit v und die Windgeschwindigkeit w geometrisch summiren. Diese Ablenkung erfolgt der Reihe nach für alle Punkte zwischen A' und B'. Während B' nach B'' gelangt, legt der Wind den Weg $A'C$ zurück. Die Planwelle nimmt oberhalb MN die Lage $A''B''$ an und schreitet in der Richtung $A'A''$ fort. Wir haben also hier eine Brechung des Schalles bedingt durch die verschiedene Geschwindigkeit der Luftschichten.

Nach dieser Erörterung ist es nicht mehr schwer, das Brechungsgesetz aufzustellen, d. h. eine Beziehung zwischen dem Einfallswinkel α und dem Brechungswinkel β zu finden, wenn sowohl Schall-, als Windgeschwindigkeit gegeben ist.

Wir wollen die Strecken

$$A'B'' = a,\ B'B'' = CA'' = c,\ CB'' = b$$

setzen. Es ist nun

$$a \sin \alpha = b \sin \gamma = c.$$

ferner

$$\frac{a-b}{c} = \frac{w}{v},$$

woraus leicht folgt

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v - w \sin \alpha}{v}. \qquad (1)$$

Aus dem Dreieck $A'A''C$ ergibt sich

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{a-b} = \frac{\cos \beta}{c}$$

oder

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta} = \frac{w}{v}. \qquad (2)$$

Aus Gleichung (1) und (2) lässt sich ohne Schwierigkeit γ eliminiren, und es ist somit die gewünschte Beziehung zwischen Einfalls- und Brechungswinkel gegeben. Kennen wir gleichzeitig die Geschwindigkeit des Mediums als Function der Raumcoordinaten, so besitzen wir die Mittel, den jeweiligen Weg, welchen eine Welle zurücklegt, zu bestimmen. Es zeigt sich hier, dass die gebrochene Welle nicht mehr senkrecht auf ihrer Fortpflanzungsrichtung steht.

Wir wollen unsere allgemeinen Formeln auf den Fall anwenden, dass die Windgeschwindigkeit gegenüber der Schallgeschwindigkeit klein ist und sich nur mit der z-Ordinate eines rechtwinkeligen Coordinatensystems ändert. Der Wind bewege sich parallel zur x-Axe. Der Einfallswinkel α sei von einem rechten Winkel nur wenig verschieden, so dass wir in Gleichung (1)

$$w \sin \alpha = w, \text{ also } \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v-w}{v}$$

setzen können. Diese Formel lässt sich wegen der Kleinheit des w gegenüber v auch so schreiben:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v}{v+w}. \tag{3}$$

Da β unter diesen Verhältnissen ebenfalls nahezu 90° haben muss, so ist $\cos \beta$ eine sehr kleine Grösse, $\frac{w}{v} \cos \beta$ kann daher ohneweiters vernachlässigt werden, d. h. nach Gleichung (2)

$$\sin (\beta - \gamma) = 0 \text{ oder } \beta = \gamma$$

gesetzt werden. Gleichung (3) lässt sich also auch schreiben

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v+w}.$$

Nun ist aber v nichts anderes als die Geschwindigkeit der Schallwellen im ersten, $v+w = v'$ jene im zweiten Medium. Die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{v'} \tag{4}$$

entspricht also vollständig dem gewöhnlichen Brechungsgesetz für eine Welle, welche die Grenzfläche zweier Medien passirt, in denen sie sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzt.

Es gibt demnach auch eine Totalreflexion, sobald der Winkel α eine gewisse Grenze überschreitet. Diese Totalreflexion ist jedoch nicht an unsere vereinfachenden Bedingungen gebunden. Sie folgt schon aus der allgemeinen Gleichung (1). Setzen wir in derselben $\sin \gamma = 1$, so erhalten wir ohneweiters den Grenzwinkel der Totalreflexion α_1 aus der Gleichung

$$\sin \alpha_1 = \frac{v}{v+w}.$$

Nehmen wir etwa an, die Schallgeschwindigkeit betrage $v = 330\,m$, die Windgeschwindigkeit w hingegen $10\,m$, so ergibt sich für den Grenzwinkel die Totalreflexion etwa $\alpha_1 = 86 \cdot 8°$.

Bewegt sich der Schall nicht in der Richtung der x-Axe, sondern entgegengesetzt, so ist in Gleichung (4) $v > v'$. Für diesen Fall ist also eine Totalreflexion nicht möglich.

Wegen der inneren Reibung der Luft ist das von uns in Betracht gezogene Beispiel nicht streng realisirbar, sondern es kann sich die Windgeschwindigkeit nur stetig mit den Raumcoordinaten ändern. Wir wollen daher noch den Fall in Betracht ziehen, dass die Windgeschwindigkeit in der xy-Ebene gleich Null ist und mit der Höhe linear zunimmt. Die Geschwindigkeit einer Schallwelle bei den für Gleichung (4) nöthigen Bedingungen ist demnach

$$c = v + az.$$

Hat der Winkel β, welchen unser Schallstrahl mit der z-Axe macht, für eine bestimmte Geschwindigkeit c_1 den Werth β_1, so gilt für alle Fälle

$$\frac{\sin \beta}{c} = \frac{\sin \beta_1}{c_1} = A,$$

wobei A eine Constante ist. Es ist demnach

$$\sin \beta = A(v + az) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}.$$

In dieser Differenzialgleichung lassen sich die Variablen leicht trennen. Wir erhalten

$$\frac{A(v + az)\,dz}{\sqrt{1 - A^2(v + az)^2}} = dx.$$

Durch Integration ergibt sich

$$-\sqrt{1 - A^2(v + az)^2} = Aax + C,$$

oder durch weitere Umformung

$$\left(x + \frac{C}{aA}\right)^2 + \left(z + \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{A^2 a^2}.$$

Wir erhalten also die Gleichung eines Kreises, d. h. es beschreibt der Schallstrahl einen Kreisbogen. Bestimmen wir

die willkürliche Constante so, dass für $x = 0$ auch $z = 0$ und $C = -\sqrt{1-A^2v^2}$ wird, so resultirt die Gleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{1-A^2v^2}}{aA}\right)^2 + \left(z + \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{A^2a^2}$$

Die Constante A ist durch den Winkel bestimmt, unter welchem der Schallstrahl vom Coordinatenursprung ausgeht. Der Radius der Kreisbögen, nach welchen sich der Schall fortpflanzt, ist $\frac{1}{Aa}$. Er ist demnach sowohl vom Anfangswinkel, als auch vom Windgeschwindigkeitsgefälle a abhängig, das heisst er wird umso grösser, je langsamer die Windgeschwindigkeit mit der Höhe zunimmt. Die Mittelpunkte sämmtlicher Kreisbögen liegen in der Entfernung $\frac{v}{a}$ unterhalb der x-Axe.

In ganz analoger Weise, wie wir hier die Bahn für Schallwellen, welche sich in der Windrichtung bewegen, bestimmt haben, lässt sich die Rechnung für entgegengesetzt wandernde Wellen durchführen. Wir erhalten dafür die Gleichung

$$\left(x - \frac{\sqrt{1-A^2v^2}}{aA}\right)^2 + \left(z - \frac{v}{a}\right)^2 = \frac{1}{A^2a^2}.$$

Während also im ersten Falle die Mittelpunkte der Kreisbögen unterhalb der x-Axe liegen, so befinden sie sich jetzt oberhalb. Ein Schallstrahl, der demnach horizontal beginnt, wird sich allmälig nach aufwärts krümmen, so dass ein Ohr,

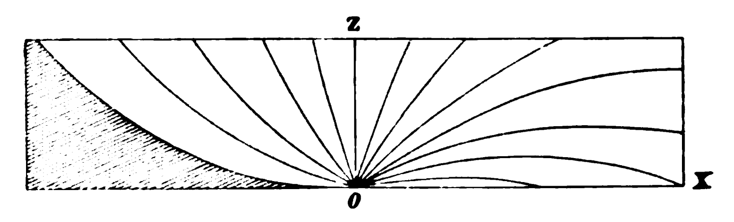


Fig. 2.

welches sich unterhalb des aufwärts gekrümmten Astes befindet, gar nichts zu hören bekommt. Fig. 2 versinnlicht die Wege, welche die unter verschiedenen Winkeln ausgehenden Schall-

strahlen zurücklegen. Es erklärt sich so auf sehr einfache Weise, warum wir den Schall nur schwer oder gar nicht wahrnehmen, wenn der Wind in der Richtung vom Ohr zur Schallquelle weht, dass hingegen eine deutliche Schallwahrnehmung bei entgegengesetzt wehendem Wind erfolgt.[1] Es ergibt sich daraus ferner die eigentlich auffallende Erscheinung, dass man den Schall gelegentlich sehr deutlich hören kann, obwohl zwischen Schallquelle und Ohr eine beträchtliche Erderhöhung liegt. Ich hatte zu wiederholtenmalen Gelegenheit, an einem Ort, der etwa 3 *km* von einer Eisenbahnstation entfernt und von derselben durch einen etwa 50 *m* hohen Bergrücken getrennt ist, sowohl das Pfeifen der Locomotiven, als auch das Rollen der Züge sehr deutlich wahrzunehmen. Dabei war es unmittelbar über dem Erdboden windstill und nur am Rauch höherer Schornsteine konnte man einen leichten Luftzug bemerken, der aus der Richtung des Bahnhofs kam. Es tritt dieser Fall nur einigemal des Jahres ein, aber immer unter der Begleiterscheinung derselben Windrichtung.

Dies stimmt nun alles vollkommen mit unseren Untersuchungen überein; denn suchen wir das Windgeschwindigkeitsgefälle a, welches einen Kreisbogen von 2 *km* Länge und 50 *m* Höhe ermöglicht — es muss dabei der Schall unter einem Winkel von 5°43' zum Horizont ausgehen, — so erhalten wir $a = 0 \cdot 034$. Das heisst: Ist auf der Erdoberfläche Windstille, so ist die Windgeschwindigkeit in einer Höhe von 100 *m* erst 3·4 *m*. Wir haben daher eine sehr ruhige Atmosphäre, was vollkommen zu den oben erwähnten Beobachtungen passt.

[1] Stokes hat im Rep. of the Brith. Ass. 1857 (II, p. 27) eine ähnliche Erklärung für diese Erscheinungen gegeben.

XXVI. SITZUNG VOM 10. DECEMBER 1896.

Herr Dr. K. Brunner v. Wattenwyl, k. k. Ministerialrath i. R. in Wien, spricht den Dank aus für den ihm zur Herausgabe seines Werkes: »Die Farbenpracht der Insecten« von der kaiserl. Akademie gewährten Druckkostenbeitrag.

Das w. M. Herr Ober-Sanitätsrath Prof. A. Weichselbaum überreicht eine Arbeit aus dem pathologisch-anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien von Dr. J. Halban: »Über die Resorption der Bacterien bei localer Infection«.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Retzius Gustaf, Das Menschenhirn. Studien in der makroskopischen Morphologie. (Mit 96 Tafeln in Lichtdruck und Lithographie.) I. Text; II. Tafeln. Stockholm 1896; Folio.

XXVII. SITZUNG VOM 17. DECEMBER 1896.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz von Prof. F. Emich: »Über die Entzündlichkeit von dünnen Schichten explosiver Gasgemenge«. (I. Mittheilung.)

Das w. M. Herr Hofrath V. v. Lang überreicht eine Arbeit von Dr. A. Lampa in Wien: »Über die Brechungsquotienten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen«. (II. Mittheilung.)

Das w. M. Herr Ober-Sanitätsrath Prof. A. Weichselbaum überreicht eine im pathologisch-anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit von Dr. Frederic J. Cotton aus Boston, betitelt: »Ein Beitrag zur Frage der Ausscheidung von Bakterien durch den Thierkörper«.

Herr Dr. Ernst Murmann in Wien überreicht eine Abhandlung: »Über die quantitative Analyse des Werkkupfers«.

Über die Brechungsquotienten einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen

(II. Mittheilung)

von

Dr. **Anton Lampa.**

Aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien.

I.

Unter Beibehaltung der Versuchsanordnung, welche ich in der ersten gleichnamigen Mittheilung[1] beschrieben habe, habe ich die Untersuchung des Brechungsvermögens einiger Substanzen für sehr kurze elektrische Wellen weitergeführt. An der Versuchsanordnung wurde nur eine unwesentliche Veränderung insoferne vorgenommen, als ich in der angenehmen Lage war, das Inductorium statt mit Batteriestrom im Nebenschluss der Gleichstromleitung zu betreiben; dies ist hinsichtlich der Constanz des Betriebsstromes sehr vortheilhaft. Der Coherer erweist sich auch für Wellen von circa 4 *mm* Länge noch sehr empfindlich. Dass ich die Untersuchung nicht auf kürzere Wellen ausgedehnt habe, ist lediglich durch die technischen Schwierigkeiten bei der Herstellung der Erreger bedingt.

II.

Länge jedes Erregers: 1·5 *mm*, Dicke 0·5 *mm*.

A. Beugungsversuch, ausgeführt mit demselben Gitter, welches bei $\lambda = 8\,mm$ benützt wurde (Streifenbreite 10, Zwischenraumbreite 20 *mm*).

---

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CV, Abth. II. a, Juli 1896.

Erstes Minimum.

Drehung des Gitters aus der Nullstellung	Ausschlag des Galvanometers
2°	10 Theilstriche
4	$8^3/_4$ »
6	$7^1/_2$ »
8	9 »

Legt man durch die drei letzten Werthe eine Curve 2. Grades, so ergibt sich die Lage des Minimums circa bei 5° 50′. Hieraus folgt $\frac{\lambda}{2} = 30 . \sin 5° 50' \, mm = 3 \cdot 049 \, mm$.

Erstes Maximum.

Drehung des Gitters aus der Nullstellung	Ausschlag des Galvanometers
10° 30′	5 Theilstriche
11	5·5 »
11 30	6 »
12	4 »

Berücksichtigt man die Abnahme der Intensität, welche bei einer solchen Drehung des Gitters an sich erfolgt, so kann das Maximum bei 11° 30′ angenommen werden. Hieraus folgt $\lambda = 30 . \sin 11° 30' \, mm = 5 \cdot 98 \, mm$.

Die Wellenlänge kann somit zu 6 *mm* angenommen werden. Derselben entspricht eine Schwingungszahl $N = 50000 . 10^6$.

B. Feste Körper.

a) Paraffin. Untersucht wurden zwei Prismen. Das eine war schon bei $\lambda = 8 \, mm$ verwendet worden, das zweite, mit dem brechenden Winkel von 30° 30′ wurde neu hergestellt und ergab etwas, aber nur wenig kleinere Brechungsquotienten. Diese wurden demnach unbedenklich zur Bildung des Mittelwerthes verwendet.

$\alpha_1 = 20°$		$\alpha_2 = 30° 30'$	
β	n	β	n
8° 40'	1·403	14° 45'	1·399
9 25	1·436	14 45	1·399

Mittel: $n = 1·41$, $n^2 = 1·99$.

b) Ebonit. Untersucht wurden dieselben Prismen, welche bei $\lambda = 8$ *mm* verwendet worden waren.

$\alpha_1 = 20° 20'$		$\alpha_2 = 29°$	
β	n	β	n
16° 30'	1·725	27° 30'	1·709
17	1·745	28	1·718
		28 10	1·722

Mittel: $n = 1·724$, $n^2 = 2·97$. Lebedew[1] erhielt für die gleiche Wellenlänge $n = 1·6$.

c) Schwefel. Auch hier wurde das bei $\lambda = 8$ *mm* gebrauchte Prisma von 25° brechendem Winkel benützt.

β	n
33° 15'	2·013
33	2·006
33	2·006

Mittel: $n = 2·008$, $n^2 = 4·03$.

Herr Lebedew hat an einem Schwefelkrystall die Brechungsquotienten in der Richtung der grössten und der kleinsten Dielektricitätsconstante für Wellen von ungefähr gleicher Länge gemessen (l. c.) und gefunden: $n_g = 2·25$,

[1] Wied. Ann., Bd. 56, 1895.

$n_k = 2 \cdot 00$. Mein Werth liegt in guter Übereinstimmung mit der von mir entwickelten Theorie[1] zwischen diesen beiden Werthen.

C. Flüssigkeiten.

Mit Ausnahme des absoluten Alkohols und des destillirten Wassers waren die untersuchten Flüssigkeiten dieselben, welche für $\lambda = 8\, mm$ geprüft worden waren. Die Prismen — das eine von 16° 30′, das andere, für Wasser, von 4° brechendem Winkel — waren gleichfalls bei der ersten Untersuchung verwendet worden.

a) Benzol reinst.

β	*n*	β	*n*
13° 30′	1·76	13° 30′	1·76
13 30	1·76	13 30	1·76

Mittel: $n = 1 \cdot 76$, $n^2 = 3 \cdot 1$.

b) Glycerin.

β	*n*
13° 30′	1·76
13 30	1·76
13 30	1·76

Mittel: $n = 1 \cdot 76$, $n^2 = 3 \cdot 1$.

c) Terpentinöl rectificirt.

β	*n*	β	*n*
13° 30′	1·76	12° 30′	1·707
12 30	1·707	12 30	1·707

Mittel: $n = 1 \cdot 72$, $n^2 = 2 \cdot 96$.

[1] Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV, Abth. II. a, 1895.

d) Absoluter Alkohol (99·7%).

β	n	β	n
24° 30′	2·31	24°	2·287
23 30	2·263	24 30′	2·31

Mittel: $n = 2\cdot292$, $n^2 = 5\cdot25$.

e) Wasser destillirt. Temperatur 20·5° C. Die Absorption, wenn auch nicht so stark wie bei $\lambda = 8$ *mm*, doch beträchtlich. Während der Coherer bei directer Bestrahlung mit 40 Theilstrichen Ausschlag reagirt, erzielt das Maximum der Wirkung durch das Prisma, welche bei nichtabsorbirenden Substanzen nahe gleich wirkt wie directe Bestrahlung, nur 8 Theilstriche. Ich theile eine Messung im Detail mit.

β	Ausschlag
36°	4 Theilstriche
37	8 »
38	4 »

β	n
37°	9·405
37	9·405
37	9·405

Mittel: $n = 9\cdot405$, $n^2 = 88\cdot45$.

III.

Länge jedes Erregers 1 *mm*, Dicke 0·5 *mm*.

A. Beugungsversuch, durchgeführt mit dem alten Gitter.

Erstes Minimum.

Drehung des Gitters aus der Nullstellung	Ausschlag des Galvanometers
2° 30′	19·5 Theilstriche
3	19·5 »
3 30	18·5 »
4	19 »
4 40	20·5 »

Das Minimum liegt hiernach zwischen 3° 30′ und 4°.

Nimmt man 3° 45′, so folgt:

$$\frac{\lambda}{2} = 30 . \sin 3°45' \, mm = 1·96 \, mm.$$

Erstes Maximum.

Drehung des Gitters aus der Nullstellung	Ausschlag des Galvanometers
6° 30′	16·5 Theilstriche
7 30	16·7 »
7 50	16·9 »
8 50	16·5 »

Das erste Maximum liegt hiernach bei 7° 50′. Hiernach ist $\lambda = 30 . \sin 7° 50' \, mm = 4·09 \, mm$.

Die Wellenlänge kann also zu 4 *mm*, die Schwingungszahl N zu 75000.10^6 angenommen werden.

B. Feste Körper.

Alle verwendeten Prismen waren dieselben, welche bei $\lambda = 6 \, mm$ gedient hatten. Auch hier ergab das neue Paraffinprisma etwas kleinere Werthe als das alte.

a) Paraffin.

$\alpha_1 = 20°$		$\alpha_2 = 30° \, 30'$	
β	n	β	n
8° 40′	1·402	14° 20′	1·389
8 35	1·398	14 15	1·388

Mittel: $n = 1·394$, $n^2 = 1·96$.

b) Ebonit.

$\alpha_1 = 20° \, 20'$		$\alpha_2 = 29° \, 20'$	
β	n	β	n
12° 20′	1·554	19° 20′	1·533
13 20	1·595	20 5	1·554

Mittel: $n = 1·56$, $n^2 = 2·43$.

c) Schwefel. $\alpha = 25°$.

β	n	β	n
32° 10′	1·989	33°	2·006
33 30	2·018	32 30	1·996

Mittel: $n = 2$, $n^2 = 4$.

C. Flüssigkeiten.

Die Flüssigkeiten und die Prismen waren dieselben, welche bei $\lambda = 6$ *mm* gedient hatten.

a) Benzol reinst.

β	n
13°	1·734
13	1·734
13 30′	1·76

Mittel: $n = 1·742$, $n^2 = 3·04$.

b) Glycerin.

β	n
11°	1·626
10 50′	1 617
11	1·626

Mittel: $n = 1·62$, $n^2 = 2·62$.

c) Terpentinöl rectificirt.

β	n
11°	1·626
11	1·626
11 10	1·635

Mittel: $n = 1·629$, $n^2 = 2·65$.

d) Absoluter Alkohol.

β	n	β	n
22° 30′	2·216	23° 30′	2·263
23 30	2·263	22 30	2·216

Mittel: $n = 2 \cdot 24$, $n^2 = 5 \cdot 02$.

e) Wasser destillirt, Temperatur 20° C. Die Absorption ist noch stärker als bei $\lambda = 6$ *mm*. Bei directer Bestrahlung erfolgte ein Ausschlag von 50 Theilstrichen — die Empfindlichkeit des Galvanometers war gesteigert worden —, bei dem Maximum des Prismas circa 8. Die erste Messung ergab das unten mitgetheilte orientirende Resultat, zwei weitere Messungen bestätigten es.

β	Ausschlag
35°	3·4 Theilstriche
36	4 »
37	6·8 »
38	7 »
39	3·4 »

β	n
37° 30′	9·499
37 30	9·499
37 30	9·499

Mittel: $n = 9 \cdot 499$, $n^2 = 90 \cdot 23$.

IV.

Tabellarische Übersicht.

Substanz	$\lambda = 8$ *mm*		$\lambda = 6$ *mm*		$\lambda = 4$ *mm*	
	n	n^2	n	n^2	n	n^2
Paraffin	1·524	2·32	1·41	1·99	1·394	1·96
Ebonit	1·739	3·027	1·724	2·97	1·56	2·43
Schwefel	1·802	3·24	2·008	4·03	2·00	4·00
Benzol	1·767	3·13	1·76	3·1	1·742	3·04
Glycerin	1·843	3·4	1·76	3·1	1·62	2·62
Terpentinöl ..	1·782	3·17	1·72	2·96	1·629	2·65
Alkohol abs. .	2·568	6·76	2·292	5·25	2·24	5·02
H_2O	8·972	80·45	9·405	88·45	9·499	90·23

Ein Blick auf diese tabellarische Übersicht lehrt, dass die meisten der untersuchten Substanzen in der Octav von $N = 37500.10^6$ bis $N = 75000.10^6$ anormale Dispersion zeigen. Ausgenommen erscheinen Schwefel und Wasser.

Benzol, Glycerin, Terpentinöl stehen für alle von mir untersuchten Wellenlängen sehr nahe beisammen. Die Abnahme der Brechungsquotienten gibt eine, wenn auch sehr lückenhafte Vorstellung von der Veränderung des Brechungsvermögens bei dem Übergange zu den Wellen der strahlenden Wärme und des Lichtes. Das beste Bild gibt jedenfalls Alkohol:[1]

N		D. C., respective n^2	
$N =$ klein	D. C., respective $n^2 =$	25·9	Nernst
		25·5	Tereschin
25.10^6		24·8	Thwing
150.10^6		24·4	Drude
400.10^6		23	Drude
6000.10^6		10·2	Cole
37500.10^6		6·8	Lampa
50000.10^6		5·3	Lampa
75000.10^6		5	Lampa

Bei Wasser ist von einer Abnahme des Brechungsquotienten noch nichts zu merken. Der Werth bei $\lambda = 8$ *mm* stellt, wie aus mannigfaltigen Messungen anderer Autoren hervorgeht, eine Stelle anormaler Brechung dar, die Werthe für $\lambda = 6$ *mm* und $\lambda = 4$ *mm* erheben sich über die höchsten bis jetzt bekannten Brechungsquotienten des Wassers. Man hat folgende Tabelle:[2]

N	n	D. C. resp. n^2	Beobachter
klein		80·9	Heerwagen
»		80·0	Nernst
25.10^6		79·4	Thwing
27.10^6 bis 97.10^6	8·91	79·4	Cohn und Zeemann
150.10^6		80·6	Drude
400.10^6	9·037	81·67	Drude

[1] Vergl. meine I. Mittheilung.

[2] Vergl. meine I. Mittheilung, ferner: Drude, Wied. Ann., Bd. 59, S. 17; Mazotto, Accademia dei Lincei, vol. V, 2° sem., serie 5ª, fasc. 8°, 1896.

N	n	D. C. resp. n^2	Beobachter
147.10^6 bis 1154.10^6	9·00	81·00	Mazotto
833.10^6	9·143	83·6	Drude
6000.10^6	8·8	77·44	Cole
37500.10^6	8·972	80·45	Lampa
50000.10^6	9·405	88·45	Lampa
75000.10^6	9·499	90·23	Lampa

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass das Wasser jetzt die am besten untersuchte Substanz ist, wäre es mir selbst erwünscht gewesen, grössere Messungsreihen vorzunehmen. Um jedoch stets dasselbe Erregerpaar benützen zu können, was doch die einzige Gewähr dafür ist, dass man immer dieselbe Wellenlänge zur Verfügung hat, musste hierauf verzichtet werden, umsomehr, als selbst ein und dasselbe Erregerpaar nur eine begrenzte Verwendung zulässt. Nach einiger Zeit versagt es und muss geputzt werden, wobei eine kleine Dimensionsveränderung unvermeidlich ist; letztere kann aber bei der benützten Grössenordnung der Wellen schon merklich werden. Ausserdem sind die angegebenen Zahlen ohnehin durch weitaus mehr Messungsreihen festgestellt, als im Texte mitgetheilt sind. Der Coherer, so empfindlich er ist, ist ein etwas capriciöses Instrument, zumal in einem Arbeitsraume, welcher von Erschütterungen nicht frei ist. Zu systematischen Untersuchungen in dem Gebiete der kurzen Wellen wäre jedenfalls eine Untersuchungsmethode wünschenswerth, welche die Bequemlichkeit und grosse Empfindlichkeit des Coherers mit grösserer Unabhängigkeit von äusseren Umständen verbindet. Ich möchte demnach die vorliegende Arbeit als eine orientirende Voruntersuchung betrachtet wissen.

Die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze

von

O. Tumlirz.

(Mit 1 Textfigur.)

Clausius hat zuerst gezeigt, dass der gesättigte Wasserdampf von dem vereinigten Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze abweicht,[1] indem er die Gleichung

$$\frac{1}{E}\,p(v-w)\,\frac{273}{273+t} = \frac{273\,r}{(273+t)^2\,\dfrac{1}{p}\,\dfrac{dp}{dt}}$$

untersuchte. welche man durch Benützung der Clapeyron'schen Gleichung erhält und in welcher E das mechanische Äquivalent der Wärme, p den Druck, v das specifische Volumen des gesättigten Dampfes, w das specifische Volumen der Flüssigkeit, r die Verdampfungswärme und t die Temperatur nach Celsius bedeuten. Würde nämlich das genannte Gesetz gelten, dann müsste, weil $v-w$ äusserst wenig von v verschieden ist, der auf der rechten Seite der Gleichung stehende Ausdruck constant sein. Dies ist aber nicht der Fall, der Ausdruck nimmt vielmehr mit der Temperatur beständig ab. Clausius, welcher die Rechnung zwischen $+5$ und $+225°$ durchführte, suchte die Resultate durch das Gesetz einer Exponentiellen wiederzugeben, indem er

$$\frac{1}{E}\,p(v-w)\,\frac{273}{273+t} = m-n\,e^{kt}$$

[1] Vergl. Clausius, Die mechan. Wärmetheorie, I, S. 147 flgd., 1887.

setzte, wo $m = 31\cdot549$, $n = 1\cdot0486$, $k = 0\cdot007138$. Aus diesem Gesetze und aus dem Verhalten des Differentialquotienten von $\frac{pv}{(pv)_0}$, in welchem $(pv)_0$ den bei 0° geltenden Werth von pv bedeutet, zog dann Clausius den Schluss, dass die Abweichungen vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze bei höheren Temperaturen bedeutend sind, aber mit der Temperatur sich derart ändern, dass sie um so kleiner sind, je niedriger die Temperatur ist und dass sie bei 0° C. bereits ganz vernachlässigt werden können.

Es ist Clausius nicht entgangen, dass die von ihm nach den Beobachtungsdaten berechneten Werthe unter 35° von dem Gesetze der Exponentiellen abweichen, er führte dies aber auf Ungenauigkeiten in der Bestimmung von p zurück. Mir ist es nun aufgefallen, dass die Abweichungen sämmtlich nach derselben Seite stattfinden, und dass sie desto stärker sind, je tiefer die Temperatur ist. Ich habe daher die Rechnung mit Hilfe der Regnault'schen Daten von +5° bis —20° fortgesetzt und habe dabei gefunden, dass die Abweichungen in voller Regelmässigkeit immer grösser und grösser werden, zu je tieferen Temperaturen man fortschreitet. Es kann also der oben ausgesprochene Satz von Clausius nicht die wahre Consequenz aus den Regnault'schen Versuchsergebnissen sein und ist deshalb die Frage von neuem zu untersuchen.

Die Untersuchung wurde ein wenig anders durchgeführt. Man weiss, dass stark überhitzter Wasserdampf sich wie ein ideelles Gas verhält, also dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze folgt, dessen Ausdruck

$$pv = R(273+t)$$

ist, wo R eine Constante bedeutet. Für das specifische Gewicht des überhitzten Wasserdampfes, bezogen auf Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur, hat Gay-Lussac die Zahl 0·6235 gefunden, was mit dem Werthe 0·6220 übereinstimmt, den man auf Grund einer wohlbegründeten Theorie gewinnt, nach welcher zwei Volumina Wasserdampf aus zwei Volumina Wasserstoff und einem Volumen Sauerstoff, genommen bei derselben Temperatur und demselben Druck, bestehen. Legen

wir diesen theoretischen Werth 0·6220 unseren Betrachtungen zu Grunde und berücksichtigen wir, dass die Constante R für Luft den Werth 29·26 hat, so wird

$$pv = 47\cdot 05\,(273 + t)$$

die Zustandsgleichung des stark überhitzten Wasserdampfes sein.

Wir wollen nun unsere Aufgabe in der Weise lösen, dass wir fragen, in welchem Masse der Zustand des gesättigten Wasserdampfes von dieser Zustandsgleichung abweicht, d. h. wir wollen, wenn wir die Zustandsgleichung in der Form

$$\frac{pv}{47\cdot 05\,(273 + t)} - 1 = 0 \text{ oder kurz } D = 0$$

schreiben, untersuchen, in welcher Weise die Grösse D sich für den gesättigten Wasserdampf zwischen den Temperaturen —20 und +200° C. verhält.

Zur Lösung dieser Aufgabe benützte ich die Tabellen, welche Herr Zeuner im Anhange des zweiten Bandes seines Werkes »Technische Thermodynamik« (1890) mit strenger Berücksichtigung der Regnault'schen Versuchsergebnisse aufgestellt hat.[1] Man ersieht nun aus der auf der folgenden Seite gegebenen Tabelle, dass die Grösse D von —20° bis zu einer zwischen 30° und 35° gelegenen Temperatur (die Interpolation ergibt 31·85°) positiv, darüber hinaus aber negativ ist, und dass die Abweichungen von dem Werthe Null desto grösser sind, je mehr die Temperatur von 31·85° entfernt ist. Stellen wir die Verhältnisse graphisch dar, indem wir (vergl. die Zeichnung auf Seite 1063) die Temperaturen als Abscissen und die Werthe für D als Ordinaten auftragen (in der Zeichnung ist als Einheit für die Ordinaten 0·01 gewählt), dann erhalten wir eine Curve, welche die Abscissenaxe in dem Punkte 31·85 schneidet und sich von derselben sowohl für die höheren, als auch für die tieferen Temperaturen immer mehr entfernt. Zugleich sehen wir, dass die Curve in der Nähe von 65° einen Wendepunkt hat.

[1] Das specifische Volumen des Wassers wurde bis 125° gleich 0·0010 gesetzt, für die höheren Temperaturen aber nach der Hirn'schen Formel berechnet.

t	$273+t$	$\frac{p}{13\cdot5956}$	v	D	$\frac{pv}{47\cdot05}$	Differenz
—20	253	0·927	994·78	+0·0533	266·46	
—15	258	1·400	666·59	+0·0453	269·66	3·20
—10	263	2·093	451·42	+0·0379	273·01	3·35
— 5	268	3·113	307·33	+0·0315	276·44	3·43
0	273	4·600	210·68	+0·0257	280·03	3·59
5	278	6·534	150·24	+0·0203	283·65	3·62
10	283	9·165	108·52	+0·0156	287·38	3·73
15	288	12·699	79·355	+0·0113	291·18	3·80
20	293	17·391	58·727	+0·0074	295·11	3·93
25	298	23·550	43·968	+0·0040	299·19	4·08
30	303	31·548	33·270	+0·0010	303·28	4·09
35	308	41·827	25·439	—0·0017	307·45	4·17
40	313	54·906	19·647	—0·0042	311·69	4·24
45	318	71·390	15·317	—0·0063	315·96	4·27
50	323	91·980	12·051	—0·0082	320·28	4·32
55	328	117·475	9·5632	—0·0101	324·61	4·33
60	333	148·786	7·6548	—0·0118	329·07	4·46
65	338	186·938	6·1727	—0·0135	333·41	4·34
70	343	233·082	5·0154	—0·0152	337·78	4·37
75	348	288·500	4·1038	—0·0170	342·11	4·33
80	353	354·616	3·3802	—0·0188	346·37	4·26
85	358	433·002	2·8016	—0·0208	350·53	4·16
90	363	525·392	2·3356	—0·0232	354·61	4·08
95	368	633·692	1·9578	—0·0259	358·47	3·86
100	373	760·000	1·6508	—0·0280	362·52	4·05
105	378	906·410	1·3989	—0·0307	366·37	3·85
110	383	1075·370	1·1914	—0·0334	370·20	3·83
115	388	1269·410	1·0195	—0·0362	373·92	3·72
120	393	1491·280	0·8763	—0·0392	377·60	3·68
125	398	1743·880	0·7566	—0·0421	381·25	3·65
130	403	2030·280	0·6560	—0·0453	384·84	3·59
135	408	2353·730	0·5710	—0·0484	388·33	3·49
140	413	2717·630	0·4988	—0·0517	391·69	3·36
145	418	3125·550	0·4374	—0·0550	395·03	3 34
150	423	3581·230	0·3850	—0·0585	398·39	3·36
155	428	4088·560	0·3399	—0·0619	401·55	3·16
160	433	4651·620	0·3012	—0·0655	404·83	3·28
165	438	5274·540	0·2676	—0·0690	407·84	3·01
170	443	5961·660	0·2386	—0·0726	411·02	3·18
175	448	6717·430	0·2133	—0·0763	414·01	2·99
180	453	7546·390	0·1912	—0·0798	416·90	2·89
185	458	8453·230	0·1719	—0·0835	419·86	2·96
190	463	9442·700	0·1549	—0·0873	422·69	2·83
195	468	10519·630	0·1401	- 0·0912	425·69	3·00
200	473	11688·960	0·1269	—0·0951	428·42	2·73

Aus diesem Verlaufe der Werthe von D folgt nun, 1. dass der Clausius'sche Satz, nach welchem die Abweichungen von dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze gegen die tieferen Temperaturen hin immer kleiner und kleiner werden und bei 0° C. schon zu vernachlässigen sind, unrichtig ist, und

2. dass der gesättigte Wasserdampf die Zustandsgleichung stark überhitzter Wasserdämpfe nur bei 31·85° C. erfüllt, dagegen von dieser Zustandsgleichung sowohl für höhere. als

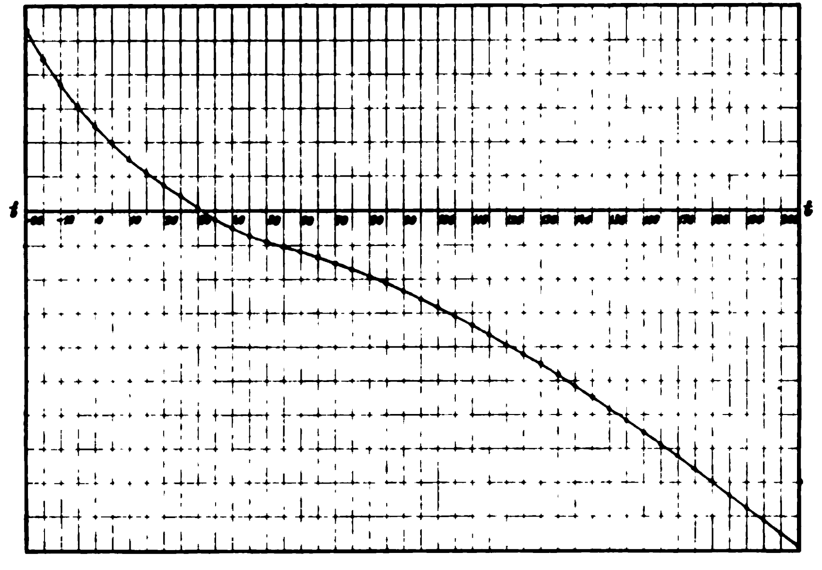


Fig. 1.

auch für tiefere Temperaturen in einem umso stärkeren Masse abweicht, je mehr die Temperatur von 31·85° C. verschieden ist.

Wenn der gesättigte Wasserdampf von 31·85° C. die Zustandsgleichung stark überhitzter Wasserdämpfe erfüllt, so folgt daraus noch nicht, dass auch seine Zustandsänderungen nach diesem Gesetze erfolgen. Und in der That werden wir sofort sehen, dass die Zustandsänderungen diesem Gesetze nicht gehorchen.

Die sechste Spalte unserer Tabelle enthält die Werthe für

$$\frac{pv}{47\cdot05}.$$

Für einen stark überhitzten Wasserdampf ist

$$\frac{pv}{47 \cdot 05} = 273+t.$$

Nimmt für einen solchen Dampf die Temperatur immer in Intervallen von 5° zu, dann nimmt die Grösse $\frac{pv}{47 \cdot 05}$ für jedes Intervall um den constanten Betrag 5 zu. Die letzte Spalte unserer Tabelle zeigt nun aber, dass, wenn die Temperatur für die gesättigten Wasserdämpfe in Intervallen von 5° zunimmt, die Zunahme der Grösse $\frac{pv}{47 \cdot 05}$ stets kleiner als 5 ist. Die Zunahme ist ferner nicht constant, sondern bei 60° ein Maximum.

Die physikalische Deutung dieser Verhältnisse ist sehr einfach. Erhöhen wir die Temperatur t des gesättigten Wasserdampfes auf $t+5$ und erhöhen wir gleichzeitig den Druck so, dass der Wasserdampf gesättigt bleibt, dann wird das Volumen stets in einem weit stärkeren Masse vermindert, als es dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze entsprechen würde. Diese Abweichung von dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze ist bei 60° am kleinsten und wird sowohl für höhere, als auch für tiefere Temperaturen umso grösser, je mehr die Temperatur von 60° entfernt ist.

Fassen wir die letztere Eigenschaft mit dem Verhalten des gesättigten Wasserdampfes zur Zustandsgleichung der stark überhitzten Wasserdämpfe zusammen, so kommen wir zu dem Schlusse, dass die Abweichung des gesättigten Wasserdampfes vom Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze zwischen 31·85° und 60° C. am kleinsten ist, und dass sie desto grösser wird, je mehr wir von diesem Temperaturgebiete zu den höheren oder tieferen Temperaturen fortschreiten. Dieser Schluss ist die strenge Consequenz aus den Regnault'schen Versuchsergebnissen.

Schliesslich möge noch auf eine Folgerung aufmerksam gemacht werden. Die Grössen p, v, t erfüllen für den gesättigten Wasserdampf die Gleichung

$$pv = 47 \cdot 05(273+t)(1+D),$$

während für die Luft die Zustandsgleichung

$$p'v' = 29\cdot 26(273+t')$$

gilt. Ist $p' = p$ und $t' = t$, dann wird

$$\frac{v'}{v} = \frac{29\cdot 26}{47\cdot 05(1+D)} = \frac{0\cdot 6220}{1+D}.$$

Dies ist der Ausdruck für die Dichte des gesättigten Wasserdampfes bezogen auf Luft von gleicher Spannung und gleicher Temperatur. Aus diesem Ausdrucke folgt nun, dass, wenn $t > 31\cdot 85$, also D negativ ist, die Dichte stets grösser als $0\cdot 6220$ ist, dass aber, wenn $t < 31\cdot 85$, also D positiv ist, die Dichte stets kleiner als $0\cdot 6220$ ist.

Dass die Dichte unter den theoretischen Werth sinken kann, ist eine im höchsten Grade auffallende Erscheinung, welche längst bekannt ist und bisher immer auf Ungenauigkeiten oder Versuchsfehler zurückgeführt wurde. Der erste, welcher auf diesen Umstand aufmerksam machte, war meines Wissens Herwig.[1] Derselbe war der Ansicht, dass daran »die wenig scharfe Genauigkeit der Zahlen zu erkennen sei, welche die mechanische Wärmetheorie in umständlicher Weise aus Beobachtungsdaten ableitet, deren Zuverlässigkeitsgrenzen nicht immer die engsten sind«. Was die Clapeyron'sche Gleichung anbelangt, so ist an ihrer Genauigkeit wohl nicht zu zweifeln, fraglich ist nur, ob die oben angegebenen Werthe für die Spannkraft des Dampfes und die Verdampfungswärme des Wassers richtig sind. Nun zeigen aber die Regnault'schen Spannkraftbestimmungen eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit jenen von Magnus, so dass sie als ganz zuverlässig angesehen werden können; somit bleiben nur noch Bedenken in Bezug auf die Regnault'schen Werthe der Verdampfungswärme bei den niedrigeren Temperaturen übrig. Solche Bedenken hat auch H. Winkelmann[2] geltend gemacht, indem er aus der Art, wie Regnault bei seinen Versuchen zwischen —2° und +16° C. die Temperatur bestimmte, den Schluss

[1] Herwig, Pogg. Ann., 137, S. 616, 1869.

[2] Winkelmann, Wied. Ann., 9, S. 208, 1880.

zog, dass die Regnault'schen Werthe der Gesammtwärme in den niedrigen Temperaturen jedenfalls zu gross ausgefallen sind. Ob aber die Fehler wirklich so bedeutend sind, kann man aus der folgenden Vergleichung ersehen. H. Dieterici[1] fand nämlich für die Verdampfungswärme des Wassers bei der Verdampfungstemperatur 0° die Zahl 596·8 Cal., wobei als Wärmeeinheit die mittlere Calorie, d. i. der hundertste Theil derjenigen Wärmemenge, welche ein Gramm Wasser von 0° auf 100° erwärmt, zu Grunde lag. Ferner fand H. Dieterici[2] für das Arbeitsäquivalent der Wärme in absolutem Masssystem (*g*, *cm*, sec.) und bezogen auf dieselbe Wärmeeinheit die Zahl $424 \cdot 36 \times 10^5$. Diese Zahl muss, wie H. Winkelmann[3] zeigte, etwas corrigirt werden, so dass sie $423 \cdot 2 \times 10^5$ lautet. Dividirt man diese Zahl durch $9 \cdot 806 \times 10^4$, so erhält man für das Arbeitsäquivalent 431·6 Gramm-Meter. Da wir als Masseneinheit das Kilogramm eingeführt haben, so gilt für unsere Rechnungen die Zahl 431·6 Kilogramm-Meter. Demnach ist der Arbeitswerth der von H. Dieterici bestimmten Verdampfungswärme gleich

$$596 \cdot 8 \times 431 \cdot 6 = 257578 \cdot 88 \text{ Kilogramm-Meter.}$$

Der Regnault'sche Werth der Verdampfungswärme bei 0° C. ist 606·5, wobei als Wärmeeinheit jene Wärme gilt, welche ein Gramm Wasser von 15° um einen Grad erwärmt. Da H. Zeuner bei der Aufstellung seiner Tabelle als Arbeitsäquivalent der Wärme die Zahl 424 Kilogramm-Meter annahm, so erhalten wir für den Arbeitswerth der Regnault'schen Verdampfungswärme bei 0° C. die Zahl

$$606 \cdot 5 \times 424 = 257156 \cdot 0 \text{ Kilogramm-Meter.}$$

Der Unterschied der beiden Zahlen beträgt nur 0·16‰, d. h. wir können beide Bestimmungen als übereinstimmend ansehen.

Aus diesen Betrachtungen würde also folgen, dass das Sinken der Dichte unter den theoretischen Werth keinem Ver-

[1] Dieterici, Wied. Ann., 37, S. 494, 1889.

[2] Dieterici, Wied. Ann., 33, S. 417, 1888.

[3] Winkelmann, Handbuch der Physik, II, 2, S. 336, 1896.

suchsfehler zuzuschreiben ist. Nun müssen wir aber noch eine andere von H. Dieterici ausgeführte sehr wichtige Messung heranziehen. H. Dieterici hat[1] das specifische Volumen des gesättigten Wasserdampfes bei 0° C. bestimmt und dafür die Zahl 204·68 gefunden. Nach der Zeuner'schen Tabelle beträgt diese Zahl 210·68. Setzen wir nach Regnault den Druck des gesättigten Wasserdampfes bei 0° C. gleich 4·60 *mm* Quecksilber, so ist die oben betrachtete Grösse D für den Dieterici'schen Werth gleich —0·0034, dagegen für den Zeuner'schen Werth gleich +0·0257. Aus dem ersteren Werth von D ist zu schliessen, dass der gesättigte Dampf von 0°, für welchen H. Dieterici das specifische Volumen bestimmte, die Zustandsgleichung des stark überhitzten Wasserdampfes schon nahezu ganz erfüllt oder, anders ausgedrückt, sich wie ein ideelles Gas verhält. Um nun diesen Widerspruch mit den Folgerungen aus den Regnault'schen Versuchsergebnissen richtig beurtheilen zu können, wollen wir erwägen, dass die oben betrachtete Curve in der Nähe von 65° eine Wendetangente hat, dass also der Umstand, welcher das Sinken der Dichte unter den theoretischen Werth bedingt, seine Wirkung in der Nähe von 65° beginnt und dass seine Wirkung mit abnehmender Temperatur in regelmässiger Weise zunimmt. Ferner wollen wir erwägen, dass das Sinken der berechneten Dichte unter den theoretischen Werth bei den niedrigeren Temperaturen nicht nur beim Wasserdampf vorkommt, sondern auch bei den Dämpfen von Alkohol, Äther, Aceton, Chloroform und Schwefelkohlenstoff. Ja es bleibt beim Alkoholdampf die berechnete Dichte bis 80° C. unter dem theoretischen Werthe. Alle diese Erwägungen haben mich zu der Ansicht geführt, dass der Grund des Sinkens der berechneten Dichte unter den theoretischen Werth in einer bisher unbeachteten Eigenschaft der sich entwickelnden Dämpfe zu suchen ist. Über diese Eigenschaft habe ich mir die folgende Ansicht gebildet: In der Chemie ist eine eigenthümliche Erscheinung längst bekannt, welche man mit dem Namen »Entstehungszustand« oder »Status nascendi« bezeichnet hat. Wird nämlich ein Element aus einer zusammengesetzten Molekel gasförmig

[1] Dieterici, Wied. Ann., 38, S. 1, 1889.

abgeschieden, dann kann es im Augenblicke seines Freiwerdens Umsetzungen bewirken, die es im freien, gasförmigen Zustande nicht hervorrufen kann, und man erklärt diese Erscheinung dadurch, dass die Atome im ersten Augenblick isolirt sind, aber sich, wenn andersartige Stoffe, mit denen sie sich verbinden können, nicht zugegen sind, wieder mit Atomen ihrer eigenen Art zu Molekeln vereinigen. Meine Ansicht ist nun die, dass wenn Wasser oder eine der anderen oben genannten Flüssigkeiten bei tieferen Temperaturen siedet, die Dämpfe in statu nascendi zum Theil dissociirt sind und dass diese Dissociation, wenn der Dampf unter demselben Druck und bei derselben Temperatur sich selbst überlassen bleibt, von selbst verschwindet. In dieser Dissociation muss ein Theil der Verdampfungswärme stecken. Geht die Dissociation zurück, dann muss diese Wärme wieder frei werden. Ferner muss, wenn die Dissociation zurückgeht, auch das specifische Volumen kleiner werden. Das specifische Volumen, welches H. Dieterici bestimmt hat, wäre demnach jenes Volumen, welches der gesättigte Wasserdampf bei 0° nach dem Verschwinden der Dissociation besitzt, und es würde ferner daraus folgen, dass der gesättigte Wasserdampf, der frei von jeder Dissociation ist, bei den niedrigeren Temperaturen als ein ideelles Gas angesehen werden kann.

Durch die oben entwickelte Ansicht erklärt sich auch ein Widerspruch, auf welchen Kirchhoff zuerst aufmerksam gemacht hat. Betrachten wir nämlich den gesättigten Dampf bei den Temperaturen t_1 und t_2 und bezeichnen wir mit p_1, v_1, w_1, ρ_1, U_1 und p_2, v_2, w_2, ρ_2, U_2 die entsprechenden Drucke, die specifischen Volumina des Dampfes, die specifischen Volumina der Flüssigkeit, die Verdampfungswärmen und die Energien des Dampfes, so besteht die Gleichung

$$U_2-U_1=\int_{t_1}^{t_2}\left(C-p\frac{dw}{dt}\right)dt+ \\ +\rho_2-\rho_1-p_2(v_2-w_2)+p_1(v_1-w_1). \qquad (1)$$

Hierin bedeutet noch C die specifische Wärme der Flüssigkeit. Die Grössen sind sämmtlich in mechanischem Masse

ausgedrückt. Wenden wir diese Gleichung auf den Wasserdampf an, dann können wir $\frac{dw}{dt} = 0$ und nach Regnault

$$C + \frac{dr}{dt} = 424 \times 0 \cdot 305$$

setzen, so dass die Gleichung die Form erhält:

$$U_2 - U_1 = 424 \times 0 \cdot 305 (t_2 - t_1) - p_2 (v_2 - w_2) + p_1 (v_1 - w_1). \qquad (2)$$

Bei den tieferen Temperaturen können wir w_1 und w_2 gegen v_1 und v_2 vernachlässigen. Betrachten wir bei diesen Temperaturen den Wasserdampf als ein ideelles Gas, dann können wir

$$p_2 v_2 - p_1 v_1 = 47 \cdot 05 (t_2 - t_1)$$

setzen und erhalten

$$U_2 - U_1 = 424 \left(0 \cdot 305 - \frac{47 \cdot 05}{424}\right)(t_2 - t_1). \qquad (3)$$

Nun gilt aber für ein ideelles Gas auch die Gleichung

$$U_2 - U_1 = 424 \,.\, c_v (t_2 - t_1), \qquad (4)$$

wo c_v die specifische Wärme bei constantem Volumen, ausgedrückt in gewöhnlichem Wärmemass, bedeutet. Es folgt also daraus, dass

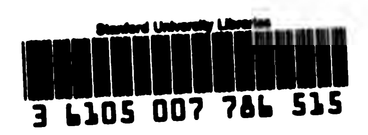
$$c_v = 0 \cdot 305 - \frac{47 \cdot 05}{424}$$

ist, und daraus wieder, dass die specifische Wärme bei constantem Druck, ausgedrückt in gewöhnlichem Wärmemass, gleich

$$0 \cdot 305$$

ist. Vergleichen wir aber diese Zahl mit dem Werthe 0·4805, welchen Regnault für die specifische Wärme des Wasserdampfes bei dem constanten Druck einer Atmosphäre zwischen den Temperaturgrenzen 128° und 217° C. erhalten hat, so finden wir eine so grosse Abweichung, dass wir den Grund

der Abweichung nicht mehr in Versuchsfehlern suchen können. Unsere Ansicht erklärt den Widerspruch sehr einfach. Nach derselben gilt die Gleichung 2) für den Dampf im Zustande der Entwicklung, die Gleichung 4) aber für den Dampf nach verschwundener Dissociation, mit anderen Worten, die beiden Gleichungen beziehen sich auf verschiedene Zustände.


Stanford University Libraries
3 6105 007 786 515



